УДК 539.3, 532.542

Математическое моделирование динамической устойчивости аэроупругих систем при взаимодействии с вязкой жидкостью *

Вельмисов П.А. [1], Анкилов А.В. [1], Мизхер У.Д. [1]
Ульяновский государственный технический университет[1]

При проектировании и эксплуатации конструкций, приборов, устройств, установок различного назначения, взаимодействующих с жидкостью, важной проблемой является обеспечение надежности их функционирования и увеличение сроков службы. Подобные проблемы присущи многим отраслям техники. В частности, такого рода задачи возникают в машиностроении, авиаракетостроении, приборостроении и т. д. Существенное значение при расчете конструкций, взаимодействующих с жидкостью, имеет исследование устойчивости их деформируемых элементов. Принятые в работе определения устойчивости упругого тела соответствуют концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Проблема может быть сформулирована так: при каких значениях параметров, характеризующих систему «жидкость-тело», малым деформациям тела в начальный момент времени $t = 0$ (т.е. малым начальным отклонениям от положения равновесия) будут соответствовать малые деформации и в любой момент времени $t > 0$.

В работе исследуется устойчивость движения (по Ляпунову) упругой пластины, которая является частью ($x = a, y_0 < y < y_*$) границы L_0, разделяющей две области S_1 и S_2, заполненные вязкой несжимаемой жидкостью. Области S_1, S_2 имеют границы L_1, L_2 и L_0 произвольной формы (рис. 1).

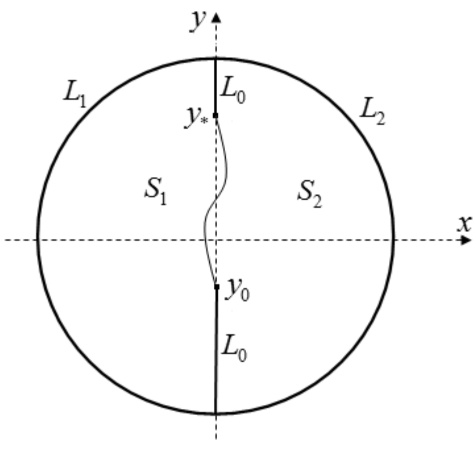

Рис. 1. Пример областей S_1, S_2.

Введем обозначения: $u(y,t)$ и $w(y,t)$, $y \in (y_0, y_*)$ – деформации упругой пластины в

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 18-41-730015.

направлении осей Oy и Ox соответственно;

$$v_1(x,y,t) = \begin{cases} v_{11}(x,y,t),\ (x,y) \in S_1, \\ v_{12}(x,y,t),\ (x,y) \in S_2, \end{cases} \qquad v_2(x,y,t) = \begin{cases} v_{21}(x,y,t),\ (x,y) \in S_1, \\ v_{22}(x,y,t),\ (x,y) \in S_2 \end{cases}$$

– проекции вектора скоростей жидкости; $P(x,y,t) = \begin{cases} P_1(x,y,t),\ (x,y) \in S_1, \\ P_2(x,y,t),\ (x,y) \in S_2 \end{cases}$ – давление в жидкости.

Математическая постановка задачи имеет вид

$$\rho(v_{1t} + v_1 v_{1x} + v_2 v_{1y}) = \mu(v_{1xx} + v_{1yy}) - P_x,\ \ (x,y) \in S_1 \bigcup S_2; \tag{1}$$

$$\rho(v_{2t} + v_1 v_{2x} + v_2 v_{2y}) = \mu(v_{2xx} + v_{2yy}) - P_y,\ \ (x,y) \in S_1 \bigcup S_2; \tag{2}$$

$$v_{1x} + v_{2y} = 0, \quad (x,y) \in S_1 \bigcup S_2; \tag{3}$$

$$v_1(L_k) = v_2(L_k) = 0, \quad k = 1,2; \tag{4}$$

$$v_1\left(L_0 \backslash (y_0, y_*)\right) = v_2\left(L_0 \backslash (y_0, y_*)\right) = 0; \tag{5}$$

