УДК 517.933; 517.521; 517.584

Задача Кеплера и новые тождества для функций Бесселя*

Алексеева Е.С.[1], Рассадин А.Э.[1]

Лаборатория бесконечномерного анализа и математической физики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова[1]

Кеплерова задача занимает в современной физике особое положение благодаря её значимости при описании базовых процессов как в макро-, так и в микромире. В представленном докладе с помощью предложенного в статье [1] системного подхода к применению равенства Парсеваля-Стеклова [2], выведена серия соотношений для цилиндрических функций первого рода натурального порядка.

Хорошо известно, что в рамках классической механики задача Кеплера сводится к решению следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений [3]:

$$m\,\ddot{\vec{r}} = -\frac{\alpha\,\vec{r}}{r^3}\,, \qquad \vec{r} \in R^3\,, \tag{1}$$

где $\alpha > 0$ — коэффициент гравитационного или кулоновского притяжения частиц с массами m_1 и m_2, $\vec{r}$ — вектор взаимного расстояния этих частиц, $m = \dfrac{m_1\,m_2}{m_1 + m_2}$ — их приведённая масса, а точка означает дифференцирование по времени.

В силу сохранения в системе (1) момента импульса $\vec{M} = m\,[\vec{r}, \dot{\vec{r}}]$ временная эволюция вектора $\vec{r} = (x, y, z)$ происходит в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{M}$, причём, если выбрать в качестве этой плоскости плоскость $z = 0$, то в ней параметрические уравнения траектории финитного движения вектора $\vec{r}$ имеют вид [3]:

$$x = a\,(\cos\xi - \varepsilon)\,, \qquad y = a\,\sqrt{1 - \varepsilon^2}\,\sin\xi\,, \qquad \xi \in [0, 2\,\pi]\,. \tag{2}$$

Уравнения (2) определяют эллипс с большой полуосью a и эксцентриситетом ε ($0 \le \varepsilon < 1$), а параметр ξ иногда называют эксцентрической аномалией [4]. Зависимости же компонент $x(t)$ и $y(t)$ вектора $\vec{r}$ от времени t задаются неявно с помощью соотношения [3]:

$$\omega_0\,t = \xi - \varepsilon\,\sin\xi\,, \qquad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{\alpha}{m\,a^3}}\,, \tag{3}$$

где частота ω_0 выражается через период T движения по эллипсу (2) следующим образом: $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$.

В книгах [4, 5] приведён вывод разложений в ряд Фурье для функций $x(t)$ и $y(t)$:

$$x(t) = -\frac{3}{2}\,a\,\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,a}{n}\,J_n'(n\varepsilon)\,\cos(n\,\omega_0\,t) \tag{4}$$

и

$$y(t) = 2\,a\,\sqrt{1 - \varepsilon^2}\,\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(n\varepsilon)}{n\varepsilon}\,\sin(n\,\omega_0\,t)\,, \tag{5}$$

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-08-01356-а.

где $J_n(w)$ и $J'_n(w)$ — функция Бесселя $n-$го порядка и её производная соответственно.

Составив по разложению (4) равенство Парсеваля-Стеклова [2], получим тождество:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,[J'_n(n\varepsilon)]^2 = \frac{2-\varepsilon^2}{8} \tag{6}$$

и аналогично находим по разложению (5) другое тождество с функциями Бесселя:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n^2(n\varepsilon)}{n^2} = \frac{\varepsilon^2}{4} \tag{7}$$

(при вычислении интегралов по времени t от квадратов функций (2) надо заменить переменную интегрирования на ξ согласно формуле (3)).

Отметим, что формула (7) встречалась ранее в работе [1] в качестве результата применения равенства Парсеваля-Стеклова к точному решению следующей задачи Коши для уравнения Римана:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0\,, \qquad v(x,0) = \sin x\,.$$

Далее, дифференцируя почленно по времени суммы (4) и (5), разложим в ряд Фурье компоненты скорости вектора $\dot{\vec{r}}$:

$$\dot{x}(t) = -2\,a\,\omega_0 \sum_{n=1}^{\infty} J'_n(n\varepsilon)\,\sin(n\,\omega_0\,t) \tag{8}$$

и

$$\dot{y}(t) = 2\,a\,\omega_0\,\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} J_n(n\varepsilon)\,\cos(n\,\omega_0\,t)\,. \tag{9}$$

Сложив равенства Парсеваля-Стеклова для разложений (8) и (9), получим очередное тождество для функций Бесселя:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [J'_n(n\varepsilon)]^2 + \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\,J_n^2(n\varepsilon) \right\} = \frac{1}{2}\,. \tag{10}$$

