УДК 517.938.5

Построение энергетической функции Морса для топологических потоков с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством

Зинина С.Х.[1]

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет[1]

Функцией Ляпунова для потока на многообразии называется непрерывная функция, которая убывает вдоль орбит вне цепно рекуррентного множества и является константой на каждой цепной компоненте. В силу результатов Ч. Конли [1] такая функция существует для любого потока, порожденного непрерывным векторным полем, а сам факт существования носит название «Фундаментальная теорема динамических систем». Если множество критических точек функции Ляпунова совпадает с цепно рекуррентным множеством потока, то такая функция называется энергетической функцией.

Рассмотрим класс $G(M^n)$ топологических потоков с конечным (следовательно, состоящим из неподвижных точек) гиперболическим цепно рекуррентным множеством, заданный на M^n. Динамика потоков рассматриваемого класса близка по своим свойствам к градиентно-подобным потокам. Аналогично порядку С. Смейла, введем на множестве неподвижных точек потока $f^t \in G(M^n)$ отношение условием

$$p \prec q \iff W^s_p \cap W^u_q \neq \emptyset.$$

В силу конечности цепно рекуррентного множества потока f^t введенное отношение является отношением частичного порядка и, следовательно, может быть продолжено до отношения полного порядка на $\mathcal{R}_{f^t}$. В дальнейшем будем считать неподвижные точки потока f^t пронумерованными согласованно с введенным порядком:

$$p_1 \prec \cdots \prec p_k.$$

Аналогично теореме 2.1 из книги [2] доказано следующее утверждение о вложении и асимптотическом поведении инвариантных многообразий неподвижных точек.

Теорема 1. *Пусть $f^t \in G(M^n)$. Тогда*

1. $M^n = \bigcup\limits_{i=1}^{k} W^u_{p_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{k} W^s_{p_i}$;
2. *$W^u_{p_i}$ ($W^s_{p_i}$) является топологическим подмногообразием многообразия M^n, гомеоморфным $\mathbb{R}^{\lambda_{p_i}}$ ($\mathbb{R}^{n-\lambda_{p_i}}$);*
3. $cl(W^u_{p_i}) \setminus (W^u_{p_i} \cup p_i) \subset \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} W^u_{p_j}$ $\left(cl(W^s_{p_i}) \setminus (W^s_{p_i} \cup p_i) \subset \bigcup\limits_{j=i+1}^{k} W^s_{p_j}\right)$.

При сотрудничестве с О.В. Починкой в работе [3] была доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Любой поток $f^t \in G(M^n)$ обладает энергетической функцией Морса.*

Литература

1. Conley C. Isolated invariant sets and the Morse index. CBMS Regional Conference Series in Math. Providence, RI: AMS, 1978. Vol. 38.

2. Grines V., Medvedev T., Pochinka O. Introduction to Topological Classification of Diffeomophisms on 2- and 3-Manifolds. Switzerland. Springer, 2016. 305 p.

3. Medvedev T. V., Pochinka O. V., Zinina S. Kh. On existence of a Morse energy function for topological flows with finite chain recurrent sets. https://arxiv.org/1904.08086v1

MSC2010 37D05

Construction of the Morse energy function for topological flows with finite hyperbolic chain recurrent set

S.Kh. Zinina[1]

National Research Ogarev Mordovia State University[1]