$$v_1(a,y,t) = \dot{w}(y,t),\ v_2(a,y,t) = 0, y \in (y_0, y_*); \tag{6}$$

$$\begin{cases} -EF\left(u'(y,t) + \frac{1}{2}w'^2(y,t)\right)' + M\ddot{u}(y,t) = 0, \\ -EF\left[w'(y,t)\left(u'(y,t) + \frac{1}{2}w'^2(y,t)\right)\right]' + Dw''''(y,t) + M\ddot{w}(y,t) + N(t)w''(y,t) + \\ +\beta_2\dot{w}''''(y,t) + \beta_1\dot{w}(y,t) + \beta_0 w(y,t-\tau) = P_1(a,y,t) - P_2(a,y,t),\ \ y \in (y_0, y_*). \end{cases} \tag{7}$$

Индексы x, y, t снизу обозначают частные производные по x, y, t; штрих и точка – частные производные по y и t соответственно; ρ, μ – плотность и коэффициент вязкости жидкости; $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$ – изгибная жесткость пластины; h – толщина пластины; $M = h\rho_p$ – погонная масса пластины; $F = h/(1-\nu^2)$; E, ρ_p – модуль упругости и линейная плотность пластины; ν – коэффициент Пуассона; $N(t)$ – сжимающая ($N > 0$) или растягивающая ($N < 0$) пластину сила; β_1, β_2 – коэффициенты внешнего и внутреннего демпфирования; β_0 – коэффициент жесткости основания (постели); τ – коэффициент запаздывания реакции основания.

Сжимающая (растягивающая) пластину сила $N(t)$ может зависеть от времени. Например, при изменении теплового воздействия на пластину с течением времени $N(t)$ имеет вид:

$$N(t) = N_0 + \frac{E\alpha_T}{1-\nu}\int\limits_{-h/2}^{h/2} T(z,t)\,dz,$$

где α_T – температурный коэффициент линейного расширения, $T(z,t)$ – закон изменения температуры по толщине элемента, N_0 – постоянная составляющая усилия, созданная при закреплении элемента.

Уравнения (1)–(3) описывают движение жидкости в областях S_1, S_2, уравнения (7) описывают динамику пластины и, в отличие от проведенных ранее исследований [1], учитывают запаздывание реакции основания элемента; условия (4)–(6) – условия прилипания вязкой жидкости.

Граничные условия на концах пластины при $y = y_0$ и $y = y_*$ могут иметь вид:

1) жесткое неподвижное защемление:

$$w(y,t) = w'(y,t) = u(y,t) = 0; \tag{8}$$

2) шарнирное неподвижное закрепление:

$$w(y,t) = w''(y,t) = u(y,t) = 0; \tag{9}$$

3) жесткое подвижное защемление:

$$w(y,t) = w'(y,t) = u'(y,t) = 0; \tag{10}$$

4) шарнирное подвижное закрепление:

$$w(y,t) = w''(y,t) = u'(y,t) + \frac{1}{2}w'^2(y,t) = 0. \tag{11}$$

Заметим, что для описания движения жидкости используются нелинейные уравнения Навье-Стокса, а граничные условия (6), так же, как и правая часть уравнения (7), записаны в предположении, что деформации пластины малы. Постановку задачи следует также дополнить начальными условиями

$$w(y,0) = f_1(y), \quad \dot{w}(y,0) = f_2(y), \quad u(y,0) = f_3(y), \quad \dot{u}(y,0) = f_4(y), \tag{12}$$

$$v_1(x,y,0) = f_5(x,y), \; v_2(x,y,0) = f_6(x,y). \tag{13}$$

Введем в рассмотрение функционал

$$J(t) = \frac{\rho}{2}\iint\limits_S V^2(x,y,t)dS + \frac{\beta_0}{2}\int\limits_{y_0}^{y_*}\left(\int\limits_{t-\tau}^{t}dt_1\int\limits_{t_1}^{t}\dot{w}^2(y,s)ds\right)dy + \frac{1}{2}\int\limits_{y_0}^{y_*}\left(EF\left(u'(y,t)+\frac{1}{2}w'^2(y,t)\right)^2 + \right.$$

$$\left. + M\left(\dot{u}^2(y,t)+\dot{w}^2(y,t)\right) + Dw''^2(y,t) - N(t)w'^2(y,t) + \beta_0 w^2(y,t)\right)dy, \tag{14}$$

где $S = S_1 \bigcup S_2$.

