ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

МАТЕРИАЛЫ
XIV МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

Саранск
2019

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М.В. КЕЛДЫША РАН

СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

МАТЕРИАЛЫ
XIV МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

Саранск
9 – 12 июля 2019 г.

Саранск
2019

УДК 510:004.5
ББК В1
Д503

Д503 Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании [Электронный ресурс]: Материалы XIV Международной научной конференции (Саранск, 9-12 июля 2019 г.) / редкол.: В.Ф. Тишкин (отв. ред.) [и др.]. – Саранск: СВМО, 2019. – 176 с. Режим доступа: http://conf.svmo.ru/files/2019/ProceedingsSaransk2019.pdf, свободный. – Загл. с экрана. – Дата обращения – 14.07.2019

ISBN 978-5-901661-47-5

Настоящее издание содержит материалы докладов участников XIV Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании», проходившей в Национальном исследовательском Мордовском государственном университете им. Н. П. Огарева с 9-12 июля 2019 г.

Представляет интерес для научных работников, студентов и аспирантов.

УДК 510:004.5
ББК В1
Д503

Публикуется на основании Устава Межрегиональной общественной организации «Средне-Волжское математическое общество» (п. 2.2) и по решению редакционно-издательского отдела СВМО.

ISBN 978-5-901661-47-5

Предисловие

Настоящее издание содержит материалы докладов XIV Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании», которая была проведена с 9 по 12 июля 2019 г. в г. Саранск (Россия). Организаторами конференции традиционно выступили Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН и Средне-Волжское математическое общество.

Научные конференции по дифференциальным уравнениям и их приложениям в математическом моделировании в Мордовском государственном университете им. Н.П. Огарёва проводятся регулярно с 1994 года. Основателем и идейным вдохновителем научных конференций и школ-семинаров являлся талантливый ученый и организатор д.ф.-м.н. профессор Е.В. Воскресенский. Он руководил этими мероприятиями до 2008 года. С 2009 года председателем конференций является член-корреспондент РАН, д.ф.-м.н. профессор В.Ф. Тишкин (зав. отделом Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва, профессор кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВПО «МГУ им. Н.П. Огарёва», г. Саранск).

Работа конференции проводилась по секциям:

1. Численные методы решения дифференциальных уравнений и вычислительная физика.
2. Качественные и асимптотические методы дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.
3. Дифференциальные уравнения и их приложения в физических, химических, биологических, экономических и других процессах.
4. Уравнения в частных производных и их приложения в математическом моделировании.

Все доклады, представленные на конференции, были предварительно прорецензированы Программным комитетом.

Организаторы благодарны всем участникам конференции за интересные доклады и плодотворную дискуссию.

Мероприятие проводилось при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Проект № 19-01-20008, и частичной поддержке Минобрнауки России (базовая часть государственного задания 1.6958.2017/8.9).

Программный и организационный комитеты XIV Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании» Саранск, 9 – 12 июля 2019 года

Председатель организационного комитета:
С. М. Вдовин, ректор МГУ им. Н. П. Огарёва (г. Саранск).

Заместитель председателя организационного комитета и председатель программного комитета:
В. Ф. Тишкин, член-корреспондент РАН, профессор, д. ф.-м. н., заведующий отделом ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (г. Москва).

Ученый секретарь:
П. А. Шаманаев, доцент, к. ф.-м. н., доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики МГУ им. Н. П. Огарёва (г. Саранск).

Программный комитет:

зам. председателя программного комитета д.т.н., профессор	П.В. Сенин,	г. Саранск,	Россия,
академик РАН	Е.И. Моисеев,	г. Москва,	Россия,
д.ф.-м.н., профессор	А.С. Андреев,	г. Ульяновск,	Россия,
д.ф.-м.н., профессор	И.В. Бойков,	г. Пенза,	Россия,
д.ф.-м.н., профессор	П.А. Вельмисов,	г. Ульяновск,	Россия,
д.ф.-м.н., профессор	В.К. Горбунов,	г. Ульяновск,	Россия,
д.ф.-м.н., профессор	В.З. Гринес,	г. Н. Новгород,	Россия,
д.ф.-м.н., профессор	Ю.Н. Дерюгин,	г. Саров,	Россия,
д.ф.-м.н., профессор	А.П. Жабко,	г. С.-Петербург,	Россия,
д.ф.-м.н., профессор	А.М. Камачкин,	г. С.-Петербург,	Россия,
д.ф.-м.н., профессор	Е.Б. Кузнецов,	г. Москва,	Россия,
д.ф.-м.н., профессор	С.И. Мартынов,	г. Ханты-Мансийск,	Россия,
д.ф.-м.н., профессор	Н.Д. Морозкин,	г. Уфа,	Россия,
д.ф.-м.н., профессор	О.В. Починка,	г. Н. Новгород,	Россия,
д.ф.-м.н., профессор	И.П. Рязанцева,	г. Н. Новгород,	Россия,
д.ф.-м.н., профессор	С.И. Спивак,	г. Уфа,	Россия,
д.ф.-м.н., профессор	М.Т. Терехин,	г. Рязань,	Россия,
академик АН Р. Узбекистан, д.ф.-м.н., профессор	Ш.А. Алимов,	Kuala Lumpur,	Malaysia,
д.ф.-м.н., профессор	Л.И. Каранджулов,	г. София,	Болгария,
д.ф.-м.н., профессор,	П.П. Матус,	г. Люблин,	Польша,
академик АН Респ. Узбекистан, д.ф.-м.н., профессор	М.С. Салахитдинов,	г. Ташкент,	Узбекистан,
PhD in Mathematics,	К.С. Проданова,	г. София,	Болгария,
Dr. rer. nat., HDR	K. Pankrashkin,	Orsay,	France,
к.ф.-м.н., профессор	Д. В. Тураев,	London,	United Kingdom,
д.ф.-м.н., профессор	А.А. Глуцюк,	Lion,	France.

Организационный комитет:

к.ф.-м.н., доцент	И.И. Чучаев,	г. Саранск,
к.ф.-м.н., доцент	Л.А. Сухарев,	г. Саранск,
к.ф.-м.н., доцент	Р.В. Жалнин,	г. Саранск,
к.ф.-м.н., доцент	Т.Ф. Мамедова,	г. Саранск,
к.ф.-м.н., доцент	С.М. Мурюмин,	г. Саранск,
к.ф.-м.н., доцент	А.Ю. Павлов,	г. Саранск,
к.ф.-м.н., доцент	Д.К. Егорова,	г. Саранск,
к.ф.-м.н., доцент	А.Н. Тында,	г. Пенза,
к.ф.-м.н., доцент	Е.В. Десяев,	г. Саранск,
к.ф.-м.н., доцент	А.О. Сыромясов,	г. Саранск,
к.ф.-м.н., доцент	Т.Е. Бадокина,	г. Саранск,
к.ф.-м.н, с.н.с.	М.Н. Вишнякова,	г. Саров,
к.ф.-м.н., с.н.с.	В.Ф. Масягин,	г. Саранск,
к.ф.-м.н., м.н.с.	Е.Е. Пескова,	г. Саранск,
ст. преподаватель	О.С. Язовцева,	г. Саранск,
аспирант	А.В. Бикеев,	г. Саранск,
аспирант	Д.В. Галкин,	г. Саранск,
аспирант	С.Х. Зинина,	г. Саранск,
аспирант	Д.И. Рожаев,	г. Саранск,
аспирант	Д.С. Сидоренко,	г. Саранск,
аспирант	М.С. Челышов,	г. Саранск.

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

КРАТКИЕ СТАТЬИ

CONTENTS

ABSTRACTS

SHORT PAPERS

УДК 517.933; 517.521; 517.584

Задача Кеплера и новые тождества для функций Бесселя*

Алексеева Е.С.[1], Рассадин А.Э.[1]

Лаборатория бесконечномерного анализа и математической физики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова[1]

Кеплерова задача занимает в современной физике особое положение благодаря её значимости при описании базовых процессов как в макро-, так и в микромире. В представленном докладе с помощью предложенного в статье [1] системного подхода к применению равенства Парсеваля-Стеклова [2], выведена серия соотношений для цилиндрических функций первого рода натурального порядка.

Хорошо известно, что в рамках классической механики задача Кеплера сводится к решению следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений [3]:

$$m\,\ddot{\vec{r}} = -\frac{\alpha\,\vec{r}}{r^3}\,, \qquad \vec{r} \in R^3\,, \tag{1}$$

где $\alpha > 0$ — коэффициент гравитационного или кулоновского притяжения частиц с массами m_1 и m_2, $\vec{r}$ — вектор взаимного расстояния этих частиц, $m = \dfrac{m_1\,m_2}{m_1 + m_2}$ — их приведённая масса, а точка означает дифференцирование по времени.

В силу сохранения в системе (1) момента импульса $\vec{M} = m\,[\vec{r}, \dot{\vec{r}}]$ временная эволюция вектора $\vec{r} = (x, y, z)$ происходит в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{M}$, причём, если выбрать в качестве этой плоскости плоскость $z = 0$, то в ней параметрические уравнения траектории финитного движения вектора $\vec{r}$ имеют вид [3]:

$$x = a\,(\cos\xi - \varepsilon)\,, \qquad y = a\,\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\sin\xi\,, \qquad \xi \in [0, 2\,\pi]\,. \tag{2}$$

Уравнения (2) определяют эллипс с большой полуосью a и эксцентриситетом ε ($0 \le \varepsilon < 1$), а параметр ξ иногда называют эксцентрической аномалией [4]. Зависимости же компонент $x(t)$ и $y(t)$ вектора $\vec{r}$ от времени t задаются неявно с помощью соотношения [3]:

$$\omega_0\,t = \xi - \varepsilon\,\sin\xi\,, \qquad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{\alpha}{m\,a^3}}\,, \tag{3}$$

где частота ω_0 выражается через период T движения по эллипсу (2) следующим образом: $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$.

В книгах [4, 5] приведён вывод разложений в ряд Фурье для функций $x(t)$ и $y(t)$:

$$x(t) = -\frac{3}{2}\,a\,\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,a}{n}\,J_n'(n\varepsilon)\,\cos(n\,\omega_0\,t) \tag{4}$$

и

$$y(t) = 2\,a\,\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(n\varepsilon)}{n\varepsilon}\,\sin(n\,\omega_0\,t)\,, \tag{5}$$

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-08-01356-а.

где $J_n(w)$ и $J'_n(w)$ — функция Бесселя $n-$го порядка и её производная соответственно.

Составив по разложению (4) равенство Парсеваля-Стеклова [2], получим тождество:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,[J'_n(n\varepsilon)]^2 = \frac{2-\varepsilon^2}{8} \tag{6}$$

и аналогично находим по разложению (5) другое тождество с функциями Бесселя:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n^2(n\varepsilon)}{n^2} = \frac{\varepsilon^2}{4} \tag{7}$$

(при вычислении интегралов по времени t от квадратов функций (2) надо заменить переменную интегрирования на ξ согласно формуле (3)).

Отметим, что формула (7) встречалась ранее в работе [1] в качестве результата применения равенства Парсеваля-Стеклова к точному решению следующей задачи Коши для уравнения Римана:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0\,, \qquad v(x,0) = \sin x\,.$$

Далее, дифференцируя почленно по времени суммы (4) и (5), разложим в ряд Фурье компоненты скорости вектора $\dot{\vec{r}}$:

$$\dot{x}(t) = -2\,a\,\omega_0 \sum_{n=1}^{\infty} J'_n(n\varepsilon)\,\sin(n\,\omega_0\,t) \tag{8}$$

и

$$\dot{y}(t) = 2\,a\,\omega_0\,\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\,\sum_{n=1}^{\infty} J_n(n\varepsilon)\,\cos(n\,\omega_0\,t)\,. \tag{9}$$

Сложив равенства Парсеваля-Стеклова для разложений (8) и (9), получим очередное тождество для функций Бесселя:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{[J'_n(n\varepsilon)]^2 + \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\,J_n^2(n\varepsilon)\right\} = \frac{1}{2}\,. \tag{10}$$

Наконец, почленное дифференцирование формул (8) и (9) по времени даёт ряды Фурье для компонент ускорения вектора $\ddot{\vec{r}}$:

$$\ddot{x}(t) = -2\,a\,\omega_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} n\,J'_n(n\varepsilon)\,\cos(n\,\omega_0\,t) \tag{11}$$

и

$$\ddot{y}(t) = -2\,a\,\omega_0^2\,\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\,\sum_{n=1}^{\infty} n\,J_n(n\varepsilon)\,\sin(n\,\omega_0\,t)\,. \tag{12}$$

Аналогично выкладкам при выводе формулы (10), находим:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n^2\,[J'_n(n\varepsilon)]^2 + \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\,n^2\,J_n^2(n\varepsilon)\right\} = \frac{1}{4}\,\frac{2+\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}}\,. \tag{13}$$

При определении правой части формулы (13) используется непосредственно уравнение движения (1), а получающийся интеграл вычисляется с помощью теории вычетов.

Таким образом, получены новые тождества (6), (7), (10) и (13) для функций Бесселя. Хотя они выводились в предположении, что $0 \leq \varepsilon < 1$, но на самом деле эти тождества в силу чётности их правых и левых частей справедливы при $|\varepsilon| < 1$.

Продолжая дифференцировать ряды (11) и (12) по времени, можно получать всё новые и новые тождества рассмотренного типа с функциями Бесселя и их первой производной, только при этом громоздкость вывода искомых соотношений будет нарастать с увеличением порядка производных. Однако важно не только установить явный вид этих новых тождеств, но и понять, почему в этих соотношениях появляются функции Бесселя, так как этим соотношениям можно придать ясный физический смысл. Например, тождество (10) связано со средней за период движения T кинетической энергией системы (1), а в случае наличия у рассматриваемых масс электрических зарядов противоположного знака тождество (13) определяет среднюю за период интенсивность излучения этой системой электромагнитных волн в дипольном приближении [5].

Казалось бы, генезис функций Бесселя в тождествах (6), (7), (10) и (13) очевиден: матричные элементы неприводимых представлений группы движений евклидовой плоскости пропорциональны функциям Бесселя [6]. Но при более внимательном рассмотрении такое объяснение нельзя признать удовлетворительным, потому что благодаря сохранению момента импульса $\vec{M}$ в центральном поле, то есть поле, инвариантном относительно действия группы $SO(3)$, любое движение двух частиц с потенциальной энергией их взаимодействия, зависящей лишь от расстояния между ними, происходит в плоскости [3], причём подгруппе трансляций этой плоскости соответствует равномерное и прямолинейное движение центра инерции такой системы [3].

С другой стороны, в квантовой механике показывается [7], что коэффициенты разложения квантовомеханических средних значений наблюдаемых в рядах Фурье по времени, то есть коэффициенты в формулах (4), (5), (8), (9), (11) и (12) являются матричными элементами этих величин, вычисленными с помощью квазиклассических волновых функций. Из этого следует, что рассматриваемые нами тождества (6), (7), (10) и (13) являются некими правилами сумм для этих матричных элементов. Более того, в работе [8] для квантовомеханической кеплеровой задачи вводятся бесселевы когерентные состояния и процедура редукции от бесселевых к гипергеометрическим состояниям. Сама же возможность разложения наблюдаемых в ряды Фурье, то есть использования структуры группы $SO(2)$ [6], для классического случая обусловлена замкнутостью траекторий движения (2). В свою очередь замкнутость траекторий движения является следствием скрытой симметрии задачи Кеплера, а именно, симметрии группы $SO(4)$, наличие которой было впервые доказано в статье [9] именно с точки зрения квантовой механики.

Литература

1. Алексеева Е.С., Рассадин А.Э. Применение равенства Парсеваля к периодическим решениям дифференциальных уравнений // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2018. Вып. 20. С. 57-66.

2. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Продолжение курса. М.: Изд-во МГУ, 1987. 358 с.

3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1988. 216 с.

4. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Часть I. М.: ИЛ, 1949. 799 с.

5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1988. 512 с.

6. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965. 588 с.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Наука, 1989. 768 с.
8. Карасев М.В., Новикова Е.М. Представление точных и квазиклассических собственных функций через когерентные состояния. Атом водорода в магнитном поле // Теоретическая и математическая физика. 1996. Т. 108, № 3. С. 339-387.
9. Фок В.А. Атом водорода и не-евклидова геометрия // Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение математических и естественных наук. 1935. № 2. С. 169-188.

MSC2010 70F05; 22E70; 33C10

The Kepler problem and new identities for Bessel functions

E.S. Alekseeva[1], A.E. Rassadin[1]

Laboratory of infinite-dimensional analysis and mathematical physics, faculty of mechanics and mathematics, Lomonosov Moscow State University[1]

УДК 533.9, 519.242

Интерпретация результатов планирования экспериментов

Ахмадуллин Р.Н.[1], Галимова Р.К.[1], Якупов З.Я.[1]

Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева-КАИ[1]

Изучение процессов модификации веществ (твердых металлических или неметаллических поверхностей, жидкостей) с применением электрического разряда в паровоздушной среде тесно связано с необходимостью математико-технического обобщения результатов исследований [1-4]. Применение электрического разряда в паровоздушной среде для обработки различных веществ предполагает учет большого количества факторов влияния (электрических характеристик питающей сети, параметров технологических сред, непрерывного их изменения) [5,6]. Правильная интерпретация результатов планирования эксперимента возможна только при понимании сущности изучаемой нами электротехнологии в совокупности с практическим опытом, предвидением экспериментаторов и применением математических знаний [3-5].

Литература

1. Якупов З.Я. Ляпуновские преобразования // Управляемые динамические системы: Межвуз. сб. науч. тр./ Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 1991. С. 175-178.

2. Иутин Р.В., Якупов З.Я., Галимова Р.К. Трехфакторная модель процесса уменьшения шероховатости металлических поверхностей // Материалы VIII Международной научной молодежной школы-семинара «Математическое моделирование, численные методы и комплексы». 16 – 20 июля 2018 г. С. 61-64. Режим доступа: http://conf.svmo.ru/files/2018/ThesesSaransk2018.pdf

3. Якупов З.Я., Галимова Р.К. Метод наименьших квадратов и наименьших модулей в инженерно-технических расчетах: учебное пособие. Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017. 140 с.

