

УДК 519.64; 538.945

Численное моделирование экранирующего тока в приближении Бина для сверхпроводящих тел с цилиндрической симметрией

Кузьмичев Н.Д.¹, Шушпанов А.А.¹, Васютин М.А.¹

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет¹

Для сверхпроводников второго рода (СВР) при получении таких основных характеристик, как критическая плотность тока или критическая напряженность магнитного поля, пользуются обычно бесконтактными измерениями. Используются образцы в виде дисков, цилиндров, параллелепипедов, эллипсоидов и других симметричных тел.

Одна из моделей для описания магнитных свойств СВР с сильным пиннингом (жестких сверхпроводников 2-го рода (ЖСВР)) в магнитных полях превышающих первое критическое поле H_{c1} была представлена Ч. Бином [1]. Она предполагает, что области сверхпроводника куда не проникло магнитное поле экранирующая плотность сверхпроводящего тока (сверхтока) равна нулю, а куда проникло — некоторому критическому значению J_c .

В работе выполнено численное моделирование магнитных свойств жестких сверхпроводников 2-го рода в модели Бина с осевой симметрией (короткий цилиндр и эллипсоид вращения) в однородном магнитном поле, параллельном оси [1]. Введем ограничения для величин x, y, z : $-b \leq y \leq b, r = (x^2 + z^2)^{0.5} \leq a(y)$, где $a(y)$ — функция боковой границы.

Будем рассматривать материал с зависимостью $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. Также введем зависимость напряженности электрического поля от плотности тока $\mathbf{E} = E(J)\mathbf{J}/J$. Удельное сопротивление образца аппроксимируется степенной зависимостью $E = E_c (J/J_c)^n$, с ненулевым критическим значением плотности тока J_c и показателем степени $n \geq 1$. Тогда условие $n = 1$ описывает омическую зависимость, а предел при $n \rightarrow \infty$ — модель Бина. В общем случае J_c и n могут зависеть от индукции магнитного поля в конкретной точке: $J_c(B)$ и $n(B)$, или от частоты изменения поля, но мы ограничим вычисления изотропными средами, как и в работе [2].

В качестве основного уравнения для расчета будем использовать уравнение движения тока:

$$\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t) = \mu_0^{-1} \int_0^a dr' \int_0^b dy' Q_{\text{цил}}^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[E(J) - \frac{r'}{2} \dot{B}_{\text{пр}} \right], \quad (1)$$

где $\mathbf{r} = (r, y)$, $\mathbf{r}' = (r', y')$. Ядро интегрального оператора имеет вид

$$Q_{\text{цил}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = f(r, r', y - y') + f(r, r', y + y'),$$

где

$$f(r, r', \eta) = \int_0^\pi \frac{d\phi}{2\pi} \cdot \frac{-r' \cos \phi}{(\eta^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \phi)^{0.5}}. \quad (2)$$

Выберем неравномерную сетку с уплотнением к краям для численного решения данного

уравнения:

$$r_i = r_i(u_i) = \sin(u_i) \cdot a(y_i), \quad y_i = y_i(v_i) = \sin(v_i) \cdot b,$$

$$u_i = \frac{\pi}{2} \left(i - \frac{1}{2} \right), \quad v_i = \frac{\pi}{2} \left(j - \frac{1}{2} \right), \quad i = 1, \dots, N_y, \quad j = 1, \dots, N_r.$$

Для расчета интегрального ядра в численной форме понадобятся «веса» ячеек:

$$w_j = w_r \cdot w_y, \quad w_r = \frac{\pi}{2} \cos u_i \cdot \frac{a(y_i)}{N_r}, \quad w_y = \frac{\pi}{2} \cos v_i \cdot \frac{b}{N_y}.$$

Для образцов с невертикальной боковой границей вводим дополнительный нормировочный множитель для горизонтальных координат сетки и «веса» ячеек $a(y_i)$, получаемый из функции боковой границы $a(y)$.

Ядро интегрального оператора представим в виде матрицы $Q(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rightarrow Q(r_i, r'_j) \cdot w_j = Q_{ij} \cdot w_j$. Найдем эллиптический интеграл из формулы (2) численно:

$$f(r, r', \eta) = \int_0^\pi \frac{d\phi}{2\pi} \cdot \frac{-r' \cos \phi}{(\eta^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \phi)^{0.5}} = \int_0^\pi g(\phi) d\phi =$$

$$= \int_0^1 g[\phi(u)] \phi'(u) du \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g[\phi(u_i)] \phi'(u_i),$$

где

$$g[\phi(u_i)] = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{r' \cos \phi(u_i)}{(\eta^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \phi(u_i))^{0.5}},$$

$$\phi(u_i) = \pi - \pi \cos(\pi u_i),$$

$$u_i = \frac{i - 0.5}{M}, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Уравнение для производной плотности тока (1) сведем к матричному:

$$\dot{J}(t) = \frac{b}{N} Q^{-1} \cdot \left[\overbrace{J^T(t) \circ \dots \circ J^T(t)}^n - \frac{R}{2} \dot{B}_{\text{пр}}(t) \right],$$

$$R_i = r_i, \quad i = 1, \dots, N_r N_y,$$

где J и R — векторы плотности тока и координат, соответственно, в каждой точке сетки.

