УДК 517.9

Условия нелокальной разрешимости одной системы двух квазилинейных уравнений первого порядка со свободными членами*

Донцова М.В.[1]

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского[1]

Рассмотрим систему вида:

$$\begin{cases} \partial_t u\,(t,x) + S_1(u,v)\partial_x u\,(t,x) = f_1(t,x), \\ \partial_t v(t,x) + S_2(u,v)\partial_x v(t,x) = f_2(t,x), \end{cases} \tag{1}$$

где $u(t,x),\ v(t,x)$ – неизвестные функции, $f_1(t,x),\ f_2(t,x),\ S_1(u,v),\ S_2(u,v)$ – известные функции. Поставим для системы уравнений (1) задачу Коши, т. е. зададим начальные условия:

$$u(0,x) = \varphi_1(x),\ v(0,x) = \varphi_2(x). \tag{2}$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ – известные функции.

Задача (1), (2) определена на

$$\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T, x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}.$$

С помощью метода дополнительного аргумента проводится исследование разрешимости задачи Коши (1), (2) на множестве Ω_T, где $f_1(t,x),\ f_2(t,x),\ S_1(u,v),\ S_2(u,v)$ – известные функции. С помощью метода дополнительного аргумента и преобразований получена система интегральных уравнений [1–4]:

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(x - \int_0^t S_1(w_1,w_3)d\nu) + \int_0^s f_1(\nu, x - \int_\nu^t S_1(w_1,w_3)d\tau)d\nu, \tag{3}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(x - \int_0^t S_2(w_4,w_2)d\nu) + \int_0^s f_2(\nu, x - \int_\nu^t S_2(w_4,w_2)d\tau)d\nu, \tag{4}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,x - \int_s^t S_1(w_1,w_3)d\nu), \tag{5}$$

$$w_4(s,t,x) = w_1(s,s,x - \int_s^t S_2(w_4,w_2)d\nu). \tag{6}$$

Обозначим $\bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$ — пространство функций, один раз дифференцируемых по переменной t, дважды дифференцируемых по переменной x, имеющих смешанные производные второго порядка и ограниченные вместе со своими производными на Ω_T, $\bar{C}^{\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n}(\Omega_*)$ — пространство функций, определенных, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными до порядка α_m по m-му аргументу, $m=\overline{1,n}$ на неограниченном подмножестве $\Omega_* \subset R^n, n = 1,2...$,

$$C_\varphi = \max\{\sup_R \left|\varphi_i^{(l)}\right| |i = 1,2, l = \overline{0,2}\},\ C_f = \max\{\sup_{\Omega_T} |f_i|\,, \sup_{\Omega_T} |\partial_x f_i|\,, i = 1,2\},$$

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00125 мол_а.

$$Z_K = \{(u, v)\,|u, v \in [-K, K]\}\,,\ \text{где } K - \text{положительное число.}$$

Общим итогом исследования является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi_i \in \bar{C}^2(R), i = 1, 2,\ f_1, f_2 \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T),\ \ S_1, S_2 \in \bar{C}^{2,2}(Z_K),\ \ K = C_\varphi + TC_f$ *и выполняются условия:*

$$\partial_u S_1 < 0,\ \partial_v S_1 > 0,\ \partial_u S_2 < 0,\ \partial_v S_2 > 0 \text{ на } Z_K,$$

$$\varphi_1'(x) \leq 0,\ \varphi_2'(x) \geq 0 \text{ на } R,\ \ \partial_x f_1 \leq 0,\ \partial_x f_2 \geq 0 \text{ на } \Omega_T.$$

Тогда для любого $T > 0$ *задача Коши (1), (2) имеет единственное решение*

$$u(t, x), v(t, x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T),$$

которое определяется из системы интегральных уравнений (3)–(6).

В теореме 1 сформулированы условия нелокальной разрешимости задачи Коши (1), (2), где $u(t, x) = w_1(t, t, x),\ v(t, x) = w_2(t, t, x)$.

Литература

1. Донцова М. В. Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с правыми частями специального вида // Уфимский математический журнал. 2014. Т. 6, № 4. С. 71–82.

2. Донцова М. В. Условия нелокальной разрешимости системы со свободными членами для случая положительных коэффициентов // Журнал Средневолжского математического общества. 2017. Т. 19, № 4. С. 23–32.

3. Донцова М. В. Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными правыми частями // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2014. № 4. С. 116–130.

4. Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н. К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Доклады РАН. 2001. Т. 379, № 1. С. 16–21.

MSC2010 35F50; 35F55; 35A01; 35A02; 35A05

The nonlocal solvability conditions for one system of two quasilinear equations of the first order with constant terms

M.V. Dontsova[1]

Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod[1]