4. Павлова А.А., Иутин Р.В., Якупов З.Я. Усреднение показателя шероховатости поверхности за время обработки детали методом наименьших квадратов // VIII Междунар. науч. молодежная школа-семинар «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» им. Е.В. Воскресенского (Саранск, 16 – 20 июля 2018 г.): материалы докладов. С. 78-81. Режим доступа: http://conf.svmo.ru/files/2018/ThesesSaransk2018.pdf

5. Галимова Р.К., Якупов З.Я. Исследование решений уравнения Лапласа в технологических процессах с использованием парогазовых разрядов с жидкостными электродами // Журнал Средневолжского математического общества. 2015. Т. 17, № 1. С. 135-139.

6. Павлова А.А., Галимова Р.К., Якупов З.Я. Разработка технологии получения золей для производства нанопокрытий в авиации. Фонд содействия инновациям «УМНИК-АЭРОНЕТ 2018». https://umnik.fasie.ru/aeronet.

MSC2010 78A25

Interpretation of experimental design results

R.N. Ahmadullin[1], R.K. Galimova[1], Z.Ya. Yakupov[1]
Kazan National Research Technical University after A.N.Tupolev-KAI[1]

УДК 519.63

К приближённому решению обратных коэффициентных задач для уравнения теплопроводности

Бойков И.В.[1], Рязанцев В.А.[1]

Пензенский государственный университет[1]

В работе рассматривается проблема восстановления неизвестных коэффициентов для одного класса уравнений теплопроводности. Для решения указанной проблемы в работе проводится построение итерационного метода, в основе которого лежит непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений, предложенный ранее в работе [1]. Основная идея предлагаемого метода заключается в составлении системы нелинейных параметрических дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов и последующем приближённом решении этой системы одним из известных численных методов. Среди основных достоинств предлагаемого метода следует в первую очередь назвать универсальность, а также простоту, высокую точность и устойчивость к возмущениям исходных данных. Наконец, преимуществом упомянутого метода является то, что его реализация требует дополнительного знания решения исходного параболического уравнения не более чем в конечном множестве точек. Решение модельных примеров иллюстрирует эффективность предложенных методов.

Рассмотрим следующую задачу Коши для двухмерного параболического дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial u(t,x_1,x_2)}{\partial t} = a\left[\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2)}{\partial x_2^2}\right] + bu(t,x_1,x_2), \tag{1}$$

$$u(0,x_1) = \varphi(x_1,x_2), \tag{2}$$

где $-\infty < x_1 < \infty$, $-\infty < x_2 < \infty$, $0 \leqslant t \leqslant T$, а коэффициент a будем считать положительным. Предположим, что дополнительно известными являются значения решения $u(t^{(1)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$ и $u(t^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$.

В указанных условиях ставится и решается задача об одновременном восстановлении неизвестных коэффициентов a, b уравнения (1).

С целью решения поставленной выше задачи введём в рассмотрение следующую замену неизвестной функции [2]:

$$v(t,x_1,x_2) = u(t,x_1,x_2)e^{bt}. \tag{3}$$

Подстановка формулы (3) в уравнения (1)-(2) приводит к следующей задаче:

$$\frac{\partial v(t,x_1,x_2)}{\partial t} = a\left[\frac{\partial^2 v(t,x_1,x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v(t,x_1,x_2)}{\partial x_2^2}\right], \tag{4}$$

$$v(0,x_1,x_2) = \varphi(x_1,x_2). \tag{5}$$

Общее решение задачи (4)-(5) даётся следующей формулой [2]:

$$v(t,x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi at}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x_1-\xi)^2 + (x_2-\eta)^2}{4at}\right]\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta. \tag{6}$$

Из формул (5)-(6) следует, что общее решение задачи (1)-(2) записывается следующим образом:

$$u(t,x) = \frac{e^{bt}}{4\pi at} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x_1-\xi)^2+(x_2-\eta)^2}{4at}\right] \varphi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta. \qquad (7)$$

Приняв последовательно $(t,x_1,x_2) = (t^{(1)},x_1^{(1)},x_2^{(1)})$ и $(t,x_1,x_2) = (t^{(2)},x_1^{(2)},x_2^{(2)})$, запишем на основании формулы (7) следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{e^{bt^{(1)}}}{4\pi at^{(1)}} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x_1^{(1)}-\xi)^2+(x_2^{(1)}-\eta)^2}{4at^{(1)}}\right] \varphi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta - u(t^{(1)},x_1^{(1)},x_2^{(1)}) = 0, \\ \dfrac{e^{bt^{(2)}}}{4\pi at^{(2)}} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x_1^{(2)}-\xi)^2+(x_2^{(2)}-\eta)^2}{4at^{(2)}}\right] \varphi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta - u(t^{(2)},x_1^{(2)},x_2^{(2)}) = 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Введём в рассмотрение вспомогательные функции $\bar{a}(\sigma)$, $\bar{b}(\sigma)$ $(\sigma \geqslant 0)$, связанные с соответствующими коэффициентами a и b равенствами $\lim\limits_{\sigma\to\infty} \bar{a}(\sigma) = a$, $\lim\limits_{\sigma\to\infty} \bar{b}(\sigma) = b$. Системе (8) ставится в соответствие следующая система интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{a}(\sigma)}{d\sigma} = \dfrac{e^{\bar{b}(\sigma)t^{(1)}}}{4\pi\bar{a}(\sigma)t^{(1)}} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x_1^{(1)}-\xi)^2+(x_2^{(1)}-\eta)^2}{4\bar{a}(\sigma)t^{(1)}}\right] \varphi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta - u(t^{(1)},x_1^{(1)},x_2^{(1)}), \\ \dfrac{d\bar{b}(\sigma)}{d\sigma} = \dfrac{e^{\bar{b}(\sigma)t^{(2)}}}{4\pi\bar{a}(\sigma)t^{(2)}} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x_1^{(2)}-\xi)^2+(x_2^{(2)}-\eta)^2}{4\bar{a}(\sigma)t^{(2)}}\right] \varphi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta - u(t^{(2)},x_1^{(2)},x_2^{(2)}). \end{cases} \qquad (9)$$

Для приближённого решения системы (9) воспользуемся методом Эйлера. Пусть $\Phi > 0$ – фиксированное вещественное число. Обозначим $\theta = \dfrac{\Phi}{L}$, где L – достаточно большое целое положительное число. Система уравнений (9) аппроксимируется следующей разностной схемой:

$$\begin{cases} \bar{a}_{j+1} = \bar{a}_j + \theta \left\{ \dfrac{e^{\bar{b}_j t^{(1)}}}{4\pi\bar{a}_j t^{(1)}} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x_1^{(1)}-\xi)^2+(x_2^{(1)}-\eta)^2}{4\bar{a}_j t^{(1)}}\right] \varphi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta - \right. \\ \qquad\qquad\qquad \left. - u(t^{(1)},x_1^{(1)},x_2^{(1)}) \right\}, \\ \bar{b}_{j+1} = \bar{b}_j + \theta \left\{ \dfrac{e^{\bar{b}_j t^{(2)}}}{4\pi\bar{a}_j t^{(2)}} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x_1^{(2)}-\xi)^2+(x_2^{(2)}-\eta)^2}{4\bar{a}_j t^{(2)}}\right] \varphi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta - \right. \\ \qquad\qquad\qquad \left. - u(t^{(2)},x_1^{(2)},x_2^{(2)}) \right\}. \end{cases} \qquad (10)$$

В формуле (10) используются обозначения $\bar{a}_j = \bar{a}(\sigma_j)$, $\bar{b}_j = \bar{b}(\sigma_j)$, где $\sigma_j = j\theta$, $j = \overline{0, L-1}$.

В качестве результата работы описанного алгоритма фиксируется пара значений $\bar{a}_L$ и $\bar{b}_L$.

Замечание 1. Двойные интегралы в правых частях формул системы (10) вычисляются приближённо по одной из кубатурных формул для приближённого вычисления двойных интегралов.

Замечание 2. В зависимости от конкретной решаемой задачи для обеспечения сходимости вычислительного процесса может потребоваться смена знака перед θ на противоположный в правой части формул системы (10). Это связано с вопросами устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений [1].

Замечание 3. В зависимости от конкретных исходных данных решение рассматриваемой задачи может оказаться не единственным. В этих случаях для того, чтобы зафиксировать нужное решение, требуется дополнительная априорная информация относительно значений искомых коэффициентов a и b. В частности, в качестве такой информации может использоваться соотношение $\psi(a,b) = 0$, где $\psi(a,b)$ – некоторая известная функция.

Пример 1. При помощи вышеописанного метода определим пару коэффициентов a, b в задаче (1)-(2) с начальным условием

$$u_0(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

Кроме того, известными полагаются значения точного решения $u(t, x_1, x_2)$ задачи (1)-(2) в точках $\left(t^{(1)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)$, $\left(t^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right)$.

При решении модельного примера был зафиксирован шаг $\theta = 0.1$. Интеграл (7) аппроксимируется при помощи многомерного аналога формулы трапеций в области $[-A, A]^2$, где $A = 5$, которая при аппроксимации разбивается на $N^2 = 10^4$ квадратов с длиной стороны $h = 0.1$. Число итераций метода во всех численных экспериментах составляет $M = 10^3$.

Точное решение задачи: $a = 1$, $b = 2$ при $u(t, x_1, x_2) = \left(x_1^2 + x_2^2 + 4t\right) e^{2t}$.

Результаты решения задачи приведены в нижеследующей таблице.

Таблица 1

No.	$\left(t^{(1)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)$	$\left(t^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right)$	a_0	b_0	$a_{\text{прибл}}$	$b_{\text{прибл}}$	ε_a	ε_b
1	$(0.1, 0.1, 0.1)$	$(0.2, 0.2, 0.2)$	3	3	1.00001	1.9999	$1.35 \cdot 10^{-5}$	$1.01 \cdot 10^{-4}$
2	$(0.1, 0.1, 0.1)$	$(0.2, 0.2, 0.2)$	0.1	0.1	0.999998	2.00001	$1.588 \cdot 10^{-6}$	$1.1881 \cdot 10^{-5}$
3	$(0.1, 0.1, 0.1)$	$(0.2, 0.2, 0.2)$	5	0.5	1.00004	1.9997	$4.033 \cdot 10^{-5}$	$3.018 \cdot 10^{-4}$
4	$(0.2, 0.3, 0.4)$	$(0.5, 0.1, 0.2)$	10	10	0.999977	2.00009	$2.306 \cdot 10^{-5}$	$8.784 \cdot 10^{-4}$
5	$(0.4, 0.5, 0.1)$	$(0.7, 0.2, 0.3)$	5	5	0.998749	2.0027	$1.251 \cdot 10^{-3}$	$2.7 \cdot 10^{-3}$

Здесь использованы следующие обозначения:

- No. – порядковый номер численного эксперимента;
- a_0, b_0 – начальные приближения к коэффициентам a, b соответственно;
- $a_{\text{прибл}}$, $b_{\text{прибл}}$ – найденные приближённые значения коэффициентов a, b соответственно;
- ε_a, ε_b – погрешность определения коэффициентов a, b соответственно, вычисляемая как модуль разности точного и приближённого значения коэффициента.

Пример 2. При помощи описанного в работе метода решается задача определения коэффициентов a и b в задаче (1)-(2) с начальным условием

$$u_0(x_1, x_2) = \cos(x_1)\cos(2x_2).$$

Кроме того, как и ранее, известными полагаются значения точного решения $u(t, x_1, x_2)$ задачи (1)-(2) в точке $\left(t^{(1)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)$. Наконец, предположим, что известным является соотношение $ab = 3/4$ между коэффициентами a, b.

Для решения поставленной задачи поступим следующим образом. Из соотношения $ab = 3/4$ получаем $b = \dfrac{3/4}{a}$. Подставим это равенство в (7) и запишем его в точке $\left(t^{(1)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)$. Сопоставим полученному в результате уравнению первое дифференциальное уравнение системы (9), в котором положим $\bar{b}(\sigma) = \dfrac{3/4}{\bar{a}(\sigma)}$. Это уравнение решаем приближённо, аппроксимируя его первой разностной формулой (10), в которой берётся $\bar{b}_j = \dfrac{3/4}{\bar{a}_j}$.

В проведённых численных экспериментах был зафиксирован шаг $\theta = 0.1$. Интеграл (7) вычислялся приближённо с помощью многомерного аналога формулы трапеций в квадрате $[-A, A]^2$, где $A = 5$, которая при аппроксимации разбивалась на $N^2 = 10^4$ квадратов с длиной стороны $h = 0.1$. Число итераций метода во всех численных экспериментах составляет $M = 2 \cdot 10^2$.

Точное решение задачи: $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{3}{2}$ при $u(t, x_1, x_2) = \cos(x_1)\cos(2x_2)e^{-t}$.

Результаты решения задачи приведены в нижеследующей таблице.

Таблица 2

No.	$\left(t^{(1)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)$	a_0	$a_{\text{прибл}}$	$b_{\text{прибл}}$	ε_a	ε_b
1	$(0.1, 0.1, 0.1)$	0.1	0.499864	1.50041	$1.36 \cdot 10^{-4}$	$4.076 \cdot 10^{-4}$
2	$(0.1, 0.1, 0.1)$	2	0.500003	1.49999	$2.545 \cdot 10^{-6}$	$7.635 \cdot 10^{-6}$
3	$(0.1, 0.1, 0.1)$	5	0.500063	1.49981	$6.291 \cdot 10^{-5}$	$1.887 \cdot 10^{-4}$
4	$(0.2, 0.2, 0.2)$	5	0.5	1.5	$3.591 \cdot 10^{-8}$	$1.077 \cdot 10^{-7}$
5	$(0.5, 0.4, 0.3)$	5	0.5	1.5	$3.579 \cdot 10^{-10}$	$1.073 \cdot 10^{-9}$
6	$(1.0, 0.0, 0.0)$	5	0.5	1.5	$2.546 \cdot 10^{-7}$	$7.637 \cdot 10^{-7}$

В заключение следует отметить, что аналогичным образом может быть построен метод восстановления коэффициентов одномерного аналога параболического уравнения (1).

Литература

1. Бойков И. В. Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 9. С. 1308-1314.
2. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 576 с.

MSC2010 65M32

On the approximate solution of inverse coefficient problems for the heat equation

I.V. Boikov[1], V.A. Ryazantsev[1]

Penza State University[1]

УДК 517.955.4

Быстро сходящиеся к решению одномерного уравнения теплопроводности черновские аппроксимации*

Веденин А.В.[1]

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»[1]

Доклад посвящён новому методу приближённого решения линейных дифференциальных уравнений эволюционного типа с частными производными и переменными коэффициентами.

Отправной точкой для исследований служат работы И.Д. Ремизова [1–3]. Общий подход к исследованию скорости сходимости черновских аппроксимаций был предложен в [3], там же были сформулированы две гипотезы, при выполнении условий которых следует ожидать более высокую скорость сходимости аппроксимаций к решению уравнения. Главной целью является усиление результатов работы [2] таким образом, чтобы получить аппроксимации, сходящиеся быстрее к решению уравнения, чем аппроксимации, представленные в [2]. В докладе описывается первый шаг на этом пути: построение функции Чернова, удовлетворяющей гипотезе И.Д. Ремизова [3], для частного случая исследуемого уравнения: все коэффициенты постоянные и в правой части уравнения лишь коэффициент при старшей производной отличен от нуля.

В этом случае исследуемое уравнение представляет собой следующее уравнение теплопроводности, в котором a — строго положительная постоянная:

$$\begin{cases} u_t'(t,x) = au_{xx}''(t,x); \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \\ u(0,x) = u_0(x); \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

Для этого уравнения автором доклада были произведены следующие построения. Для каждых $x \in \mathbb{R}, t \geq 0, f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a > 0$ положим

$$(S(t)f)(x) = \frac{2}{3}f\left(x\right) + \frac{1}{6}f\left(x + \sqrt{6at}\right) + \frac{1}{6}f\left(x - \sqrt{6at}\right). \tag{2}$$

Непосредственно проверяется, что $S(t)$ при каждом $t > 0$ является линейным ограниченным оператором, действующим в пространстве ограниченных, равномерно непрерывных функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Более того, S удовлетворяет условиям теоремы Чернова (см. [1]), в силу чего справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Для каждой ограниченной, равномерно непрерывной функции $u_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ при каждом $t \geq 0$ существует ограниченное, равномерно непрерывное по x решение $u(t,x)$ задачи Коши (1), задаваемое при всех $t \geq 0, x \in \mathbb{R}$ формулой*

$$u(t,x) = \lim_{n\to\infty} \left((S(t/n))^n u_0\right)(x),$$

где $S(t/n)$ получается заменой t на t/n в формуле (2), а $S(t/n)^n$ это композиция n копий линейного ограниченного оператора $S(t/n)$.

*Исследование выполнено в Лаборатории топологических методов в динамике НИУ ВШЭ и поддержано проектом ЦФИ в 2019 году.

Кроме того, доказано, что построенная функция Чернова S удовлетворяет условиям гипотезы И.Д. Ремизова [3], поэтому есть основания ожидать, что полученные с её помощью аппроксимации будут сходиться к решению быстрее, чем представленные в [2]. Следующий шаг в проводимом исследовании — построить аналогичную функцию Чернова для случая, когда вместо константы a в уравнении (1) присутствует функция $a(x)$.

Литература

1. Ремизов И. Д. Фейнмановские и квазифейнмановские формулы для эволюционных уравнений // Доклады Академии наук. 2017. Т. 476, № 1. С. 17-21.

2. Remizov I. D. Approximations to the solution of Cauchy problem for a linear evolution equation via the space shift operator (second-order equation example) // Applied Mathematics and Computation. 2018. Vol. 328. P. 243-246.

3. Remizov I. D. On estimation of error in approximations provided by Chernoff 's product formula // International Conference «ShilnikovWorkshop-2018», Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, December 17-18, 2018. Book of abstracts. P. 38-41.