Интегрируя по частям, согласно граничным условиям (8)–(11) получим равенства

$$-\int\limits_{y_0}^{y_*}\dot{w}\left[w'\left(u'+\frac{1}{2}w'^2\right)\right]'dy - \int\limits_{y_0}^{y_*}\dot{u}\left(u'+\frac{1}{2}w'^2\right)'dy = \int\limits_{y_0}^{y_*}\dot{w}'w'\left(u'+\frac{1}{2}w'^2\right)dy +$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y_*}\dot{u}'\left(u'+\frac{1}{2}w'^2\right)dy = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{y_0}^{y_*}\left(u'+\frac{1}{2}w'^2\right)^2dy\right)_t, \quad \int\limits_{y_0}^{y_*}\dot{w}\ddot{w}dy = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{y_0}^{y_*}\dot{w}^2dy\right)_t,$$

$$\int\limits_{y_0}^{y_*}\dot{u}\ddot{u}dy = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{y_0}^{y_*}\dot{u}^2dy\right)_t, \quad \int\limits_{y_0}^{y_*}\dot{w}w''''dy = \int\limits_{y_0}^{y_*}\dot{w}''w''dy = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{y_0}^{y_*}w''^2dy\right)_t,$$

$$N(t)\int\limits_{y_0}^{y_*}\dot{w}w''dy = -N(t)\int\limits_{y_0}^{y_*}\dot{w}'w'dy = -\frac{1}{2}\left(N(t)\int\limits_{y_0}^{y_*}w'^2dy\right)_t + \frac{1}{2}\dot{N}(t)\int\limits_{y_0}^{y_*}w'^2dy,$$

$$\int\limits_{y_0}^{y_*} \dot{w}\dot{w}''''dy = \int\limits_{y_0}^{y_*} \dot{w}''^2 dy, \quad w(x,t-\tau) = w(x,t) - \int\limits_{t-\tau}^{t} \dot{w}(x,s)ds,$$

Учитывая эти равенства, неравенство $2\dot{w}(y,t)\dot{w}(y,s) \leq \dot{w}^2(y,t) + \dot{w}^2(y,s)$, уравнения (1)–(3), (7) и применяя формулу Грина, найдем производную от функционала по времени:

$$\frac{\partial J}{\partial t} \leq \oint\limits_{L_1 \cup L_0} \left[-v_{11}\left(P_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2\right) + \mu(v_{11}v_{11x} + v_{21}v_{21x}) \right] dy + \left[v_{21}\left(P_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2\right) - \mu(v_{11}v_{11y} + \right.$$

$$\left. + v_{21}v_{21y}) \right] dx + \oint\limits_{L_2 \cup L_0} \left[-v_{12}\left(P_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2\right) + \mu(v_{12}v_{12x} + v_{22}v_{22x}) \right] dy + \left[v_{22}\left(P_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2\right) - \right.$$

$$\left. -\mu(v_{12}v_{12y} + v_{22}v_{22y}) \right] dx - \mu \iint\limits_{S} \left(v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{2x}^2 + v_{2y}^2\right) dS - \int\limits_{y_0}^{y_*} \left(\beta_2 \dot{w}''^2(y,t) + \right.$$

$$\left. + (\beta_1 - \beta_0\tau)\, \dot{w}^2(y,t) + \frac{1}{2}\dot{N}(t)w'^2(y,t) - (P_1(a,y,t) - P_2(a,y,t))\, \dot{w}(y,t) \right) dy. \tag{15}$$

Учитывая граничные условия (4)–(6) и уравнения (7), из (15) получим

$$\frac{\partial J}{\partial t} \leq -\int\limits_{y_0}^{y_*} \left(\beta_2 \dot{w}''^2(y,t) + (\beta_1 - \beta_0\tau)\, \dot{w}^2(y,t) + \frac{1}{2}\dot{N}(t)w'^2(y,t) \right) dy -$$

$$-\mu \iint\limits_{S} \left(v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{2x}^2 + v_{2y}^2\right) dS.$$