Для расчетов были выбраны 4 образца цилиндрической формы с $b(y) = \text{const}$ и 4 эллиптических образца с $b(y) = a(1 - y^2/c)^{0.5}$, где c — коэффициент для создания различных соотношений размеров. Размер сетки расчета выбирается исходя из соотношений сторон образца с сохранением её плотности в 20 ячеек на единицу размера. Скорость нарастания внешнего магнитного поля примем $\dot{B}_{\text{пр}} = E_c/a = 1$. Степень в уравнении сопротивления образца возьмем достаточно большую для соответствия модели Бина $n = 51$. Расчеты проводились в среде *MATLAB*, поскольку она хорошо оптимизирована для решения матричных уравнений и предоставляет широкий выбор средств визуализации расчетов. Результаты моделирования для фронтов проникновения магнитного поля показаны на рис. 1, результаты моделирования поля образцов показаны на рис. 2, результаты расчета петель намагниченности образцов показаны на рис. 3, результаты моделирования профилей плотности тока для образцов с соотношением сторон 1 показаны на рис. 4.

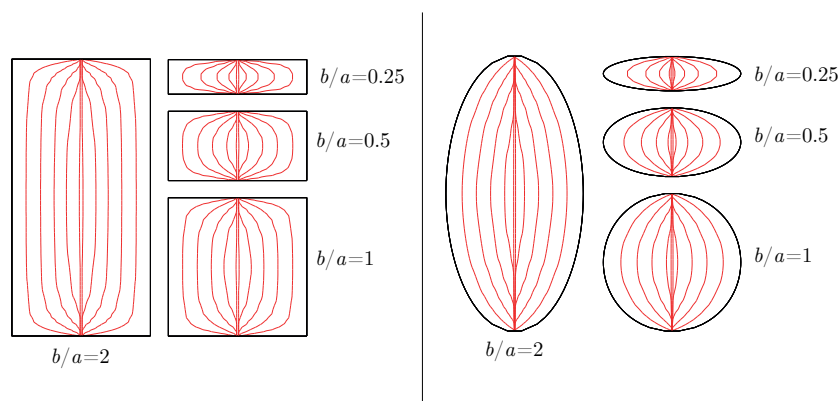


Рис. 1. Фронты проникновения магнитного поля и сверхтока для цилиндров (слева) и эллипсоидов (справа) в отношении сторон $b/a = 2, 1, 0.5, 0.25$ в линейно возрастающем магнитном поле. Показаны линии для $H_{пр}/H_{н} = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ при плотности тока $\pm J_c/2$