MSC2010 35K15

Fast converging to solution of one-dimensional heat equation Chernoff approximations

A.V. Vedenin[1]

National Research University – Higher School of Economics[1]

УДК 539.3, 532.542

Математическое моделирование динамической устойчивости аэроупругих систем при взаимодействии с вязкой жидкостью *

Вельмисов П.А. [1], Анкилов А.В. [1], Мизхер У.Д. [1]
Ульяновский государственный технический университет[1]

При проектировании и эксплуатации конструкций, приборов, устройств, установок различного назначения, взаимодействующих с жидкостью, важной проблемой является обеспечение надежности их функционирования и увеличение сроков службы. Подобные проблемы присущи многим отраслям техники. В частности, такого рода задачи возникают в машиностроении, авиаракетостроении, приборостроении и т. д. Существенное значение при расчете конструкций, взаимодействующих с жидкостью, имеет исследование устойчивости их деформируемых элементов. Принятые в работе определения устойчивости упругого тела соответствуют концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Проблема может быть сформулирована так: при каких значениях параметров, характеризующих систему «жидкость-тело», малым деформациям тела в начальный момент времени $t = 0$ (т.е. малым начальным отклонениям от положения равновесия) будут соответствовать малые деформации и в любой момент времени $t > 0$.

В работе исследуется устойчивость движения (по Ляпунову) упругой пластины, которая является частью ($x = a, y_0 < y < y_*$) границы L_0, разделяющей две области S_1 и S_2, заполненные вязкой несжимаемой жидкостью. Области S_1, S_2 имеют границы L_1, L_2 и L_0 произвольной формы (рис. 1).

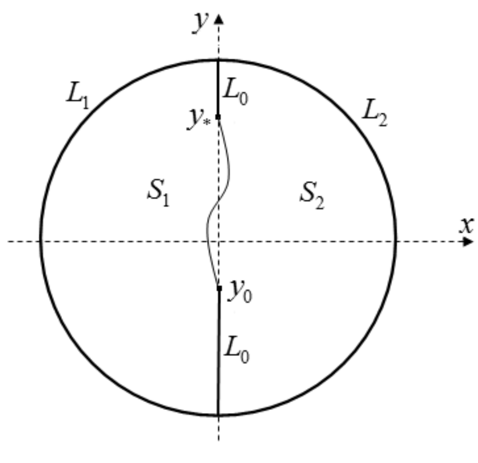

Рис. 1. Пример областей S_1, S_2.

Введем обозначения: $u(y,t)$ и $w(y,t)$, $y \in (y_0, y_*)$ – деформации упругой пластины в

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 18-41-730015.

направлении осей Oy и Ox соответственно;

$$v_1(x,y,t) = \begin{cases} v_{11}(x,y,t),\ (x,y)\in S_1, \\ v_{12}(x,y,t),\ (x,y)\in S_2, \end{cases} \qquad v_2(x,y,t) = \begin{cases} v_{21}(x,y,t),\ (x,y)\in S_1, \\ v_{22}(x,y,t),\ (x,y)\in S_2 \end{cases}$$

– проекции вектора скоростей жидкости; $P(x,y,t) = \begin{cases} P_1(x,y,t),\ (x,y)\in S_1, \\ P_2(x,y,t),\ (x,y)\in S_2 \end{cases}$ – давление в жидкости.

Математическая постановка задачи имеет вид

$$\rho(v_{1t} + v_1v_{1x} + v_2v_{1y}) = \mu(v_{1xx} + v_{1yy}) - P_x,\ \ (x,y)\in S_1\bigcup S_2; \tag{1}$$

$$\rho(v_{2t} + v_1v_{2x} + v_2v_{2y}) = \mu(v_{2xx} + v_{2yy}) - P_y,\ \ (x,y)\in S_1\bigcup S_2; \tag{2}$$

$$v_{1x} + v_{2y} = 0, \quad (x,y)\in S_1\bigcup S_2; \tag{3}$$

$$v_1(L_k) = v_2(L_k) = 0, \quad k = 1,2; \tag{4}$$

$$v_1\left(L_0\backslash(y_0,y_*)\right) = v_2\left(L_0\backslash(y_0,y_*)\right) = 0; \tag{5}$$

$$v_1(a,y,t) = \dot{w}(y,t),\ v_2(a,y,t) = 0, y\in(y_0,y_*); \tag{6}$$

$$\begin{cases} -EF\left(u'(y,t) + \frac{1}{2}w'^2(y,t)\right)' + M\ddot{u}(y,t) = 0, \\ -EF\left[w'(y,t)\left(u'(y,t) + \frac{1}{2}w'^2(y,t)\right)\right]' + Dw''''(y,t) + M\ddot{w}(y,t) + N(t)w''(y,t) + \\ +\beta_2\dot{w}''''(y,t) + \beta_1\dot{w}(y,t) + \beta_0 w(y,t-\tau) = P_1(a,y,t) - P_2(a,y,t),\ \ y\in(y_0,y_*). \end{cases} \tag{7}$$

Индексы x, y, t снизу обозначают частные производные по x, y, t; штрих и точка – частные производные по y и t соответственно; ρ, μ – плотность и коэффициент вязкости жидкости; $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$ – изгибная жесткость пластины; h – толщина пластины; $M = h\rho_p$ – погонная масса пластины; $F = h/(1-\nu^2)$; E, ρ_p – модуль упругости и линейная плотность пластины; ν – коэффициент Пуассона; $N(t)$ – сжимающая ($N > 0$) или растягивающая ($N < 0$) пластину сила; β_1, β_2 – коэффициенты внешнего и внутреннего демпфирования; β_0 – коэффициент жесткости основания (постели); τ – коэффициент запаздывания реакции основания.

Сжимающая (растягивающая) пластину сила $N(t)$ может зависеть от времени. Например, при изменении теплового воздействия на пластину с течением времени $N(t)$ имеет вид:

$$N\left(t\right) = N_0 + \frac{E\alpha_T}{1-\nu}\int\limits_{-h/2}^{h/2} T\left(z,t\right)dz,$$

где α_T – температурный коэффициент линейного расширения, $T(z,t)$ – закон изменения температуры по толщине элемента, N_0 – постоянная составляющая усилия, созданная при закреплении элемента.

Уравнения (1)–(3) описывают движение жидкости в областях S_1, S_2, уравнения (7) описывают динамику пластины и, в отличие от проведенных ранее исследований [1], учитывают запаздывание реакции основания элемента; условия (4)–(6) – условия прилипания вязкой жидкости.

Граничные условия на концах пластины при $y = y_0$ и $y = y_*$ могут иметь вид:

1) жесткое неподвижное защемление:

$$w(y,t) = w'(y,t) = u(y,t) = 0; \tag{8}$$

2) шарнирное неподвижное закрепление:

$$w(y,t) = w''(y,t) = u(y,t) = 0; \tag{9}$$

3) жесткое подвижное защемление:

$$w(y,t) = w'(y,t) = u'(y,t) = 0; \tag{10}$$

4) шарнирное подвижное закрепление:

$$w(y,t) = w''(y,t) = u'(y,t) + \frac{1}{2}w'^2(y,t) = 0. \tag{11}$$

Заметим, что для описания движения жидкости используются нелинейные уравнения Навье-Стокса, а граничные условия (6), так же, как и правая часть уравнения (7), записаны в предположении, что деформации пластины малы. Постановку задачи следует также дополнить начальными условиями

$$w(y,0) = f_1(y), \quad \dot{w}(y,0) = f_2(y), \quad u(y,0) = f_3(y), \quad \dot{u}(y,0) = f_4(y), \tag{12}$$

$$v_1(x,y,0) = f_5(x,y),\ v_2(x,y,0) = f_6(x,y). \tag{13}$$

Введем в рассмотрение функционал

$$J(t)=\frac{\rho}{2}\iint\limits_S V^2(x,y,t)dS+\frac{\beta_0}{2}\int\limits_{y_0}^{y_*}\left(\int\limits_{t-\tau}^{t}dt_1\int\limits_{t_1}^{t}\dot{w}^2(y,s)ds\right)dy+\frac{1}{2}\int\limits_{y_0}^{y_*}\left(EF\left(u'(y,t)+\frac{1}{2}w'^2(y,t)\right)^2+\right.$$

$$\left.+M\left(\dot{u}^2(y,t)+\dot{w}^2(y,t)\right)+Dw''^2(y,t)-N(t)w'^2(y,t)+\beta_0 w^2(y,t)\right)dy, \tag{14}$$

где $S = S_1 \bigcup S_2$.

Интегрируя по частям, согласно граничным условиям (8)–(11) получим равенства

$$-\int\limits_{y_0}^{y_*}\dot{w}\left[w'\left(u'+\frac{1}{2}w'^2\right)\right]'dy-\int\limits_{y_0}^{y_*}\dot{u}\left(u'+\frac{1}{2}w'^2\right)'dy=\int\limits_{y_0}^{y_*}\dot{w}'w'\left(u'+\frac{1}{2}w'^2\right)dy+$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y_*}\dot{u}'\left(u'+\frac{1}{2}w'^2\right)dy=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{y_0}^{y_*}\left(u'+\frac{1}{2}w'^2\right)^2dy\right)_t^{\cdot},\quad \int\limits_{y_0}^{y_*}\dot{w}\ddot{w}dy=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{y_0}^{y_*}\dot{w}^2dy\right)_t^{\cdot},$$

$$\int\limits_{y_0}^{y_*}\dot{u}\ddot{u}dy=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{y_0}^{y_*}\dot{u}^2dy\right)_t^{\cdot},\quad \int\limits_{y_0}^{y_*}\dot{w}w''''dy=\int\limits_{y_0}^{y_*}\dot{w}''w''dy=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{y_0}^{y_*}w''^2dy\right)_t^{\cdot},$$

$$N(t)\int\limits_{y_0}^{y_*}\dot{w}w''dy=-N(t)\int\limits_{y_0}^{y_*}\dot{w}'w'dy=-\frac{1}{2}\left(N(t)\int\limits_{y_0}^{y_*}w'^2dy\right)_t^{\cdot}+\frac{1}{2}\dot{N}(t)\int\limits_{y_0}^{y_*}w'^2dy,$$

$$\int\limits_{y_0}^{y_*} \dot{w}\dot{w}''''dy = \int\limits_{y_0}^{y_*} \dot{w}''^2 dy, \quad w(x,t-\tau) = w(x,t) - \int\limits_{t-\tau}^{t} \dot{w}(x,s)ds,$$

Учитывая эти равенства, неравенство $2\dot{w}(y,t)\dot{w}(y,s) \leq \dot{w}^2(y,t) + \dot{w}^2(y,s)$, уравнения (1)–(3), (7) и применяя формулу Грина, найдем производную от функционала по времени:

$$\frac{\partial J}{\partial t} \leq \oint\limits_{L_1 \cup L_0} \left[-v_{11}\left(P_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2\right) + \mu(v_{11}v_{11x} + v_{21}v_{21x}) \right] dy + \left[v_{21}\left(P_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2\right) - \mu(v_{11}v_{11y} + \right.$$

$$\left. + v_{21}v_{21y}) \right] dx + \oint\limits_{L_2 \cup L_0} \left[-v_{12}\left(P_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2\right) + \mu(v_{12}v_{12x} + v_{22}v_{22x}) \right] dy + \left[v_{22}\left(P_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2\right) - \right.$$

$$\left. -\mu(v_{12}v_{12y} + v_{22}v_{22y}) \right] dx - \mu \iint\limits_{S} \left(v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{2x}^2 + v_{2y}^2\right) dS - \int\limits_{y_0}^{y_*} \left(\beta_2 \dot{w}''^2(y,t) + \right.$$

$$\left. + (\beta_1 - \beta_0\tau)\, \dot{w}^2(y,t) + \frac{1}{2}\dot{N}(t)w'^2(y,t) - (P_1(a,y,t) - P_2(a,y,t))\, \dot{w}(y,t) \right) dy. \tag{15}$$

Учитывая граничные условия (4)–(6) и уравнения (7), из (15) получим

$$\frac{\partial J}{\partial t} \leq -\int\limits_{y_0}^{y_*} \left(\beta_2 \dot{w}''^2(y,t) + (\beta_1 - \beta_0\tau)\, \dot{w}^2(y,t) + \frac{1}{2}\dot{N}(t)w'^2(y,t) \right) dy -$$

$$-\mu \iint\limits_{S} \left(v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{2x}^2 + v_{2y}^2\right) dS.$$

Рассмотрим краевые задачи для уравнений $\psi'''' = -\lambda\psi''$, $\psi'''' = \eta\psi$, $y \in (y_0, y_*)$ с граничными условиями (8)–(11) для функции $w(y,t)$. Эти задачи являются положительно определенными и полностью определенными. Для функции $w(y,t)$, используя неравенство Рэлея [2], получим оценки

$$\int_{y_0}^{y_*} \dot{w}''^2(y,t)dy \geq \eta_1 \int_{y_0}^{y_*} \dot{w}^2(y,t)dy, \tag{16}$$

$$\int\limits_{y_0}^{y_*} w''^2(y,t)dy \geq \lambda_1 \int\limits_{y_0}^{y_*} w'^2(y,t)dy, \quad \int\limits_{y_0}^{y_*} w''^2(y,t)dy \geq \eta_1 \int\limits_{y_0}^{y_*} w^2(y,t)dy, \tag{17}$$

где λ_1, η_1 – наименьшие собственные значения краевых задач.

Используя неравенство (16), получим

$$\frac{\partial J}{\partial t} \leq -\int\limits_{y_0}^{y_*} \left((\beta_2\eta_1 + \beta_1 - \beta_0\tau)\, \dot{w}^2(y,t) + \frac{1}{2}\dot{N}(t)w'^2(y,t) \right) dy -$$

$$-\mu \iint\limits_{S} \left(v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{2x}^2 + v_{2y}^2\right) dS. \tag{18}$$

Пусть выполняются условия

$$\beta_2\eta_1 + \beta_1 - \beta_0\tau \geq 0, \quad \dot{N}(t) > 0, \tag{19}$$

тогда из (18) следует, что $\dfrac{\partial J}{\partial t} \leq 0$. Интегрируя от 0 до t, получим неравенство

$$J(t) \leq J(0). \tag{20}$$

Произведем оценку функционала с учетом граничных условий (8)–(11). Используя первое неравенство (17), получим оценку $J(t)$ снизу:

$$J(t) \geq \frac{1}{2}\iint\limits_{S} \rho V^2 dS + \frac{1}{2}\int\limits_{y_0}^{y_*} \left(M(\dot{u}^2(y,t) + \dot{w}^2(y,t)) + (\lambda_1 D - N(t))w'^2(y,t)\right) dy. \tag{21}$$

Используя неравенство Коши-Буняковского для граничных условий (8)–(11), получим оценку

$$w^2(y,t) \leq (y_* - y_0)\int\limits_{y_0}^{y_*} w'^2(y,t)dy. \tag{22}$$

Пусть выполняется условие

$$N(t) < \lambda_1 D, \tag{23}$$

тогда неравенство (21) примет вид

$$J(t) \geq \frac{1}{2}\iint\limits_{S} \rho\left(v_1^2 + v_2^2\right) dS + \frac{1}{2}\int\limits_{y_0}^{y_*} M(\dot{u}^2(y,t) + \dot{w}^2(y,t))dy + \frac{\lambda_1 D - N(t)}{2(y_* - y_0)} w^2(y,t). \tag{24}$$

Из (20), (24) следует теорема.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (19), (23). Тогда решение $w(y,t)$ задачи (1)–(11) является устойчивым, решение $v_1(x,y,t)$, $v_2(x,y,t)$ и производные $\dot{u}(y,t)$, $\dot{w}(y,t)$ задачи (1)–(11) являются устойчивыми в среднем (в интегральном смысле) по отношению к возмущениям начальных данных (12), (13).*

Литература

1. Velmisov P. A., Ankilov A. V. Dynamic stability of plate interacting with viscous fluid // Cybernetics and physics. 2017. V. 6, № 4. P. 262-270.

2. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 503 с.

MSC2010 74F10

Mathematical modeling of dynamic stability of aeroelastic systems interacting with viscous fluid.

P.A. Velmisov [1], A.V. Ankilov [1], U.D. Mizher [1]

Ulyanovsk state technical university [1]

УДК 517.938.5

О простой дуге, соединяющей обобщенный и классический DA-диффеоморфизмы на трехмерном торе*

Гринес В.З.[1], Круглов Е.В.[2], Починка О.В.[1]

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»[1],
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского[2]

Хирургия Смейла позволяет получить из аносовского автоморфизма трехмерного тора так называемый (классический) *DA-диффеоморфизм*, неблуждающее множество которого состоит из единственного растягивающегося двумерного аттрактора и конечного числа периодических источников. Под обобщенным DA-диффеоморфизмом понимается структурно устойчивый диффеоморфизм трехмерного тора, неблуждающее множество которого содержит двумерный растягивающийся аттрактор. В [2], [3] было установлено, что в неблуждающем множестве такого диффеоморфизма кроме двумерного аттрактора имеется лишь конечное число источниковых и седловых периодических орбит.

В настоящем докладе описывается сценарий перехода через простые бифуркации от обобщенного DA-диффеоморфизма к классическому. Подробный обзор результатов, касающихся диффеоморфизмов, имеющих базисные множества коразмерности один, действующих на n-мерных, $n \geq 2$, замкнутых многообразиях без края, содержится в обзоре [1]. Топологическая классификация структурно устойчивых диффеоморфизмов с ориентируемыми растягивающимися аттракторами коразмерности один на замкнутых n-многообразиях при $n \geq 3$ получена в [2–5]. В частности, в работе [4] доказано, что для исследуемых диффеоморфизмов многообразие M^n гомотопически эквивалентно тору $\mathbb{T}^n$, а в случае $n \neq 4$ многообразие M^n гомеоморфно тору $\mathbb{T}^n$. В работе [6] доказано, что в случае $n = 3$ не существует структурно устойчивых диффеоморфизмов с неориентируемыми растягивающимися аттракторами коразмерности один. Наличие простой дуги, связывающей любой структурно устойчивый диффеоморфизм n-мерного тора, $n \geq 4$, неблуждающее множество которого содержит растягивающийся ориентируемый аттрактор коразмерности один, с классическим DA-диффеоморфизмом анонсировано в работе [7]. В этой же работе отмечается, что в случае, когда размерность несущего многообразия равна трём, препятствием для аналогичного вывода служит возможность наличия одномерных сепаратрис изолированных седловых периодических точек, замыкания которых являются дикими. Однако, в работе [8] доказано, что такая ситуация, на самом деле, невозможна, что позволяет доказать следующий результат.