Рассмотрим краевые задачи для уравнений $\psi'''' = -\lambda\psi''$, $\psi'''' = \eta\psi$, $y \in (y_0, y_*)$ с граничными условиями (8)–(11) для функции $w(y,t)$. Эти задачи являются положительно определенными и полностью определенными. Для функции $w(y,t)$, используя неравенство Рэлея [2], получим оценки

$$\int_{y_0}^{y_*} \dot{w}''^2(y,t)dy \geq \eta_1 \int_{y_0}^{y_*} \dot{w}^2(y,t)dy, \tag{16}$$

$$\int\limits_{y_0}^{y_*} w''^2(y,t)dy \geq \lambda_1 \int\limits_{y_0}^{y_*} w'^2(y,t)dy, \quad \int\limits_{y_0}^{y_*} w''^2(y,t)dy \geq \eta_1 \int\limits_{y_0}^{y_*} w^2(y,t)dy, \tag{17}$$

где λ_1, η_1 – наименьшие собственные значения краевых задач.

Используя неравенство (16), получим

$$\frac{\partial J}{\partial t} \leq -\int\limits_{y_0}^{y_*} \left((\beta_2\eta_1 + \beta_1 - \beta_0\tau)\, \dot{w}^2(y,t) + \frac{1}{2}\dot{N}(t)w'^2(y,t) \right) dy -$$

$$-\mu \iint\limits_{S} \left(v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{2x}^2 + v_{2y}^2\right) dS. \tag{18}$$

Пусть выполняются условия

$$\beta_2\eta_1 + \beta_1 - \beta_0\tau \geq 0, \quad \dot{N}(t) > 0, \tag{19}$$

тогда из (18) следует, что $\dfrac{\partial J}{\partial t} \leq 0$. Интегрируя от 0 до t, получим неравенство

$$J(t) \leq J(0). \tag{20}$$

Произведем оценку функционала с учетом граничных условий (8)–(11). Используя первое неравенство (17), получим оценку $J(t)$ снизу:

$$J(t) \geq \frac{1}{2}\iint\limits_S \rho V^2 dS + \frac{1}{2}\int\limits_{y_0}^{y_*} \left(M(\dot{u}^2(y,t) + \dot{w}^2(y,t)) + (\lambda_1 D - N(t))w'^2(y,t)\right) dy. \tag{21}$$

Используя неравенство Коши-Буняковского для граничных условий (8)–(11), получим оценку

$$w^2(y,t) \leq (y_* - y_0)\int\limits_{y_0}^{y_*} w'^2(y,t)dy. \tag{22}$$

Пусть выполняется условие

$$N(t) < \lambda_1 D, \tag{23}$$

тогда неравенство (21) примет вид

$$J(t) \geq \frac{1}{2}\iint\limits_S \rho\left(v_1^2 + v_2^2\right) dS + \frac{1}{2}\int\limits_{y_0}^{y_*} M(\dot{u}^2(y,t) + \dot{w}^2(y,t))dy + \frac{\lambda_1 D - N(t)}{2(y_* - y_0)} w^2(y,t). \tag{24}$$

Из (20), (24) следует теорема.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (19), (23). Тогда решение $w(y,t)$ задачи (1)–(11) является устойчивым, решение $v_1(x,y,t)$, $v_2(x,y,t)$ и производные $\dot{u}(y,t)$, $\dot{w}(y,t)$ задачи (1)–(11) являются устойчивыми в среднем (в интегральном смысле) по отношению к возмущениям начальных данных (12), (13).*

Литература

1. Velmisov P. A., Ankilov A. V. Dynamic stability of plate interacting with viscous fluid // Cybernetics and physics. 2017. V. 6, № 4. P. 262-270.

2. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 503 с.

MSC2010 74F10

Mathematical modeling of dynamic stability of aeroelastic systems interacting with viscous fluid.

P.A. Velmisov [1], A.V. Ankilov [1], U.D. Mizher [1]

Ulyanovsk state technical university [1]