Наконец, почленное дифференцирование формул (8) и (9) по времени даёт ряды Фурье для компонент ускорения вектора $\ddot{\vec{r}}$:

$$\ddot{x}(t) = -2\,a\,\omega_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} n\,J'_n(n\varepsilon)\,\cos(n\,\omega_0\,t) \tag{11}$$

и

$$\ddot{y}(t) = -2\,a\,\omega_0^2\,\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} n\,J_n(n\varepsilon)\,\sin(n\,\omega_0\,t)\,. \tag{12}$$

Аналогично выкладкам при выводе формулы (10), находим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n^2\,[J'_n(n\varepsilon)]^2 + \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\,n^2\,J_n^2(n\varepsilon) \right\} = \frac{1}{4}\,\frac{2+\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}}\,. \tag{13}$$

При определении правой части формулы (13) используется непосредственно уравнение движения (1), а получающийся интеграл вычисляется с помощью теории вычетов.

Таким образом, получены новые тождества (6), (7), (10) и (13) для функций Бесселя. Хотя они выводились в предположении, что $0 \leq \varepsilon < 1$, но на самом деле эти тождества в силу чётности их правых и левых частей справедливы при $|\varepsilon| < 1$.

Продолжая дифференцировать ряды (11) и (12) по времени, можно получать всё новые и новые тождества рассмотренного типа с функциями Бесселя и их первой производной, только при этом громоздкость вывода искомых соотношений будет нарастать с увеличением порядка производных. Однако важно не только установить явный вид этих новых тождеств, но и понять, почему в этих соотношениях появляются функции Бесселя, так как этим соотношениям можно придать ясный физический смысл. Например, тождество (10) связано со средней за период движения T кинетической энергией системы (1), а в случае наличия у рассматриваемых масс электрических зарядов противоположного знака тождество (13) определяет среднюю за период интенсивность излучения этой системой электромагнитных волн в дипольном приближении [5].

Казалось бы, генезис функций Бесселя в тождествах (6), (7), (10) и (13) очевиден: матричные элементы неприводимых представлений группы движений евклидовой плоскости пропорциональны функциям Бесселя [6]. Но при более внимательном рассмотрении такое объяснение нельзя признать удовлетворительным, потому что благодаря сохранению момента импульса $\vec{M}$ в центральном поле, то есть поле, инвариантном относительно действия группы $SO(3)$, любое движение двух частиц с потенциальной энергией их взаимодействия, зависящей лишь от расстояния между ними, происходит в плоскости [3], причём подгруппе трансляций этой плоскости соответствует равномерное и прямолинейное движение центра инерции такой системы [3].

С другой стороны, в квантовой механике показывается [7], что коэффициенты разложения квантовомеханических средних значений наблюдаемых в рядах Фурье по времени, то есть коэффициенты в формулах (4), (5), (8), (9), (11) и (12) являются матричными элементами этих величин, вычисленными с помощью квазиклассических волновых функций. Из этого следует, что рассматриваемые нами тождества (6), (7), (10) и (13) являются некими правилами сумм для этих матричных элементов. Более того, в работе [8] для квантовомеханической кеплеровой задачи вводятся бесселевы когерентные состояния и процедура редукции от бесселевых к гипергеометрическим состояниям. Сама же возможность разложения наблюдаемых в ряды Фурье, то есть использования структуры группы $SO(2)$ [6], для классического случая обусловлена замкнутостью траекторий движения (2). В свою очередь замкнутость траекторий движения является следствием скрытой симметрии задачи Кеплера, а именно, симметрии группы $SO(4)$, наличие которой было впервые доказано в статье [9] именно с точки зрения квантовой механики.

Литература

1. Алексеева Е.С., Рассадин А.Э. Применение равенства Парсеваля к периодическим решениям дифференциальных уравнений // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2018. Вып. 20. С. 57-66.

2. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Продолжение курса. М.: Изд-во МГУ, 1987. 358 с.

3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1988. 216 с.

4. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Часть I. М.: ИЛ, 1949. 799 с.

5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1988. 512 с.

6. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965. 588 с.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Наука, 1989. 768 с.
8. Карасев М.В., Новикова Е.М. Представление точных и квазиклассических собственных функций через когерентные состояния. Атом водорода в магнитном поле // Теоретическая и математическая физика. 1996. Т. 108, № 3. С. 339-387.
9. Фок В.А. Атом водорода и не-евклидова геометрия // Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение математических и естественных наук. 1935. № 2. С. 169-188.

MSC2010 70F05; 22E70; 33C10

The Kepler problem and new identities for Bessel functions

E.S. Alekseeva[1], A.E. Rassadin[1]

Laboratory of infinite-dimensional analysis and mathematical physics, faculty of mechanics and mathematics, Lomonosov Moscow State University[1]