Теорема 1. *Существует простая гладкая дуга, соединяющая любой обобщенный DA-диффеоморфизм с классическим DA-диффеоморфизмом.*

Литература

1. Гринес В. З., Жужома Е. В., Починка О. В. Грубые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один // Современная математика. Фундаментальные направления. 2015. Т. 57. С. 5–30.

*Доклад подготовлен при частичной финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект 17-11-01041)

2. Гринес В. З., Жужома Е. В. О топологической классификации ориентируемых аттракторов на n-мерном торе // Успехи математических наук. 1979. Т. 35, № 4. С. 185–186.

3. Гринес В. З., Жужома Е. В. О грубых диффеоморфизмах с растягивающимися аттракторами и сжимающимися репеллерами коразмерности один // Доклады РАН. 2000. Т. 374. С. 274–276.

4. Гринес В. З., Жужома Е. В. Структурно устойчивые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один // Известия РАН, серия математическая. 2002. Т. 66, № 2. С. 3–66.

5. V. Grines, E. Zhuzhoma On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors // Trans. Amer. Math. Soc. 2005. V. 357, No. 2. P. 617-667.

6. Жужома Е. В., Медведев В. С. О неориентируемых двумерных бвзисных множествах на 3-многообразиях // Математический сборник. 2002. Т. 193, № 6. С. 83–104.

7. Жужома Е. В., Медведев В. С. О типичной диффеотопии грубого диффеоморфизма с растягивающимися аттракторами коразмерности один // Математические заметки. 2003. Т. 74, № 3. С. 478–480.

8. V. Z. Grines, E. V. Kruglov, T. V. Medvedev, O. V. Pochinka On embedding of arcs and circles in 3-manifolds in an application to dynamics of rough 3-diffeomorhisms with two-dimensional expanding attractor. 2018. http://arxiv.org/pdf/1812.01436.pdf 16 p.

MSC2010 37D20

On the simple arc connecting generalized and classical DA-diffeomorphisms on 3-dimensional torus

V.Z. Grines[1], E.V. Kruglov[2], O.V. Pochinka[1]

National Research University – Higher School of Economics[1], Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod[2]

УДК 517.977.5

Моделирование крупнотоннажных промышленных процессов: риформинга бензина, каталитического крекинга и изомеризации*

Губайдуллин И.М.[1,2], Фасхутдинова Р.И.[1]
ИНК УФИЦ РАН[1],
Уфимский государственный нефтяной технический университет[2]

Товарный бензин, который поступает в автозаправочные станции, формируется компаундированием (смешиванием) продуктов, полученных из разных нефтеперерабатывающих установок. Значительный объём высокооктанового бензина формируют три каталитических процесса: риформинг, изомеризация и крекинг. Главная задача компаундирования – получить высокооктановый бензин с наименьшими затратами. На сегодняшний день все существующие методы оптимального смешивания бензинов с разными показателями октанового числа чисто эмпирические. С каждым годом увеличиваются экологические требования к составу товарного бензина. Например, содержание бензола в товарном бензине не должно превышать одного процента. Естественно, оптимальное смешивание невозможно провести, не решая класс оптимизационных задач для каждого конкретного процесса.

В работе приводятся результаты многокритериальной оптимизации промышленного неизотермического каталитического процесса риформинга бензина с использованием трёхкаскадного реактора. Такая оптимизация проведена на основе разработанной детализированной групповой кинетической модели.

Кинетическая модель построена на основе решения жестких систем обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений (СОНДУ) большой размерности (от 30 до 300). При разработке кинетической модели учитывалось применение адиабатических реакторов для проведения реакций с сильным эндотермическим эффектом (перепад может достигать до 80°C в реакторе). Таким образом, полное математическое описание включает в себя 38 уравнений по концентрациям реагирующих веществ и одно уравнение изменения температуры смеси в зависимости от времени контакта [1]. Для учета изменения количества молей в результате реакции были пересмотрены размерности основных величин. В уравнениях концентрация, выраженная в массовых долях, заменена на мольный расход компонента [кмоль/ч]. Мольный расход реакционной смеси формируется из мольных расходов компонентов. Тогда дифференциальное уравнение, учитывающее изменение количества молей реакционной смеси, имеет вид:

$$\frac{dF}{d\tau} = \sum_{i=1}^{I} \frac{dx_i}{d\tau},$$

где x_i – мольный расход i-го компонента, (кмоль/ч), участвующего в реакции, I – количество компонент (38), τ – условное время контакта (кг/кат.), F – мольный расход потока (кмоль/ч). Данное дифференциальное уравнение описывает изменение мольного расхода смеси. В качестве концентраций используются мольные доли, которые представлены отношением мольного расхода компонента к мольному расходу смеси, являющейся мольной долей, благодаря чему система учитывает разбавление или концентрирование всех компонент в каждый момент времени.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ № 18-07-00341.

Таким образом, ранее разработанную группированную кинетическую модель каталитического риформинга бензина [1] предлагается дополнить учетом изменения объёма реакционной смеси химических превращений. Сравнение рассчитанных концентраций групповых компонент реакции каталитического риформинга бензина и полного температурного профиля процесса не превышает 3%.

Аналогичным образом планируется разработать групповые кинетические модели процессов изомеризации и каталитического крекинга. Рассчитанные скорости вышеперечисленных процессов будут использоваться при разработке трёхфазных математических моделей физико-химических процессов на зерне и в слое катализатора, математическое описание которых представляет собой системы уравнений в частных производных параболического, эллиптического и гиперболического типов.

Литература

1. Zainullin R.Z., Koledina K.F., Akhmetov A.F., Gubaidullin I.M. // Kinetics and Catalysis. 2017. Vol. 58, No. 3. P. 279–289.

MSC2010 35F61

Modelling of large-scale industrial processes: gasoline reforming, catalytic cracking and isomerization

I.M. Gubaydullin[1,2], R.I. Faskhutdinova[1]

Institute of Petrochemistry and Catalysis of the Russian Academy of Science[1],
Ufa State Petroleum Technological University[2]

УДК 517.9

Условия нелокальной разрешимости одной системы двух квазилинейных уравнений первого порядка со свободными членами*

Донцова М.В.[1]

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского[1]

Рассмотрим систему вида:

$$\begin{cases} \partial_t u\,(t,x) + S_1(u,v)\partial_x u\,(t,x) = f_1(t,x), \\ \partial_t v(t,x) + S_2(u,v)\partial_x v(t,x) = f_2(t,x), \end{cases} \tag{1}$$

где $u(t,x)$, $v(t,x)$ – неизвестные функции, $f_1(t,x)$, $f_2(t,x)$, $S_1(u,v)$, $S_2(u,v)$ – известные функции. Поставим для системы уравнений (1) задачу Коши, т. е. зададим начальные условия:

$$u(0,x) = \varphi_1(x),\ v(0,x) = \varphi_2(x). \tag{2}$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ – известные функции.

Задача (1), (2) определена на

$$\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T, x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}.$$

С помощью метода дополнительного аргумента проводится исследование разрешимости задачи Коши (1), (2) на множестве Ω_T, где $f_1(t,x)$, $f_2(t,x)$, $S_1(u,v)$, $S_2(u,v)$ – известные функции. С помощью метода дополнительного аргумента и преобразований получена система интегральных уравнений [1–4]:

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(x - \int_0^t S_1(w_1,w_3)d\nu) + \int_0^s f_1(\nu, x - \int_\nu^t S_1(w_1,w_3)d\tau)d\nu, \tag{3}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(x - \int_0^t S_2(w_4,w_2)d\nu) + \int_0^s f_2(\nu, x - \int_\nu^t S_2(w_4,w_2)d\tau)d\nu, \tag{4}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,x - \int_s^t S_1(w_1,w_3)d\nu), \tag{5}$$

$$w_4(s,t,x) = w_1(s,s,x - \int_s^t S_2(w_4,w_2)d\nu). \tag{6}$$

Обозначим $\bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$ — пространство функций, один раз дифференцируемых по переменной t, дважды дифференцируемых по переменной x, имеющих смешанные производные второго порядка и ограниченные вместе со своими производными на Ω_T, $\bar{C}^{\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n}(\Omega_*)$ — пространство функций, определенных, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными до порядка α_m по m-му аргументу, $m=\overline{1,n}$ на неограниченном подмножестве $\Omega_* \subset R^n, n = 1,2...$,

$$C_\varphi = \max\{\sup_R \left|\varphi_i^{(l)}\right| |i=1,2, l=\overline{0,2}\},\ C_f = \max\{\sup_{\Omega_T}|f_i|, \sup_{\Omega_T}|\partial_x f_i|, i=1,2\},$$

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00125 мол_а.

$$Z_K = \{(u,v)\,|u,v \in [-K,K]\}\,,\ \text{где } K - \text{положительное число.}$$

Общим итогом исследования является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi_i \in \bar{C}^2(R), i = 1,2,\ f_1, f_2 \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T),\ \ S_1, S_2 \in \bar{C}^{2,2}(Z_K),\ \ K = C_\varphi + TC_f$ *и выполняются условия:*

$$\partial_u S_1 < 0,\ \partial_v S_1 > 0,\ \partial_u S_2 < 0,\ \partial_v S_2 > 0 \text{ на } Z_K,$$

$$\varphi_1'(x) \leq 0,\ \varphi_2'(x) \geq 0 \text{ на } R,\ \ \partial_x f_1 \leq 0,\ \partial_x f_2 \geq 0 \text{ на } \Omega_T.$$

Тогда для любого $T > 0$ *задача Коши (1), (2) имеет единственное решение*

$$u(t,x), v(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T),$$

которое определяется из системы интегральных уравнений (3)–(6).

В теореме 1 сформулированы условия нелокальной разрешимости задачи Коши (1), (2), где $u(t,x) = w_1(t,t,x),\ v(t,x) = w_2(t,t,x)$.

Литература

1. Донцова М. В. Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с правыми частями специального вида // Уфимский математический журнал. 2014. Т. 6, № 4. С. 71–82.

2. Донцова М. В. Условия нелокальной разрешимости системы со свободными членами для случая положительных коэффициентов // Журнал Средневолжского математического общества. 2017. Т. 19, № 4. С. 23–32.

3. Донцова М. В. Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными правыми частями // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2014. № 4. С. 116–130.

4. Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н. К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Доклады РАН. 2001. Т. 379, № 1. С. 16–21.

MSC2010 35F50; 35F55; 35A01; 35A02; 35A05

The nonlocal solvability conditions for one system of two quasilinear equations of the first order with constant terms

M.V. Dontsova[1]

Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod[1]

УДК 519.63

Применение разрывного метода Галёркина для моделирования двумерных течений многокомпонентной смеси идеальных газов на адаптивных локально измельчающихся сетках*

Жалнин Р.В.[1], Масягин В.Ф.[1], Пескова Е.Е.[1], Тишкин В.Ф.[2]

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет[1],
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН[2]

Моделирование течений многокомпонентной смеси газов является важной задачей для многих областей современной науки и техники. К таким областям относятся авиационная промышленность, химическая технология, нефтегазовая промышленность и многие другие. В настоящее время к точности получаемого численного решения и времени расчета предъявляются высокие требования. Перспективными подходами к решению поставленных задач является использование численных методов высокого порядка точности, применение технологий параллельного программирования и использование локальной адаптации расчетной сетки.

На сегодняшний день одним из наиболее перспективных методов высокого порядка точности является метод Галёркина с разрывными базисными функциями. Данный метод активно развивается в работах как отечественных [1–4], так и зарубежных [5, 6] авторов. Он обладает рядом замечательных свойств, которые обуславливают интерес к нему среди исследователей. К таким свойствам следует отнести локальный характер уравнений, возможность работы с сетками различной структуры, хорошая адаптация к граничным условиям различного типа, компактный шаблон и др.

Активно ведутся работы по развитию библиотек для динамической локальной адаптации расчётных сеток. К таким библиотекам относится p4est, реализующая возможность параллельного адаптивного измельчения сетки [7]. Данная библиотека обладает хорошо продуманной структурой и оптимизирована для работы с технологией параллельных вычислений MPI.

В данной работе представлен численный алгоритм для решения уравнений газовой динамики смеси идеальных газов на адаптивных локально измельчающихся сетках. При построении численного алгоритма используется метод Галёркина с разрывными базисными функциями. Для избежания появления нефизических осцилляций вблизи разрывов применяется лимитер Барта-Йесперсена [8]. Реализация построенной схемы базируется на структуре данных и алгоритмах библиотеки p4est. С помощью разработанного метода проведено математическое моделирование развития неустойчивости Рихтмайера-Мешкова [9] и решена задача о тройном распаде разрыва [10,11]. Полученные результаты хорошо согласуются с известными решениями данных задач, а полученная картина решения подробно описывает динамику рассматриваемых сложных течений.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-41-130001, проект № 18-31-00102), Минобрнауки РФ (№ 1.6958.2017/8.9) и гранта Президента РФ для молодых российских ученых — кандидатов наук (МК-2007.2018.1). Работа Тишкина В.Ф выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 17-71-30014).

Литература

1. Краснов М. М., Ладонкина М. Е., Тишкин В. Ф. Реализация разрывного метода Галеркина в программном комплексе DGM // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 245. 31 с.

2. Ладонкина М. Е., Неклюдова О. А., Тишкин В. Ф. Построение лимитера для разрывного метода Галеркина на основе усреднения решения // Матем. моделирование. 2018. Т. 30, № 5. С. 99–116.

3. Криксин Ю. А., Тишкин В. Ф. Вариационная энтропийная регуляризация разрывного метода Галеркина для уравнений газовой динамики // Матем. моделирование. 2019. Т. 31, № 5. С. 69–84.

4. Брагин М. Д., Криксин Ю. А., Тишкин В. Ф. Верификация одного метода энтропийной регуляризации разрывных схем Галеркина для уравнений гиперболического типа // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. №. 018. 25 с.

5. Cockburn B., Shu Ch.-W. Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems // Journal of Scientific Computing. 2001. Vol. 16. Issue 3. P. 173–261.

6. Chen T., Shu Ch.-W. Entropy stable high order discontinuous Galerkin methods with suitable quadrature rules for hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics. 2017. Vol. 345. P. 427–461.

7. Burstedde C., Wilcox L. C., Ghattas O. p4est: Scalable Algorithms for Parallel Adaptive Mesh Refinement on Forests of Octrees // SIAM Journal on Scientific Computing. 2011. Vol. 33. Issue 3. P. 1103–1133.

8. Barth T. J., Jespersen D. C. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes // AIAA Paper. 1989. Issue 89-0366.

9. Жалнин Р. В., Змитренко Н. В., Ладонкина М. Е., Тишкин В. Ф. Численное моделирование развития неустойчивости Рихтмайера–Мешкова с использованием схем высокого порядка точности // Матем. моделирование. 2007. Т. 19, № 10. С. 61–66.

10. Kucharik M., Garimella R. V., Schofield S. P., Shashkov M. J. A comparative study of interface reconstruction methods for multi-material ale simulations // Journal of Computational Physics. 2009. Vol. 229. Issue 7. P. 2432–2452.

11. Kucharik M., Shashkov M. J. Conservative multi-material remap for staggered multi-material arbitrary lagrangian-eulerian methods // Journal of Computational Physics. 2014. Vol. 258. P. 268–304.

MSC2010 35Q30, 76N15

Application of the discontinuous Galerkin method to modeling two-dimensional flows of a multicomponent mixture of ideal gases using local adaptive mesh refinement

R.V. Zhalnin[1], V.F. Masyagin[1], E.E. Peskova[1], V.F. Tishkin[2]

National Research Ogarev Mordovia State University[1], Keldysh Institute of Applied Mathematics[2]

УДК 519.63

Моделирование течений химически реагирующей смеси газов с учетом внешнего воздействия лазерного излучения *

Жалнин Р.В.[1], Масягин В.Ф.[1], Пескова Е.Е.[1]

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет[1]

Актуальность и значимость математического моделирования многокомпонентых газовых потоков определяются возрастающими потребностями современной газо- и нефтехимии в детальной информации о параметрах течений. Одним из важных направлений современных исследований является анализ влияния внешнего подвода энергии на характер протекания химических реакций.

Ранее авторами были исследованы дозвуковые течения, в которых химическая реакция протекала под воздействием термического нагрева стенок области, в которой находится газовая смесь [1]. Был построен и верифицирован численный алгоритм повышенного порядка точности для решения уравнений Навье-Стокса в приближении малых чисел Маха, частично основанный на работах [2–4].

В настоящей работе построена схема для исследования многокомпонентных реагирующих дозвуковых газовых потоков, находящихся под воздействием не только термического, но и лазерного излучения. Для учета воздействия лазерного излучения предлагается после нахождения газодинамических параметров и концентраций веществ на каждом шаге по времени проводить коррекцию температуры газовой смеси [5]. В ходе вычислительного эксперимента планируется сравнение численных данных и данных экспериментов по термическому пиролизу этана, представленных в работе [5], для доказательства применимости разработанной численной методики при исследовании указанного класса задач.

Литература

1. Жалнин Р. В., Пескова Е. Е., Стадниченко О. А., Тишкин В. Ф. Моделирование течения многокомпонентного реагирующего газа с использованием алгоритмов высокого порядка точности //Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2017. Т. 27, № 4. С. 608–617.

2. Almgren A. S., Bell J. B., Colella P., Howell L. H., Welcome M. L. A Conservative Adaptive Projection Method for the Variable Density Incompressible Navier-Stokes Equations // Journal of Computational Physics. 1998. V. 142, № 1. P. 1–46.

3. Day M. S., Bell J. B. Numerical simulation of laminar reacting flows with complex chemistry // Combustion Theory and Modelling. 2000. V. 4, № 4. P. 535–556.

4. Борисов В.Е., Якуш С.Е. Применение адаптивных иерархических сеток для расчета течений реагирующих газов // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2015. Т. 16. Вып. 2. URL: http://chemphys.edu.ru/issues/2015-16-2/articles/544/

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-41-130001, проект № 18-31-00102), Минобрнауки РФ (№ 1.6958.2017/8.9) и гранта Президента РФ для молодых российских ученых — кандидатов наук (МК-2007.2018.1).

5. Stadnichenko O.A., Snytnikov V.N., Snytnikov Vl.N., Masyuk N.S. Mathematical modeling of ethane pyrolysis in a flow reactor with allowance for laser radiation effects // Chemical Engineering Research and Design. 2016. V. 109. P. 405–413.