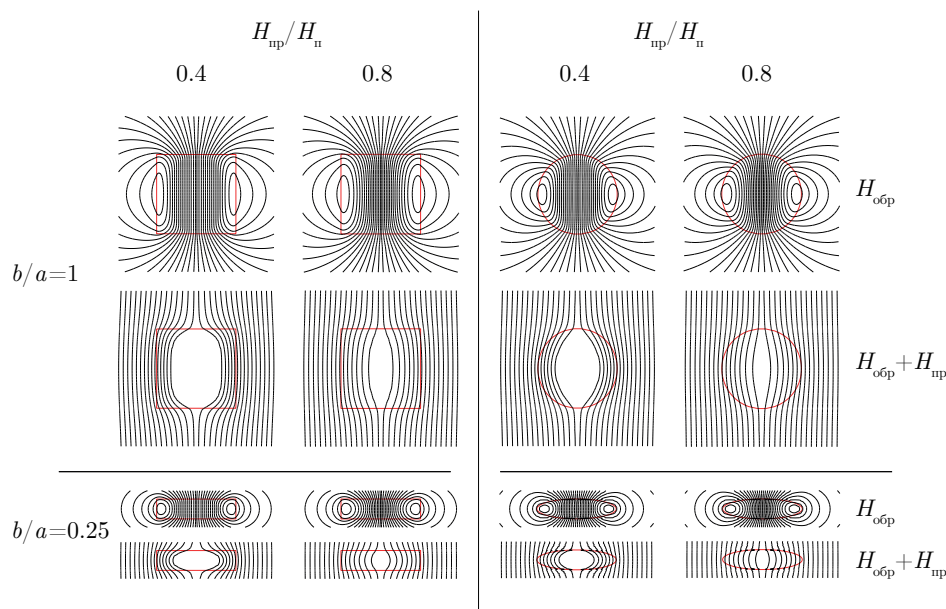


Рис. 2. Силовые линии магнитного поля при проникновении магнитного поля для цилиндров (слева) и эллипсоидов (справа) с соотношением сторон $b/a = 1, 0.25$. Сверху магнитное поле, создаваемое сверхтоком образца ($H_{обр}$), снизу – совместно с внешним. Картины даны для $H_{пр}/H_{н} = 0.4, 0.8$.

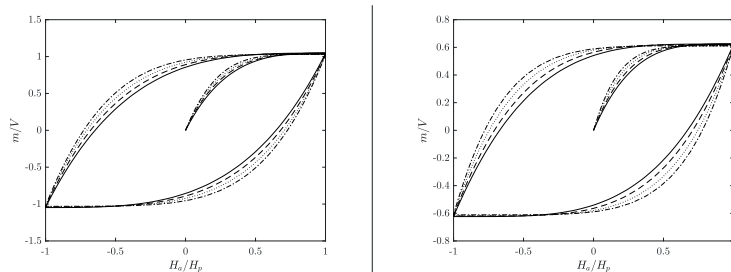


Рис. 3. Петли гистерезиса для намагниченности образца при линейном изменении внешнего поля для цилиндров (слева) и эллипсоидов (справа) с соотношением размеров $b/a = 2$ (сплошная линия), 1 (пунктирная линия), 0.5 (точечная линия), 0.25 (штрих-пунктирная линия).

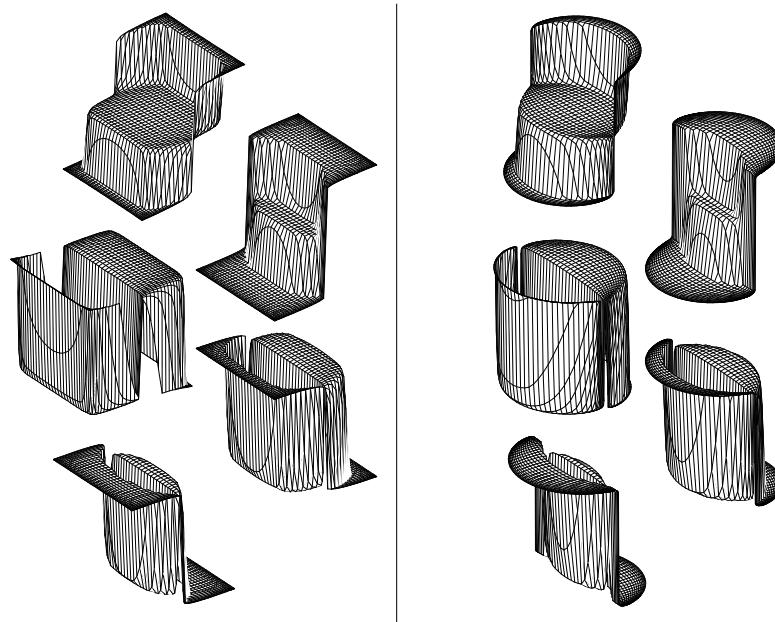


Рис. 4. Профили плотности тока J_c для цилиндра (слева) и эллипсоида (справа) с соотношением $b/a = 1$ при внешнем поле (сверху вниз) $H_{\text{пр}}/H_{\text{п}} = 0.2, 0.7, 0.8, 0.3, -0.2$.

Литература

1. Been C.P. Magnetization of hard superconductors // Phys. rev. 1962. 8 (6). DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.8.250>.
2. Brandt E.H. Superconductor disks and cylinders in an axial magnetic field. I. Flux penetration and magnetization curves // Phys. rev. 1997. 58 (10). 11 p. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.58.6506>.
3. Кузмичев Н.Д., Федченко А.А. Математическое моделирование распределения экранирующего тока и гистерезис намагниченности коротких цилиндров жестких сверхпроводников 2-го рода в приближении Бина // Журнал Средневолжского математического общества. 2011. Т. 13, № 4. С. 25-34.
4. Frankel D. Critical-state model for the determination of critical currents in disk- shaped superconductors // Appl. Phys. 1993. 50 (8). P. 5402-5407.

MSC2010 45B05

Numerical modelling of the screening current in the Bean approximation for superconducting bodies with cylindrical symmetry

N.D. Kuzmichev¹, A.A. Shushpanov¹, M.A. Vasyutin¹
National Research Ogarev Mordovia State University¹