MSC2010 35Q30, 76N15

Modelling of a chemically reacting gas mixture flow with considering of laser radiation external exposure

R.V. Zhalnin[1], V.F. Masyagin[1], E.E. Peskova[1]
National Research Ogarev Mordovia State University[1]

УДК 517.938.5

Построение энергетической функции Морса для топологических потоков с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством

Зинина С.Х.[1]

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет[1]

Функцией Ляпунова для потока на многообразии называется непрерывная функция, которая убывает вдоль орбит вне цепно рекуррентного множества и является константой на каждой цепной компоненте. В силу результатов Ч. Конли [1] такая функция существует для любого потока, порожденного непрерывным векторным полем, а сам факт существования носит название «Фундаментальная теорема динамических систем». Если множество критических точек функции Ляпунова совпадает с цепно рекуррентным множеством потока, то такая функция называется энергетической функцией.

Рассмотрим класс $G(M^n)$ топологических потоков с конечным (следовательно, состоящим из неподвижных точек) гиперболическим цепно рекуррентным множеством, заданный на M^n. Динамика потоков рассматриваемого класса близка по своим свойствам к градиентно-подобным потокам. Аналогично порядку С. Смейла, введем на множестве неподвижных точек потока $f^t \in G(M^n)$ отношение условием

$$p \prec q \iff W^s_p \cap W^u_q \neq \emptyset.$$

В силу конечности цепно рекуррентного множества потока f^t введенное отношение является отношением частичного порядка и, следовательно, может быть продолжено до отношения полного порядка на $\mathcal{R}_{f^t}$. В дальнейшем будем считать неподвижные точки потока f^t пронумерованными согласованно с введенным порядком:

$$p_1 \prec \cdots \prec p_k.$$

Аналогично теореме 2.1 из книги [2] доказано следующее утверждение о вложении и асимптотическом поведении инвариантных многообразий неподвижных точек.

Теорема 1. *Пусть $f^t \in G(M^n)$. Тогда*

1. $M^n = \bigcup\limits_{i=1}^{k} W^u_{p_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{k} W^s_{p_i}$;
2. $W^u_{p_i}$ $(W^s_{p_i})$ *является топологическим подмногообразием многообразия M^n, гомеоморфным $\mathbb{R}^{\lambda_{p_i}}$ $(\mathbb{R}^{n-\lambda_{p_i}})$;*
3. $cl(W^u_{p_i}) \setminus (W^u_{p_i} \cup p_i) \subset \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} W^u_{p_j}$ $\left(cl(W^s_{p_i}) \setminus (W^s_{p_i} \cup p_i) \subset \bigcup\limits_{j=i+1}^{k} W^s_{p_j}\right)$.

При сотрудничестве с О.В. Починкой в работе [3] была доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Любой поток $f^t \in G(M^n)$ обладает энергетической функцией Морса.*

Литература

1. Conley C. Isolated invariant sets and the Morse index. CBMS Regional Conference Series in Math. Providence, RI: AMS, 1978. Vol. 38.

2. Grines V., Medvedev T., Pochinka O. Introduction to Topological Classification of Diffeomophisms on 2- and 3-Manifolds. Switzerland. Springer, 2016. 305 p.

3. Medvedev T. V., Pochinka O. V., Zinina S. Kh. On existence of a Morse energy function for topological flows with finite chain recurrent sets. https://arxiv.org/1904.08086v1

MSC2010 37D05

Construction of the Morse energy function for topological flows with finite hyperbolic chain recurrent set

S.Kh. Zinina[1]

National Research Ogarev Mordovia State University[1]

УДК 544.4

О методе декомпозиции при анализе информативности кинетических параметров

Исмагилова А.С.[1], Хамидуллина З.А.[2], Спивак С.И.[1,3]

Башкирский государственный университет[1], Уфимский государственный нефтяной технический университет[2], Институт нефтехимии и катализа Российской академии наук[3]

Кинетическая модель каталитической реакции в стационарном режиме представляет собой систему дифференциально-алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x, y, k^{`}), \\ 0 = f_2(x, y, k^{`}), \\ x^{`}(0) = x_0^{`}. \end{cases} \tag{1}$$

где $x^{`}$, $y$ – векторы концентраций измеряемых и промежуточных веществ соответственно, $k^{`} = k^{`}(k, \varepsilon)$ – вектор кинетических параметров, ε – вектор погрешностей измерений, k – вектор скоростей элементарных стадий, $f_{1,2}$ выписываются в соответствии с законом действующих масс.

Большинство реальных химических процессов в промышленности характеризуются нелинейными механизмами реакций. Вследствие этого возникают нелинейные дифференциально-алгебраические уравнения, аналитическое решение которых сложно, а иногда и невозможно.

В работе [1] разработана общая теория анализа системы (1), основанная на исследовании функциональных матриц Якоби – матриц частных производных от измеряемых переменных по искомым константам. Данная методика позволяет выделить комбинации констант $k^{`}$, относительно которых обратная задача идентификации параметров механизмов реакций допускает однозначное оценивание по доступной кинетической информации.

В работе [2] предложен теоретико-графовый метод, упрощающий общую теорию анализа информативности кинетических параметров. Математической основой работы является теория графов. Общее описание механизмов протекания химических реакции на основе теории графов было введено А.И. Вольпертом [3].

Авторами разработан алгоритм, позволяющий непосредственно из графа Вольперта выписать матрицу связей без вычисления матриц Якоби, что значительно облегчает анализ информативности для механизмов сложных химических реакций.

Ввиду большой размерности исследуемых систем, геометрическая интерпретация механизма теряет наглядность, так как физическая область отображения имеет определенные границы. Становится невозможным корректное выявление функциональных связей кинетических параметров по графу Вольперта.

В настоящей работе предложено определение независимых комбинаций констант путем декомпозиции сложных механизмов реакций по независимым маршрутам. Декомпозиция сложных механизмов реакций позволяет перейти к задачам существенно меньшей размерности. В [4, 5] доказано, что механизм сложной химической реакции можно разделить на системы подмеханизмов, число которых равно числу базисных маршрутов. Базис нелинейных параметрических функций (НПФ) исходной сложной системы реакций совпадает с объединением базисов НПФ подмеханизмов.

Алгоритм определения базиса НПФ с применением метода декомпозиции:

1. Определение базиса маршрутов $\{M_i\}$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ для механизма сложной химической реакции.

2. Выделение для каждой подсистемы подграфа графа Вольперта путем исключения всех вершин, отвечающих за промежуточные вещества и продукты в элементарных стадиях, не являющихся исходными веществами ни в какой другой элементарной стадии.

3. Выписывание для каждой подсистемы связей A_{M_i}, ненулевыми элементами которой являются константы скоростей элементарных стадий и члены, обусловленные погрешностью измерения исходных веществ и продуктов реакции. Строкам матрицы связей соответствуют кинетические параметры.

4. Объединение матриц A_{M_i} исследуемых подсистем — выписывание матрицы связей A, соответствующей исходной системе.

5. Решение дифференциальных уравнений в частных производных $(\partial\rho/\partial k^{`}) \cdot A \equiv 0$, соответствующих матрице связей A исходной схемы, независимые решения которой образуют базис НПФ.

Таким образом, в настоящей работе предложен теоретико-графовый метод определения независимых комбинаций констант путем декомпозиции механизма реакции по независимым маршрутам. Работа является теоретической основой идентификации параметров модели при решении обратных задач химической кинетики.

Литература

1. Спивак С. И., Горский В. Г. Неединственность решения задачи восстановления кинетических констант // Доклады Академии наук. 1981. Т. 257, № 2. С. 412-415.

2. Исмагилова А. С., Хамидуллина З. А., Спивак С. И. Теоретико-графовый метод нахождения базиса нелинейных параметрических функций // Математическое моделирование процессов и систем: материалы VII Международной научно-практической конференции. Стерлитамак, 2017. С. 365-369.

3. Вольперт А. И., Худяев С. И. Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. М: Наука, 1975. 394 с.

4. Спивак С. И., Исмагилова А. С. Декомпозиция сложных механизмов протекания химических реакций по независимым маршрутам // Доклады Академии наук. 2014. Т. 455, № 5. С. 547-549.

5. Исмагилова А. С., Спивак С. И. Математическое моделирование химических процессов: монография. Уфа: РИЦ БашГУ, 2014. 115 с.

MSC2010 68R10

On the decomposition method in the analysis of informativity of kinetic parameters

A.S. Ismagilova[1], Z.A. Khamidullina[2], S.I. Spivak [1,3]

Bashkir State University[1], Ufa State Petroleum Technological University[2], Institute of Petrochemistry and Catalysis of RAS[3]

УДК 517.977.1

Матричная декомпозиция нелинейных систем автоматического управления

Камачкин А.М.[1], Шамберов В.Н.[2], Согонов С.А.[2]

Санкт-Петербургский государственный университет[1], Санкт-Петербургский государственный морской технический университет[2]

Предлагается метод построения неособенных линейных преобразований нелинейных систем автоматического регулирования и управления. Метод позволяет в определённых случаях свести исследование динамики исходной многомерной системы к исследованию поведения ее подсистем, допускающих строгий анализ.

Матрица неособенного преобразования строится в виде произведения двух матриц, одна из которых постоянная, другая состоит из элементов, зависящих от вводимых параметров. Данная параметрическая матрица отражает неоднозначность выбора преобразования, приводящего матрицу линейной части системы к первой естественной нормальной форме или жордановой нормальной форме. Параметрическая матрица позволяет при условии ее неособенности увеличить число декомпозиционных вариантов в пространстве параметров исходной системы.

1. История вопроса

Впервые для нелинейных задач теории автоматического регулирования каноническое преобразование специального вида было предложено А.И. Лурье в 1949 г. В основе этого преобразования лежало разложение элементов передаточной функции линейной части системы на простые дроби. В 1957 г. В.А. Троицкий расширил преобразование на случаи наличия кратных корней в характеристическом уравнении преобразуемой линейной части системы. Данное преобразование было обобщено в методе сечений пространства параметров, разработанном в 1967 г. Р.А. Нелепиным. Известен также метод редукции пространства параметров, в котором матрица преобразования строится на основе матрицы Вандермонда (В.В. Петров, А.А. Гордеев). Зарубежные авторы, в основном, использовали тот же метод, что отражено, например, в монографии [1], где рассмотрены различные методы нахождения матрицы канонического преобразования.

2. Каноническое преобразование

Воспользуемся неоднозначностью неособенных преобразований. Рассмотрим систему вида

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot \{N[y(t)] + \psi(t)\}, x(0) = x_0,\ y(t) = C \cdot x(t), \tag{1}$$

где A, B, C — вещественные матрицы размерности $(n \times n)$, $(n \times m)$, $(m \times n)$ соответственно; $x(t)$, $\dot{x}(t)$ и $y(t)$ — векторы переменных размерности n, n и m (при этом $n \geqslant m$) соответственно; $\psi(t)$ — вектор внешнего возмущающего воздействия размерности m. Нелинейная часть системы представлена вектором нелинейных функций $N[y(t)]$ размерности m; точкой обозначено дифференцирование по времени.

Считаем, что элементы матрицы A заранее определены, а элементы матриц B и C выступают в качестве параметров настройки и могут изменяться в задаваемых пределах для придания системе требуемых свойств.

Каноническим преобразованием $x(t) = T \cdot z(t)$ исходная система (1) приводится к эквивалентной системе относительно $z(t)$

$$\dot{z}(t) = A_T \cdot z(t) + B_T \cdot \{N[y(t)] + \psi(t)\}, z(0) = x_0,\ y(t) = C_T \cdot z(t), \tag{2}$$

где $A_T = T^{-1} \cdot A \cdot T$, $B_T = T^{-1} \cdot B$, $C_T = C \cdot T$.

Приравниванием к нулю определённых элементов матриц B_T и C_T, можно добиться расщепления преобразованной системы на подсистемы более низкой (чем n) размерности, допускающих их полное аналитическое исследование [2,3]. Возникает задача получения преобразования, приводящего систему (1) к системе (2) с наперёд заданными свойствами.

Известно, что матрица преобразования T, с помощью которой матрица A приводится к первой естественной нормальной форме или к жордановой форме A_T, определяется неоднозначно. Неоднозначность выбора матрицы T можно описать как $T = S \cdot Q$, где S – некоторая матрица такая, что $S^{-1} \cdot A \cdot S = A_T$, а Q – невырожденная матрица, описывающая неоднозначность выбора матрицы T.

3. Теорема

Пусть неособенная матрица Q обладает свойством $A_T \cdot Q = Q \cdot A_T$, где A_T – первая естественная нормальная форма, или жорданова нормальная форма матрицы A, тогда матрица преобразования будет иметь вид $T = S \cdot Q$, где S – одна из возможных постоянных матриц, приводящих матрицу A к первой естественной нормальной форме или к жордановой нормальной форме.

Равенство $A_T \cdot Q = Q \cdot A_T$ позволяет определять элементы матрицы Q, которые можно использовать как переменные множители в элементах матриц B_T и C_T.

Чаще всего [1, 4], в качестве A_T используется матрица в жрдановой нормальной форме, т. е. $A_T = A_j$, где A_j – матрица в жордановой форме, тогда S - одна из возможных постоянных матриц, приводящих A к виду A_j. Матрица S при этом состоит из собственных и дополнительных векторов матрицы A. В этом случае обозначим $T = S \cdot Q = M$.

Хорошо известно, что, например, разностное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами и ненулевой правой частью с помощью замены переменных приводится к виду

$$x_{(k+1)} = A_n \cdot x_{(k)} + B \cdot F_{(k)}, y_{(k)} = C \cdot x_{(k)}, \tag{3}$$

где $x_{(k)}$ – $(k+1)$-мерный вектор, A_n – $(n \times n)$ постоянная матрица в форме Фробениуса, или, иначе, в первой естественной нормальной форме, $F_{(k)}$ – дискретная входная переменная, $B = [0\ \ 0\ ...\ 0\ \ 1]$ – $(n \times 1)$ матрица, $C = [1\ \ 0\ ...\ 0\ \ 0]$ – $(1 \times n)$ матрица. Система (3) полностью наблюдаема. Аналогичные выкладки справедливы и для неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Если выход одномерной системы n-го порядка с управлением ν в правой части является взвешенной суммой производных текущих переменных до порядка m включительно, то тогда после соответствующей замены переменных приходим к системам вида

$$\dot{z} = A_n \cdot x + B \cdot \nu,\ y = \langle C, x \rangle + d_0 \cdot \nu,\ d_0 \in R \text{ при } n = m; \tag{4}$$

$$\dot{z} = A_n \cdot x + B \cdot \nu,\ y =< C, x >,\ \text{при } n > m. \tag{5}$$

Тогда системы (4) и (5) всегда полностью управляемы по входу ν.

Задача состоит в том, чтобы построить матрицы вида Q и Q^{-1}, зависящие от параметров так, чтобы можно было воспользоваться преимуществами, которые дает приведение к системе (2) с указанными выше матрицами A_T, т. е. $A_T = A_j$ и $A_T = A_n$. Во втором случае $T = S \cdot Q_n$, где S и Q_n – невырожденные матрицы, такие, что $S^{-1} \cdot A \cdot S = A_n$, $Q_n^{-1} \cdot A \cdot Q_n = A_n$.

В случае первой естественной нормальной формы матрицы до 4-го порядка включительно получены параметрические матрицы. Указан метод получения таких матриц в любых случаях, когда порядок матриц больше четырёх [6,7]. Введение этих матриц как параметрического сомножителя, позволяет во многих случаях приводить исходную систему уравнений к управляемой или наблюдаемой форме.

Задачу построения неособенного декомпозиционного преобразования в случае A_j можно считать решённой [4,7]. Решение состоит из следующих этапов:

1) строим матрицу S, состоящую из собственных (модальных) векторов и дополнительных векторов матрицы A;

2) получаем матрицу $A_j = S^{-1} \cdot A \cdot S$;

3) из условия $A_j \cdot Q = Q \cdot A_j$ получаем невырожденную матрицу Q так, что матрица преобразования $M = S \cdot Q$ приводит систему (1) к системе уравнений относительно $z(t)$ с матрицами $A_j = M^{-1} \cdot A \cdot M$, $B_m = M^{-1} \cdot B$, $C_m = C \cdot M$ соответственно;

4) приводим матрицы B_m, C_m к нужному блочному виду, варьируя элементы матрицы Q, исключая случаи, когда $det(Q) = 0$;

5) решив систему относительно $z(t)$, возвращаемся к системе относительно $x(t)$, используя преобразование $x(t) = M \cdot z(t)$. Изложенный подход к декомпозиции систем вида (1) был с успехом применён и дополняется исследованиями ее подсистем первого и второго порядков [5,7].

Литература

1. Derusso P.M., Rob J.R., Close C.M., Desrochers A.A. State Variables for Engineers. 2nd ed., New-York: Wiley – Interscience, 1998. 575 p.

2. Камачкин А.М., Шамберов В.Н. Определение бифуркационной структуры пространства параметров методом декомпозиции // Системы управления и информационные техно-логии. М.; Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2012. № 4 (50). С. 11-13.

3. Камачкин А.М., Согонов С.А., Шамберов В.Н. Вынужденные периодические решения нелинейных многосвязных систем // Системы управления и информационные технологии. Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2014. № 1 (55). С. 8-12.

4. Kamachkin A.M., Chitrov G.M., Shamberov V.N. Algebraical aspects of parametrical decomposition method // 2015 Intern. Conference «Stability and Control Processes» in Memory of V. I. Zubov (SCP-2015), IEEE. P. 52–54 (DOI: 10. 1109 / SCP. 2015. 7342056).

5. Kamachkin A.M., Shamberov V.N. The method of parametrical decomposition. Base subsystems and their state space // 2016 Intern. Conference «Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems» (Pyatnitskiy's Conference), IEEE (DOI:10.1109/stab. 2016.7541190).

6. Kamachkin A.M., Chitrov G.M., Shamberov V.N. Special Matrix Transformations of Essentially Nonlinear Control Systems // 2017 Intern. Conference «Constructive nonsmoth analysis and related topics» to the memory of V. F. Demyanov (CNSA-2017). IEEE. P. 138–140, DOI:10.1109 / CNSA. 2017.7973966.

7. Kamachkin A.M., Chitrov G.M., Shamberov V.N. Normal matrix forms to decomposition and control problems for manydimensional systems // Vestnik of Saint Petersburg

University. Applied Mathematics. Computer science. Control Processes. 2017. Vol. 13, Iss. 4. P. 417-430. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.408.

MSC2010 93B11; 93C10

Matrix decomposition of nonlinear systems of automatic control

A.M. Kamachkin[1], V.N. Shamberov[2], S.A. Sogonov[2]

St. Petersburg State University[1], St. Petersburg State Marine Technical University[2]

УДК 519.6

Численный метод нахождения высших производных с помощью дискретного и быстрого преобразования Фурье

Кузьмичев Н.Д.[1]

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет[1]

Во многих прикладных вычислительных задачах необходимо иметь значения высших производных функции, например, для численного интегрирования дифференциальных уравнений как обыкновенных, так и в частных производных. Кроме того, при экспериментальном исследовании динамических процессов часто приходится регистрировать первую и высшие гармоники исследуемой зависимости, вместо непосредственного измерения самой зависимости. В настоящей работе получены формулы для первой – седьмой производных функции, в которых используются Фурье-гармоники функции, вычисление которых можно производить методами дискретного и быстрого преобразования Фурье [1].

Рассмотрим функцию $f(x)$, разложимую в ряд Тейлора в некоторой точке x_0, в интервале $\Delta = (x_0 - R, x_0 + R)$, где R — радиус сходимости ряда. Введем гармоническую параметра t функцию $z(t) = z_t = h \cdot \cos(t)$ амплитудой h. При $|z(t)| < R$ функции $f(x_0 + z_t)$ соответствует ряд Тейлора, которому в силу периодичности и четности f от параметра t, соответствует ряд Фурье [2–4]:

$$f\left(x_0 + h \cdot \cos t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n \cdot \cos^n t}{n!} f^{(n)}\left(x_0\right) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cdot \cos(mt), \tag{1}$$

где амплитуды гармоник (коэффициенты Фурье) A_m выражаются формулами:

$$A_m\left(x_0, h\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+m)!} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^{2n+m} f^{(2n+m)}\left(x_0\right). \tag{2}$$

Здесь функции $f^{(k)}\left(x_0\right)$ являются производными k-го порядка от $f(x)$ в точке $x = x_0$. Кроме того, амплитуды гармоник (2) можно выразить через интегралы:

$$A_m\left(x_0, h\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left(x_0 + h \cdot \cos t\right) \cos(mt)\, dt, \quad m = 0,\, 1,\, 2, \ldots. \tag{3}$$

Вычислим производную по параметру t от $f(x) = f\left(x_0 + z_t\right)$:

$$\frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} = h \sin t \left.\frac{df}{dx}\right|_{x = x_0 + h\cos t} = \sum_{m=1}^{\infty} m A_m \sin(mt). \tag{4}$$

Положим в (1) $t = \dfrac{\pi}{2}$ и в результате получим ряд для производной f [3]:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} = f^{(1)}\left(x_0\right) = \frac{1}{h}\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} (2m-1) A_{2m-1}\left(x_0, h\right). \tag{5}$$

Для функции $f(x)$ и ее второй производной имеем [3]:

$$f\left(x_0\right)=\frac{A_0\left(x_0, h\right)}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m A_{2m}\left(x_0, h\right),$$

$$f^{(2)}\left(x_0\right)=\left.\frac{d^2 f}{d x^2}\right|_{x_0}=\frac{1}{h^2} \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}(2m)^2 A_{2m}\left(x_0, h\right). \qquad (6)$$

Для третьей, четвертой, пятой, шестой и седьмой производных, следуя алгоритму вычисления формулы (5), получим ряды:

$$f^{(3)}\left(x_0\right)=\left.\frac{d^3 f}{d x^3}\right|_{x_0}=\frac{1}{h^3} \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\left[(2m+1)^3-(2m+1)\right] A_{2m+1}\left(x_0, h\right), \qquad (7)$$

$$f^{(4)}\left(x_0\right)=\left.\frac{d^4 f}{d x^4}\right|_{x_0}=\frac{1}{h^4} \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\left[(2m+2)^4-4(2m+2)^2\right] A_{2m+2}\left(x_0, h\right), \qquad (8)$$

$$f^{(5)}\left(x_0\right)=\left.\frac{d^5 f}{d x^5}\right|_{x_0}=\frac{1}{h^5} \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\left[(2m+3)^5-10(2m+3)^3+\right.$$
$$\left.+9(2m+3)\right] A_{2m+3}\left(x_0, h\right), \qquad (9)$$

$$f^{(6)}\left(x_0\right)=\left.\frac{d^6 f}{d x^6}\right|_{x_0}=\frac{1}{h^6} \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\left[(2m+4)^6-20(2m+4)^4+\right.$$
$$\left.+64(2m+4)^2\right] A_{2m+4}\left(x_0, h\right), \qquad (10)$$

$$f^{(7)}\left(x_0\right)=\left.\frac{d^7 f}{d x^7}\right|_{x_0}=\frac{1}{h^7} \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\left[(2m+5)^7-35(2m+5)^5+\right.$$
$$\left.+259(2m+4)^3-225(2m+5)\right] A_{2m+5}\left(x_0, h\right). \qquad (11)$$

В итоге мы имеем коэффициенты Фурье, выраженные через производные (2) и производные, выраженные через коэффициенты Фурье (амплитуды гармоник) (5)-(11). Формулы (5)-(11) не требуют таких жестких ограничений накладываемых на функцию $f(x)$, какие требуют формулы (2). Поэтому формулы (5)-(11) можно применять для функций, у которых производные имеют особенности, например, разрывы первого рода. Коэффициенты Фурье A_m, с использованием формулы (3) можно вычислять численно, применяя различные квадратурные формулы, например, трапеций, Симпсона, Гаусса, Филона и др., а также методами быстрого и дискретного преобразования Фурье [1].

В целях экспериментальной проверки была выбрана вольт-амперная характеристика (ВАХ) полупроводниковой структуры, которая использовалась в работе [5]:

$$f(x)=V_0 \cdot \ln \left[\frac{x}{I_0}+\sqrt{\left(\frac{x}{I_0}\right)^2+1}\right]. \qquad (12)$$

Здесь $V_0=36.3$ и $I_0=0.9$. Величина $x(t)=x_0+h \cdot \cos(t)$, где $h=1.5$ и $0 \leqslant x_0 \leqslant 3$. Численное моделирование производных ВАХ (12) выполнялось в системе *MathCad.* Результаты математического моделирования производных ВАХ полупроводниковой структуры приведены на рис. 1, на котором изображен график 4-ой производной, вычисленной численно по формуле (8) и аналитически путем непосредственного дифференцирования функции (12). Вместо рядов использовались конечные суммы с различным числом членов.

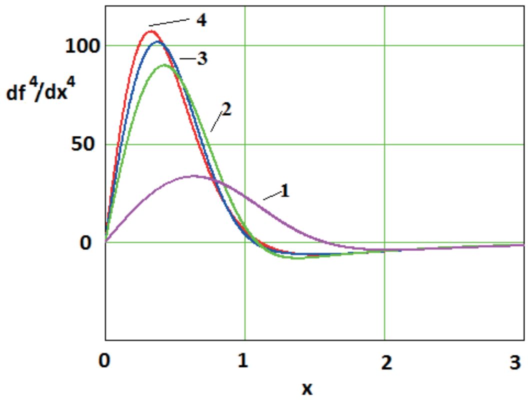

Рис. 1. Четвертая производная от $f(x)$; 1 – 4-ая производная, вычисленная по 4-ой гармонике; 2 – 4-ая производная, вычисленная по 4-ой, 6-ой, 8-ой гармоникам; 3 – 4-ая производная, вычисленная по 4-ей, 6-ой, 8-ой, 10-ой, 12-ой и 14-ой гармоникам; 4 – 4-ая производная, вычисленная аналитически.

Литература

1. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. М.: Радио и связь, 1985. 248 с.

2. Кузьмичев Н. Д. Гистерезисная намагниченность и генерация гармоник магнитными материалами: Анализ спектра гармоник намагниченности на примере высокотемпературных сверхпроводников // ЖТФ. 1994. Т. 64, вып. 12. С. 63 – 74.

3. Кузьмичев Н. Д. Применение рядов Тейлора-Фурье для численного и экспериментального определения производных изучаемой зависимости // Журнал Средневолжского математического общества. 2011. Т. 13, №1. С. 70 – 80.

4. Кузьмичев Н. Д. Оценки ошибок модуляционного восстановления функции отклика и ее производных // ЖТФ. 1997. Т. 37, №7. С. 124 – 127.

5. Кузьмичев Н. Д. Экспериментальное определение вольт-амперной характеристики нелинейной полупроводниковой структуры с помощью модуляционного Фурье-анализа // ФТП. 2016. Т. 50, №6. С. 830 – 833.

MSC2010 47A13

Numerical methods for finding higher derivatives using discrete and fast Fourier transform

N.D. Kuzmichev[1]

National Research Mordovia State University[1]

УДК 519.64; 538.945

Численное моделирование экранирующего тока в приближении Бина для сверхпроводящих тел с цилиндрической симметрией

Кузьмичев Н.Д.[1], Шушпанов А.А.[1], Васютин М.А.[1]

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет[1]

Для сверхпроводников второго рода (СВР) при получения таких основных характеристик, как критическая плотность тока или критическая напряженность магнитного поля, пользуются обычно бесконтактными измерениями. Используются образцы в виде дисков, цилиндров, параллелепипедов, эллипсоидов и других симметричных тел.

Одна из моделей для описания магнитных свойств СВР с сильным пиннингом (жестких сверхпроводников 2-го рода (ЖСВР)) в магнитных полях превышающих первое критическое поле H_{c1} была представлена Ч. Бином [1]. Она предполагает, что области сверхпроводника куда не проникло магнитное поле экранирующая плотность сверхпроводящего тока (сверхтока) равна нулю, а куда проникло — некоторому критическому значению J_c.

В работе выполнено численное моделирование магнитных свойств жестких сверхпроводников 2-го рода в модели Бина с осевой симметрией (короткий цилиндр и эллипсоид вращения) в однородном магнитном поле, параллельном оси [1]. Введем ограничения для величин x, y, z: $-b \leqslant y \leqslant b, r = (x^2 + z^2)^{0.5} \leqslant a(y)$, где $a(y)$ – функция боковой границы.

Будем рассматривать материал с зависимостью $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. Также введем зависимость напряженности электрического поля от плотности тока $\mathbf{E} = E(J)\mathbf{J}/J$. Удельное сопротивление образца аппроксимируется степенной зависимостью $E = E_{\text{c}}\,(J/J_c)^n$, с ненулевым критическим значением плотности тока J_c и показателем степени $n \geqslant 1$. Тогда условие $n = 1$ описывает омическую зависимость, а предел при $n \to \infty$ — модель Бина. В общем случае J_c и n могут зависеть от индукции магнитного поля в конкретной точке: $J_c(B)$ и $n(B)$, или от частоты изменения поля, но мы ограничим вычисления изотропными средами, как и в работе [2].

В качестве основного уравнения для расчета будем использовать уравнение движения тока:

$$\dot{J}(\mathbf{r}, t) = \mu_0^{-1} \int\limits_0^a dr' \int\limits_0^b dy' Q^{-1}_{\text{цил}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[E(J) - \frac{r'}{2} \dot{B}_{\text{пр}} \right], \tag{1}$$

где $\mathbf{r} = (r, y),\ \mathbf{r}' = (r', y')$. Ядро интегрального оператора имеет вид

$$Q_{\text{цил}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = f(r, r', y - y') + f(r, r', y + y'),$$

где

$$f(r, r', \eta) = \int\limits_0^\pi \frac{d\phi}{2\pi} \cdot \frac{-\,r' \cos\phi}{(\eta^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\phi)^{0.5}}. \tag{2}$$

Выберем неравномерную сетку с уплотнением к краям для численного решения данного уравнения:

$$r_i = r_i(u_i) = \sin(u_i) \cdot a(y_i), \quad y_i = y_i(v_i) = \sin(v_i) \cdot b,$$
$$u_i = \frac{\frac{\pi}{2}\left(i - \frac{1}{2}\right)}{N_y}, \quad v_i = \frac{\frac{\pi}{2}\left(j - \frac{1}{2}\right)}{N_r}, \quad i = 1, \ldots, N_y, \quad j = 1, \ldots, N_r.$$

Для расчета интегрального ядра в численной форме понадобятся «веса» ячеек:

$$w_j = w_r \cdot w_y, \quad w_r = \frac{\pi}{2}\cos u_i \cdot \frac{a(y_i)}{N_r}, \quad w_y = \frac{\pi}{2}\cos v_i \cdot \frac{b}{N_y}.$$

Для образцов с невертикальной боковой границей вводим дополнительный нормировочный множитель для горизонтальных координат сетки и «веса» ячеек $a(y_i)$, получаемый из функции боковой границы $a(y)$.

Ядро интегрального оператора представим в виде матрицы $Q(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \to Q(r_i, r_j') \cdot w_j = Q_{ij} \cdot w_j$. Найдем эллиптический интеграл из формулы (2) численно:

$$f(r, r', \eta) = \int\limits_0^{\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \cdot \frac{-r'\cos\phi}{(\eta^2 + r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\phi)^{0.5}} = \int\limits_0^{\pi} g(\phi)\, d\phi =$$
$$= \int\limits_0^{1} g\left[\phi(u)\right] \phi'(u)\, du \approx \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} g\left[\phi(u_i)\right] \phi'(u_i),$$

где

$$g\left[\phi(u_i)\right] = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{r'\cos\phi(u_i)}{(\eta^2 + r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\phi(u_i))^{0.5}},$$
$$\phi(u_i) = \pi - \pi\cos(\pi u_i),$$

$$u_i = \frac{i - 0.5}{M}, \quad i = 1, 2, \ldots, M.$$

Уравнение для производной плотности тока (1) сведем к матричному:

$$\dot{J}(t) = \frac{b}{N} Q^{-1} \cdot \left[\overbrace{J^T(t) \circ \ldots \circ J^T(t)}^{n} - \frac{R}{2}\dot{B}_{\text{пр}}(t)\right],$$
$$R_i = r_i, \quad i = 1, \ldots, N_r N_y,$$

где J и R — векторы плотности тока и координат, соответственно, в каждой точке сетки.

Для расчетов были выбраны 4 образца цилиндрической формы с $b(y) = const$ и 4 эллиптичных образца с $b(y) = a(1 - y^2/c)^{0.5}$, где c — коэффициент для создания различных отношений размеров. Размер сетки расчета выбирается исходя из соотношений сторон образца с сохранением её плотности в 20 ячеек на единицу размера. Скорость нарастания внешнего магнитного поля примем $\dot{B}_{\text{пр}} = E_c/a = 1$. Степень в уравнении сопротивления образца возьмем достаточно большую для соответствия модели Бина $n = 51$. Расчеты проводились в среде $MATLAB$, поскольку она хорошо оптимизирована для решения матричных уравнений и предоставляет широкий выбор средств визуализации расчетов. Результаты моделирования для фронтов проникновения магнитного поля показаны на рис. 1, результаты моделирования поля образцов показаны на рис. 2, результаты расчета петель намагниченности образцов показаны на рис. 3, результаты моделирования профилей плотности тока для образцов с соотношением сторон 1 показаны на рис. 4.

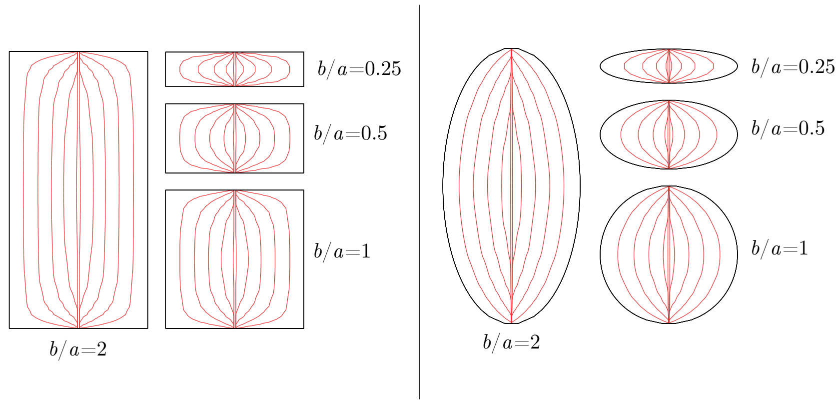

Рис. 1. Фронты проникновения магнитного поля и сверхтока для цилиндров (слева) и эллипсоидов (справа) в отношением сторон $b/a = 2,\ 1,\ 0.5,\ 0.25$ в линейно возрастающем магнитном поле. Показаны линии для $H_{\text{пр}}/H_{\text{п}} = 0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ 0.8,\ 1$ при плотности тока $\pm J_c/2$

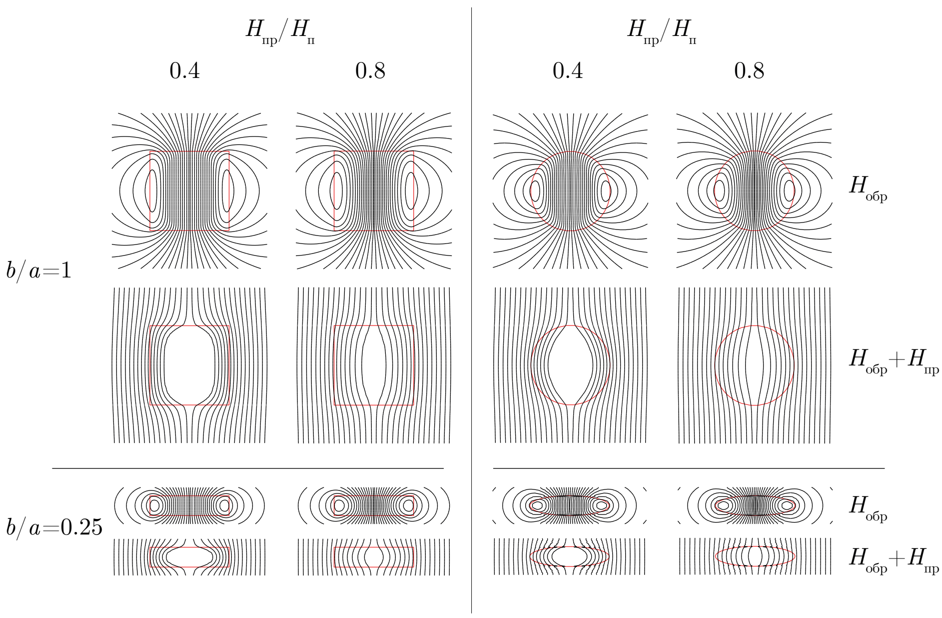

Рис. 2. Силовые линии магнитного поля при проникновении магнитного поля для цилиндров (слева) и эллипсоидов (справа) с соотношением сторон $b/a = 1,\ 0.25$. Сверху магнитное поле, создаваемое сверхтоком образца ($H_{\text{обр}}$), снизу – совместно с внешним. Картины даны для $H_{\text{пр}}/H_{\text{п}} = 0.4,\ 0.8$.

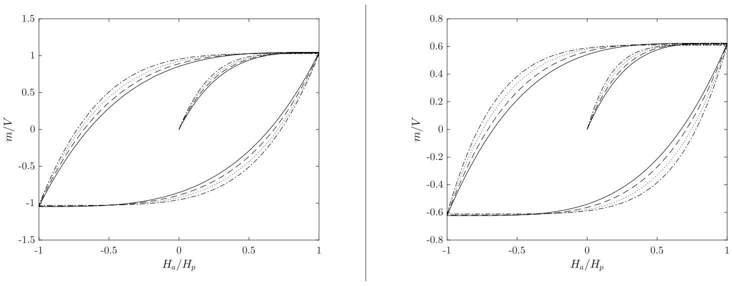

Рис. 3. Петли гистерезиса для намагниченности образца при линейном изменении внешнего поля для цилиндров (слева) и эллипсоидов (справа) с соотношением размеров $b/a = 2$ (сплошная линия), 1 (пунктирная линия), 0.5 (точечная линия), 0.25 (штрих-пунктирная линия).

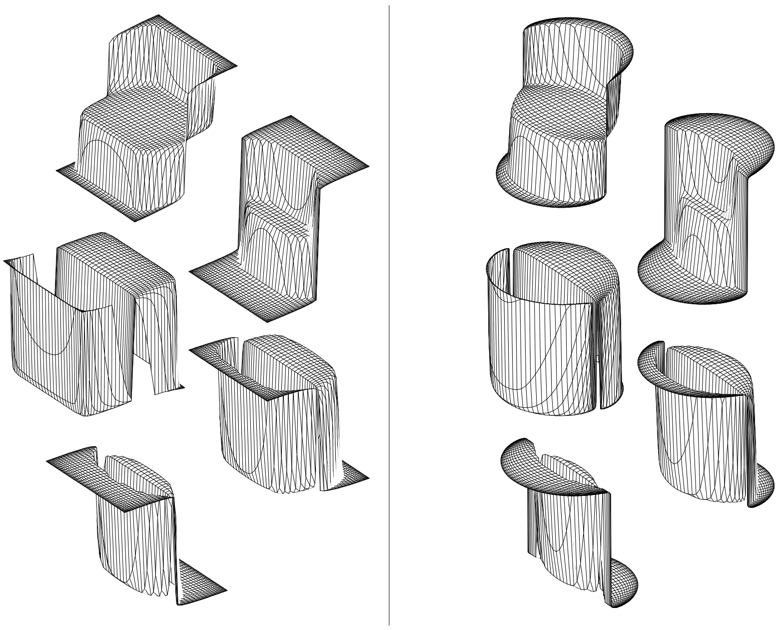

Рис. 4. Профили плотности тока J_c для цилиндра (слева) и эллипсоида (справа) с соотношением $b/a = 1$ при внешнем поле (сверху вниз) $H_{\text{пр}}/H_{\text{п}} = 0.2,\ 0.7,\ 0.8,\ 0.3,\ -0.2$.

Литература

1. Been C.P. Magnetization of hard superconductors // Phys. rev. 1962. 8 (6). DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.8.250.

2. Brandt E.H. Superconductor disks and cylinders in an axial magnetic field. I. Flux penetration and magnetization curves // Phys. rev. 1997. 58 (10). 11 p. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevB.58.6506.

3. Кузмичев Н.Д., Федченко А.А. Математическое моделирование распределения экранирующего тока и гистерезис намагниченности коротких цилиндров жестких сверхпроводников 2-го рода в приближении Бина // Журнал Средневолжского математического общества. 2011. Т. 13, № 4. С. 25-34.

4. Frankel D. Critical-state model for the determination of critical currents in disk- shaped superconductors // Appl. Phys. 1993. 50 (8). P. 5402-5407.

MSC2010 45B05

Numerical modelling of the screening current in the Bean approximation for superconducting bodies with cylindrical symmetry

N.D. Kuzmichev[1], A.A. Shushpanov[1], M.A. Vasyutin[1]

National Research Ogarev Mordovia State University[1]

УДК 517.958 519.6

Конечные элементы, связанные с ортогональными финитными функциями, в методах решения дифференциальных уравнений в частных производных

Леонтьев В.Л.[1], Ефременков И.В.[2]

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого[1], Ульяновский государственный университет[2]

Конечные элементы (КЭ) на основе ортогональных финитных функций (ОФФ) предлагаются для получения приближенных численно-аналитических решений двумерных и трехмерных задач, в постановках которых используются дифференциальные уравнения в частных производных (ДУЧП). В качестве примеров применения таких КЭ берутся плоские и трехмерные задачи теории упругости, постановки которых даны «в перемещениях» после исключения деформаций и напряжений из их смешанных постановок. Решения двумерных и трехмерных задач ищутся с помощью алгоритма метода конечных элементов (МКЭ) после формирования локальной матрицы жесткости конечного элемента на основе ОФФ, используемых при построении функций формы. Показана эффективность таких МКЭ, основанных на применении вариационного принципа Лагранжа и ОФФ. МКЭ дают приближенные численно-аналитические решения задач теории упругости более высокой точности по сравнению с МКЭ ANSYS, связанным, например, в плоской задаче с КЭ Plane142, причем с существенно меньшими затратами машинного времени на аналогичных сетках.

Ортогональность финитных функций создает возможность исключения части узловых неизвестных (напряжений, деформаций) до начала решения глобальных систем сеточных алгебраических уравнений (ССУ) при сохранении фундаментального свойства базисных функций МКЭ – финитности и устраняет основной недостаток смешанных методов – большее число узловых неизвестных по сравнению с МКЭ, связанных с вариационным принципом Лагранжа. Вместе с тем, в отличие от последних методов, смешанный МКЭ позволяет находить приближенные решения (ПР) для производных основной неизвестной функции (перемещения) без операции численного дифференцирования, поскольку производные (деформации и напряжения) аппроксимируются независимо, вследствие чего ПР для производных имеет гладкость такую же, как у основной функции (перемещения). Показывается, что применение ОФФ также повышает точность решений, получаемых с помощью МКЭ «в перемещениях» и при этом существенно снижаются затраты машинного времени за счет возрастания числа нулевых элементов глобальной сеточной матрицы.

В качестве примера дается постановка стационарной (эллиптической) краевой задачи плоской теории упругости, содержащая ДУЧП и краевые условия, для случая изотропного и однородного материала. На основе ОФФ в пределах прямоугольного КЭ формируются кусочно-билинейные непрерывные сеточные интерполяционные функции – ортогональные финитные функции формы. Каждая из функций формы отличается от нуля только в пределах своего конечного носителя. Строится линейная комбинация функций формы с неизвестными постоянными коэффициентами – узловыми значениями перемещений, представляющая собой множество возможных приближенных решений задачи. Подстановка линейной комбинации в функционал Лагранжа порождает локальную матрицу жесткости, глобальную матрицу жесткости, а также локальный и глобальный векторы нагрузок. Необходимые условия экстремума функционала Лагранжа приводят к глобальной ССУ, в которой затем дополнительно учитывается главное краевое условие (естественное краевое условие учитывается непосредственно вариационным принципом и для его выполнения не требуется дополнительная процедура). Решение ССУ дает искомые значения постоянных коэффициентов линейной комбинации, и приближенное численно-аналитическое решение оказывается найденным. ОФФ не только дают возможности устранить недостатки смешанных МКЭ, связанных с вариационными принципами Рейсснера и Ху-Васидзу. Выполненные расчеты показали, что ОФФ позволяют при помощи КЭ в рамках постановок задач «в перемещениях» находить приближенные решения более высокой точности по сравнению, например, с решениями ANSYS, причем с более низкими затратами машинного времени, поскольку ОФФ за счет их ортогональности делают глобальную матрицу ССУ существенно более разреженной по сравнению с МКЭ, в которых используются классические сплайны, не являющиеся ортогональными. Заметим, что излагаемый на примере плоской задачи теории упругости алгоритм МКЭ, связанный с ОФФ, естественным образом распространяется не только на трехмерные задачи теории упругости, но и на многие другие задачи из различных областей естествознания. Так, например, смешанная постановка задачи теплопроводности содержит только первые частные производные по координатам и две основные неизвестные функции – температуру и вектор потока тепла, а ее постановка – аналог постановки задач теории упругости «в перемещениях», содержит только температуру и частные производные по координатам второго порядка (оператор Лапласа в случае термически изотропного и однородного материала).

В работах [1-5] показано, что сочетание таких свойств сеточных базисных ОФФ, как финитность и ортогональность, приводит к высокой эффективности использования ОФФ при создании новых интегральных преобразований, потенциала взаимодействия атомов, и применения ОФФ при построении алгоритмов МКЭ, предназначенных для решения задач теорий стержней, пластин и оболочек, трехмерных упругих тел в смешанной постановке. Здесь раскрываются возможности ОФФ в случае решения краевых задач в частных производных с помощью МКЭ при использовании постановок задач «в перемещениях» теории упругости или аналогичных постановок из других областей естествознания. Заметим, что, ОФФ были также с успехом использованы при создании нового алгоритма криптографии, существенно повысившего защищенность передаваемой информации от атак.

Литература

1. Леонтьев В. Л., Риков Е. А. Интегральные преобразования, связанные с ортогональными финитными функциями, в задачах спектрального анализа сигналов // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, № 7. С. 93-100.

2. Леонтьев В. Л., Михайлов И. С. О построении потенциала взаимодействия атомов, основанном на ортогональных финитных функциях // Нано- и микросистемная техника. 2011. № 9 (134). С. 48-50.

3. Леонтьев В. Л., Мелентьев А. Ю. Сеточные методы расчета криволинейных стержней // Математическое моделирование. 2003. Т. 15, № 10. С. 95.

4. Красильников А. Р., Леонтьев В. Л. О вариационно-сеточном методе теории пластин // Математическое моделирование. 2005. Т. 17, № 3. С. 23-34.

5. Леонтьев В. Л. Вариационно-сеточный метод решения задач о собственных колебаниях упругих трехмерных тел, связанный с использованием ортогональных

финитных функций // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2002. № 3. С. 117.

MSC2010 35Q74 65M60

Finite Elements, connected with Orthogonal Finite Functions, in Methods of solution of Differential Equations in Partial Derivatives

V.L. Leontiev[1], I.V. Efremenkov[2]

Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University[1], Ulyanovsk state university[2]

УДК 519.633, 519.677

Математическое моделирование динамики распространения температуры в пласте с нагнетательной скважиной и трещиной гидроразрыва с помощью метода Галеркина с разрывными базисными функциями*

Масягин В.Ф.[1], Пескова Е.Е.[1]

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет[1]

На сегодняшний день актуальной задачей является увеличение интенсивности нефтедобычи. Степень выработки запасов существенно зависит не только от правильного регулирования разработки с целью максимального извлечения остаточных запасов углеводородов, а также и от полноты и достоверности информации о пласте и скважине. Одними из важнейших источников информации являются гидродинамические исследования пластов и скважин. Но для более полного обеспечения информативности гидродинамических методов исследований скважины, особенно для скважин с гидравлическим разрывом пласта необходимо совместное рассмотрение гидродинамического состояния системы «скважина-пласт» с температурным полем или термометрией [1]. Методы термометрии скважин и пластов в значительной степени могут улучшить систему применяемых ныне различных вариантов разработки нефтяных и газовых месторождений в направлении увеличения нефтеотдачи пластов.

В работе рассматривались процессы фильтрации несжимаемой жидкости в слабосжимаемом коллекторе. Таким образом, для нахождения давления возможно записать параболическое уравнение [2]. После нахождения давления, а следовательно, и скорости фильтрации жидкости, температура находится из дифференциального уравнения конвективного переноса тепла.

Для решения уравнений диффузионного типа и уравнений конвекции-диффузии широко применяется метод Галёркина с разрывными базисными функциями или Discontinuous Galerkin Method (DGM) [3], который характеризуется высоким порядком точности получаемого решения [4–8].

В настоящей работе представлен численный алгоритм для моделирования динамики температурного поля в системе «скважина-трещина-пласт» с использованием метода Галёркина с разрывными базисными функциями на разнесенных сетках [9]. Данный алгоритм реализован с использованием технологии параллельного программирования MPI [10]. Численный алгоритм верифицировался с помощью решения модельной задачи. Результаты показали адекватную картину изменения температурного поля для заданных начально-краевых условий, что говорит о применимости предложенного численного алгоритма для решения данного класса задач.

*Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для молодых российских ученых — кандидатов наук (МК-2007.2018.1).

Литература

1. Малышев А.Г. и др. Анализ влияния технологических факторов и механических свойств горных пород на эффективность ГРП // В. кн. «Нефть Сургута». -М.: Нефтяное хозяйство. 1997. С. 224–237.

2. Васильев В. И., Васильева М. В., Никифоров Д. Я. Решение задач однофазной фильтрации методом конечных элементов на вычислительном кластере // Вестник Северо-Восточного федерального университета им. М.К. Аммосова. 2016. Т. 56, № 6. С. 31–40.

3. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection - Dominated Problems // Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations Lecture Notes in Mathematics. 1998. Vol. 1697. P. 151–268.

4. Cockburn B., Shu C.-W. The Local Discontinuous Galerkin Method for Time-Dependent Convection-Diffusion Systems // SIAM J. Numer. Anal. 1998. Vol. 35, Issue 6. P. 2440–2463.

5. Kirby R., Karniadakis G. Selecting the Numerical Flux in Discontinuous Galerkin Methods for Diffusion Problems // Journal of Scientific Computing. 2005. Vol. 22. P. 385–411

6. Huang C., Stynes M. A direct discontinuous Galerkin method for a time-fractional diffusion equation with a Robin boundary condition // Applied Numerical Mathematics. 2019. Vol. 135. P. 15–29.

7. Pani A. K., Yadav S. An hp-Local Discontinuous Galerkin method for Parabolic Integro-Differential Equations // Journal of Scientific Computing. 2011. Vol. 46, Issue 1. P. 71–99.

8. Song L., Zhang S. Symmetric interior penalty Galerkin approaches for two-dimensional parabolic interface problems with low regularity solutions // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2018. Vol. 330. P. 356–379.

9. Жалнин Р. В., Ладонкина М. Е., Масягин В. Ф., Тишкин В. Ф. Решение задач о нестационарной фильтрации вещества с помощью разрывного метода Галеркина на неструктурированных сетках // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56, № 6. С. 267–279.

10. Жалнин Р. В., Масягин В. Ф., Пескова Е. Е. Построение параллельного вычислительного алгоритма на основе разрывного метода Галеркина для решения задач конвективного теплообмена на разнесенных неструктурированных сетках // Журнал СВМО. 2018. Т. 20, № 4. С. 448–459.

MSC2010 65M60

Mathematical modeling of the dynamics of temperature distribution in a vertical well with hydraulic fracture using the discontinuous Galerkin method

V.F. Masyagin[1], E.E. Peskova[1]
National Research Ogarev Mordovia State University[1]

УДК 517.95

Об одной обратной краевой задаче для уравнения поперечных колебаний упругой балки с интегральным условием первого рода

Мегралиев Я.Т.[1], Севдималиев Ю.М.[1], Рамазанлы Н.А.[1]

Бакинский Государственный Университет[1]

В приборостроении, машиностроении приходится регулировать вибрационные процессы в одномерных распределенных системах, и актуальность этих проблем возрастает с повышением быстроходности механизмов и увеличением размеров конструкции. Для таких задач математические модели поперечных колебаний строятся на основе уточненной теории [1]. Восстановление неизвестных параметров в соответствующих практических задачах приводят к задачам определения коэффициентов или правой части дифференциального уравнения по некоторым известным данным его решения [2,3]. Такие задачи называют обратными задачами математической физики, которые исследовались для уравнений с частными производными [4]-[8]. В обратных задачах с начальными и граничными условиями, характерными для той или иной прямой задачи, задается дополнительная информация. Необходимость дополнительной информации обусловлена наличием неизвестных коэффициентов или правой части уравнений.

В предлагаемой статье исследована обратная краевая задача с интегральным условием первого рода для уравнения поперечных колебаний упругой балки.

Рассмотрим для уравнения

$$u_{tt}(x,t) + u_{xxxx}(x,t) = a(t)u(x,t) + b(t)u_t(x,t) + f(x,t) \tag{1}$$

на множестве $D_T = \{(x,t) : 0 \le x \le 1, 0 \le t \le T\}$ обратную краевую задачу с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)\ (0 \le x \le 1), \tag{2}$$

граничными условиями

$$u_x(0,t) = 0, u_x(1,t) = 0, u_{xxx}(0,t) = 0\ (0 \le t \le T), \tag{3}$$

нелокальным интегральным условием

$$\int_0^1 u(x,t)dx = 0\ (0 \le t \le T) \tag{4}$$

и с дополнительными условиями

$$u(0,t) = h_1(t)\ (0 \le t \le T), \tag{5}$$

$$u(1,t) = h_2(t)\ (0 \le t \le T), \tag{6}$$

где $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $h_i(t)\,(i = 1,2)$ — заданные функции, а $u(x,t)$, $a(t)$, $b(t)$ — искомые функции.

Определение. *Классическим решением обратной краевой задачи (1)-(6) назовём тройку функций $u(x,t)$, $a(t)$ и $b(t)$, удовлетворяющих следующим условиям:*

1) функция $u(x,t)$ и её производные $u_t(x,t), u_{tt}(x,t), u_x(x,t), u_{xx}(x,t), u_{xxx}(x,t), u_{xxxx}(x,t)$ непрерывны в D_T ;

2) функции $a(t)$ и $b(t)$ непрерывны на $[0,T]$;

3) уравнение (1) и условия (2)-(6) удовлетворяются в обычном смысле.

Справедлива следующая

Лемма 1. Пусть $\varphi(x) \in C[0,1]$, $\psi(x) \in C[0,1]$, $h_i(t) \in C^2[0,T]$ $(i = 1,2)$, $h(t) \equiv h_1(t)h_2'(t) - h_2(t)h_1'(t) \neq 0$ $(0 \leq t \leq T)$, $f(x,t) \in C(D_T)$, $\int\limits_0^1 f(x,t)dx = 0$ $(0 \leq t \leq T)$ и выполняются условие согласования

$$\int\limits_0^1 \varphi(x)dx = 0,\ \int\limits_0^1 \psi(x)dx = 0, \tag{7}$$

$$\varphi(0) = h_1(0), \psi(0) = h_1'(0),\ \varphi(1) = h_2(0), \psi(1) = h_2'(0) \tag{8}$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1)-(6) эквивалентна задаче определения функций $u(x,t)$, $a(t)$ и $b(t)$, обладающих свойствами 1) и 2) определения классического решения задачи (1)-(6) из (1)-(3)

$$u_{xxx}(1,t) = 0\ (0 \leq t \leq T), \tag{9}$$

$$h_1''(t) + u_{xxxx}(0,t) = a(t)h_1(t) + b(t)h_1'(t) + f(0,t)\ (0 \leq t \leq T), \tag{10}$$

$$h_2''(t) + u_{xxxx}(1,t) = a(t)h_2(t) + b(t)h_2'(t) + f(1,t)\ (0 \leq t \leq T). \tag{11}$$

Пусть данные задачи (1)-(3), (9)-(11) удовлетворяют следующим условиям:

A_1. $\varphi(x) \in C^5[0,1]$, $\varphi^{(6)}(x) \in L_2(0,1)$, $\varphi'(0) = \varphi'(1) = \varphi^{(3)}(0) = \varphi^{(3)}(1) = \varphi^{(5)}(0) = \varphi^{(5)}(1) = 0$;

A_2. $\psi(x) \in C^3[0,1]$, $\psi^{(4)}(x) \in L_2(0,1), \psi'(0) = \psi'(1) = \psi^{(3)}(0) = \psi^{(3)}(1) = 0$;

A_4.$f(x,t), f_x(x,t), f_{xx}(x,t), f_{xxx}(x,t) \in C(D_T), f_{xxxx}(x,t) \in L_2(D_T)$, $f_x(0,t) = f_x(1,t) = f_{xxx}(0,t) = f_{xxx}(1,t) = 0$ $(0 \leq t \leq T)$;

A_5. $h(t) \equiv h_1(t)h_2'(t) - h_2(t)h_1'(t) \neq 0$ $(0 \leq t \leq T)$,

Можно доказать следующую теорему

Теорема 1. Пусть выполнены условия A_1-A_5. Тогда при малых значениях T задача (1)-(3), (9)-(11) имеет единственное решение.

С помощью Леммы 1 из последней теоремы вытекает однозначная разрешимость исходной задачи (1)-(6).

Теорема 2. Пусть выполняются все условия теоремы 1 и

$$\int\limits_0^1 \varphi(x)dx = 0,\ \int\limits_0^1 \psi(x)dx = 0,\ \int\limits_0^1 f(x,t)dx = 0\ \ (0 \leq t \leq T)$$

$$\varphi(0) = h_1(0), \psi(0) = h_1'(0),\ \varphi(1) = h_2(0), \psi(1) = h_2'(0)$$

Тогда при малых значениях T задача (1)-(6) имеет единственное классическое решение.

Литература

1. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела.М.: Наука, 1988. 712 с.

2. Ерофеев В. И., Кажаев В. В., Семериков Н. П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность.М.: Физматлит, 2002. 208 с.

3. Ахмятов А. М., Урманчеев С. Ф. Определение параметров твердого тела, прикрепленного к одному из концов балки, по собственным частотам колебаний //Сиб.журн.индустр.матем. 2008. Т. 11, № 4. С. 19-24.

4. Тихонов А. Н. Об устойчивости обратных задач // ДАН СССР. 1943. Т. 39, № 5. С. 195-198.

5. Лавреньев М. М., Васильев В. Г., Романов В. Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1969. 67 с.

6. Лаврентьев М. М., Романов В. Г.,Шишатский С. Т. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.

7. Иванов В. К., Васин В. В, Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.

8. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984. 264 с.

MSC2010 35A02

On an inverse boundary value problem for the equation of transverse vibrations of an elastic beam with integral condition of the first kind

Y.T. Mehraliyev [1], Y.M. Sevdimalıyev [1], N.A. Ramazanly [1]
Baku State University [1]

УДК 517.9

О глобальной динамике в уравнении Дуффинга при квазипериодическом возмущении*

Морозов А.Д.[1], Морозов К.Е.[1], Драгунов Т.Н.[1]

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского[1]

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + \alpha x + x^3 = \varepsilon f(x, y, t), \tag{1}$$

где $\alpha = \pm 1$, $f(x, y, t) = (p_1 - x^2)\dot{x} + p_2 \sin t \sin \Omega t$, ε – малый параметр, p_1, p_2, Ω – параметры, причем Ω предполагается иррациональным. Тогда f является квазипериодической функцией по t с частотным базисом $(1, \Omega)$. Отметим, что возмущение является неконсервативным.

При $\varepsilon = 0$ уравнение (1) допускает интеграл энергии $H(x, \dot{x}) = \dfrac{\dot{x}^2}{2} + \dfrac{\alpha x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4} = h$. Фазовое пространство невозмущенной системы при $\alpha = 1$ состоит из одной ячейки, заполненной замкнутыми фазовыми траекториями, а при $\alpha = 1$ — из трех ячеек, разделенных сепаратрисами седла, которые образуют гомоклиническую «восьмерку».

Глобальное исследование (1) при малых ε включает в себя установление глобальной динамики в областях, заполненных замкнутыми фазовыми траекториями и отделенных от сепаратрис и состояний равновесия, а также изучение поведения решений в малой окрестности «восьмерки» (при $\alpha = 1$) и в малых окрестностях центров. В первом случае устанавливается динамика в окрестностях индивидуальных (как резонансных, так и нерезонансных) уровней энергии невозмущенной системы (следуя [1]). Получены условия существования двумерных и трехмерных инвариантных торов. Рассматривается вопрос о прохождении трехмерного тора через резонансные зоны при вариации расстройки (следуя [2]). В силу ограниченности числа частично проходимых резонансов делается вывод о глобальной динамике в рассматриваемых областях.

При исследовании окрестности сепаратрисы получен аналог формулы Мельникова (в случае периодических возмущений см. [3]) для величины, определяющей расщепление сепаратрисных многообразий седлового решения. С ее помощью устанавливаются условия существования гомоклинических решений и квазиаттракторов, обсуждается вопрос сложной динамики. Теоретические результаты иллюстрируются при помощи компьютерного моделирования.

Литература

1. Morozov A.D., Morozov K.E. Quasiperiodic Perturbations of Two-Dimensional Hamiltonian Systems // Differential Equations. 2017. vol. 53, no. 12, P. 1607–1615.

2. Morozov A.D., Morozov K.E. On Synchronization of Quasiperiodic Oscillations // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2018. vol. 14, no. 3. P. 367-376.

3. J. Sanders Melnikov's method and averaging // Celestial Mechanics. Vol. 28, Iss. 1-2. P. 171-181.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 18-01-00306), Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 1.3287.2017/PCh)

MSC2010 47A13

On global dynamics of the Duffing equation under quasiperiodic perturbation

A.D. Morozov[1], K.E. Morozov[1], T.N. Dragunov[1]
Lobachevsky State University of Nizhniy Novgorod[1]

УДК 531.36

Математическое моделирование спуска оперенного тела с разным числом лопастей*

Окунев Ю.М.[1], Привалова О.Г.[1], Самсонов В.А.[1]
НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова[1]

Строится математическая модель движения тяжелого оперенного тела на спуске в невозмущенной атмосфере. Оперение тела состоит из одинаковых лопастей. Тело может иметь разное количество лопастей, при этом считается, что обтекание каждой лопасти потоком воздуха не подвергается влиянию соседних лопастей. Лопасти на теле размещаются таким образом, чтобы центры лопастей оказались в плоскости, ортогональной оси тела, на одинаковом расстоянии от нее. Углы между державками, на которых установлены лопасти, одинаковы. Лопасти представляют собой тонкие пластины в форме шайбы или прямоугольника, аэродинамические характеристики которых известны [1]. Проводится численное моделирование режимов спуска тела с разным числом лопастей и разными углами их установки. Случай единственной лопасти рассмотрен в [2].

В работе [3] исследовался спуск осесимметричного оперенного тела с четырьмя лопастями, у которого лопасти были установлены на один и тот же угол, относительно плоскости, содержащей центры лопастей. В работе [4] получены траектории движения центра масс асимметричного тела с четырьмя лопастями.

В настоящей работе исследуется движение оперенного тела с тремя и четырьмя лопастями. Изучается, каким образом изменится движение тела, когда нарушается его симметрия, вследствие того, что одна или две лопасти повернуты на углы разной величины.

В работах [5] было показано, что на спуске осесимметричного тела для некоторых значений его физических и геометрических параметров возникает семейство устойчивых тривиальных режимов авторотации. Установлено, что при тех же параметрах задачи при движении асимметричного тела с тремя и четырьмя лопастями возникает притягивающий нетривиальный режим регулярной прецессии вокруг оси динамической симметрии.

Ранее было получено [3], что если режим авторотации неустойчив при одинаковых значениях установочных углов лопастей, то возникает режим регулярной прецессии, осью которой является вертикаль. Показано, что при изменении значений одного установочного угла лопасти у тела с тремя лопастями, и одного или двух установочных углов лопастей у тела с четырьмя лопастями, при котором теряется симметрия установки оперения, движение центра масс тела на спуске происходит по винтовой линии, у которой имеется «вторичный» винт с вертикальной осью.

Установлено, что при определенном расположении лопастей на теле возможны режимы планирования.

В случае, когда плоскости лопастей лежат в плоскости S, перпендикулярной оси симметрии тела, содержащей центр масс и центры лопастей, существует семейство неизолированных установившихся режимов планирования [3]. Плоскость S может быть наклонена под различными углами к горизонту. На этих режимах тело движется поступательно с постоянной скоростью, углы атаки на лопастях одинаковы.

Определено, что изолированные режимы планирования возникают у тела с четырьмя одинаковыми лопастями, если установить две соседние лопасти на одинаковые углы, а две

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (Проект № 17-08-01366) и (Проект № 18-01-00538)

другие на углы той же величины, но противоположного знака. Угол планирования определяется установочным углом лопасти, плоскость центров лопастей на этом режиме горизонтальна. Планирование происходит в биссекториальных плоскостях, проходящих между осями положительно и отрицательно установленных лопастей.

Установлено, что изолированные режимы планирования возникают и у тела с тремя одинаковыми лопастями, если установить одну лопасть на некоторый угол, другую – на угол той же величины, но противоположного знака, а третью лопасть расположить под нулевым углом. Планирование происходит в плоскостях, проходящих вдоль оси лопасти, установленной под нулевым углом. Угол планирования определяется установочным углом лопасти, плоскость центров лопастей на этом режиме горизонтальна.

Показано, что у тела с четырьмя лопастями, лопасти которого установлены на углы одинаковой величины, но с поочередной сменой знака, возможен режим устойчивого установившегося вертикального спуска с постоянной скоростью. При тех значениях параметров задачи, при которых вертикальных спуск неустойчив, возникает хаотическое движение центра масс тела [6]. Найдены такие значения параметров задачи, при которых центр масс тела с тремя лопастями тоже совершает хаотическое движение.

Литература

1. Табачников В. Г. Стандартные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки // Тр. ЦАГИ. 1974. Вып. 1621. С. 79-93.

2. Овчинников М. Ю. Стационарные движения твердого тела с жесткой лопастью в однородной атмосфере // Изв. РАН. МТТ. 2003. №5. С. 3-23.

3. Окунев Ю. М., Привалова О. Г., Самсонов В. А. О влиянии оперения на характер спуска тяжелого тела // Сб. пленарных и избранных докладов «Восьмого Международного Аэрокосмического Конгресса». Москва: "Перо 2015. С. 120-126.

4. Okunev Yu. M., Privalova O. G., Samsonov V. A. A descent mode of the finned body with asymmetrical pitch angles of blades // Proceedings of 2018 14th International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), STAB 2018, IEEE (Piscataway, NJ, United States). С. 1-2.

5. Привалова О. Г., Окунев Ю. М., Самсонов В. А.Устойчивость движения оперенного тела, авторотирующего в среде // ТРУДЫ МФТИ. 2017. Т. 81, № 6. С. 51-56.

6. Окунев Ю. М., Привалова О. Г., Самсонов В. А. О движении асимметричного оперенного тела // Сб. материалов VI Всероссийской научно-технической конференции «Фундаментальные основы баллистического проектирования». СПб: Изд-во БГТУ, 2018. С. 34-35.

MSC2010 70

Mathematical modeling of the descent of a finned body with different number of blades

Yu.M. Okunev[1], O.G. Privalova[1], V.A. Samsonov[1]
Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University[1]

УДК 517.9

Математическая модель оценки эффективности деятельности фармацевтических организаций

Поверинов А.И.[1], Мамедова Т.Ф.[1]

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет[1]

Одним из условий успешного функционирования предприятия в рыночной экономике является эффективное управление финансовыми ресурсами, в основе которого лежат оценка и анализ. Современный руководитель нуждается в аналитической информации о финансовом состоянии предприятия, являющейся исходным моментом для принятия необходимого управленческого решения [1].

К основным задачам анализа финансового состояния организации относятся:

1) общая оценка финансового состояния;

2) анализ деловой эффективности;

3) анализ финансовых коэффициентов;

4) оптимизация устойчивости финансового состояния организации.

Основными источниками информации для анализа финансового состояния предприятия являются данные финансовой отчетности.

При проведении аналитических расчетов финансового характера используются приемы и методы, заимствованные из математических наук [2].

В настоящее время оценку финансового состояния предприятия проводят, как правило, по следующим направлениям.

1. Анализ ликвидности – это совокупность статей и разделов баланса организации, отражающая скорость вовлечения в денежный оборот средств, вложенные в различные виды имущества и обязательств.

2. Анализ деловой активности. В процессе функционирования любого предприятия происходит процесс непрерывной трансформации одних видов активов в другие.

3. Анализ финансовой устойчивости – это способность организации маневрировать средствами, финансовая независимость, то есть определенное состояние счетов организации, гарантирующее его постоянную платежеспособность.

4. Анализ рентабельности – позволяет давать возможность оценки общей эффективности вложения средств в данное предприятие.

В данной статье рассматриваются аспекты формирования математической модели оценки деловой эффективности предприятия, которая определяется рентабельностью и деловой активностью организации.

Первым этапом комплексной оценки финансового состояния организации является разработка системы экономических показателей. Кроме того, в модель необходимо включить некоторые балансовые уравнения, формально выражающие связь между основными статьями баланса [3]. В результате получим следующую систему уравнений (ограничений).

1. $\dfrac{Y_{BP}}{Y_{OCp}} = \Phi_{\text{Отд}}$ – фондоотдача;
2. $\dfrac{Y_{BP}}{Y_{\text{ДЗ}}} = \text{Об}_{\text{СР.расч}}$ – оборачиваемость средств в расчетах;
3. $\dfrac{Y_{\text{Себ.Р}}}{Y_{\text{Зап}}} = \text{Об}_{\text{Зап}}$ – оборачиваемость запасов;
4. $\dfrac{Y_{\text{ВР}}}{Y_{\text{СК}}} = \text{Об}_{\text{СК}}$ – оборачиваемость собственного капитала;
5. $\dfrac{Y_{\text{ВР}}}{\text{БАЛ}} = \text{Об}_{\text{Сов.К}}$ – оборачиваемость совокупного капитала;
6. $(1 + K_{\text{Кр/УР}})Y_{\text{Себ.р}} = Y_{\text{ЗПр}}$ – затраты в производстве;
7. $\dfrac{Y_{\text{Пр.Р}}}{Y_{\text{ВР}}} = R_{\text{ПР}}$ – рентабельность продукции;
8. $\dfrac{Y_{\text{Пр.Р}}}{Y_{\text{ЗПр}}} = R_{\text{Осн.Д}}$ – рентабельность основной деятельности;
9. $\dfrac{Y_{\text{Пр.Р}}}{\text{БАЛ}} = Y$ – рентабельность совокупного капитала;
10. $\dfrac{Y_{\text{ЧП}}}{Y_{\text{СК}}} = R_{\text{СК}}$ – рентабельность собственного капитала;
11. $Y_{\text{ВР}} - Y_{\text{ЗПр}} = Y_{\text{ПрР}}$ – прибыль от реализации;
12. $Y_{\text{ПрР}}K_{\text{ФХД}} = Y_{\text{Пр.ФХД}}$ – прибыль от финансовой хозяйственной деятельности;
13. $Y_{\text{Пр.ФХД}}K_{\text{ПР}} = Y_{\text{ПР}}$ – прибыль до налогообложения;
14. $Y_{\text{ЧП}} = 0.76Y_{\text{ПР}}$ – чистая прибыль;
15. $Y_{\text{ЧП}} - Y_{\text{Отвл.ср}} = Y_{\text{Нер.ПР}}$ – нераспределенная прибыль;
16. $K_{\text{Нер.Пр}}Y_{\text{ФР}} = Y_{\text{Нер.ПР}}$ – доля нераспределенной прибыли в ФР.

В данном случае имеется переопределенная система, то есть такая в которой количество уравнений больше количества неизвестных и для ее решения необходимо искать псевдорешение используя метод наименьших квадратов.

Решив систему уравнений, получаем *псевдорешение.*

В рассматриваемом случае три наиболее важных для предприятия показателя, которые наиболее полно характеризуют эффективность работы предприятия в течение отчетного периода и отражаются в форме № 2 бухгалтерской отчетности [4]:

– выручка от реализации продукции,

– балансовая прибыль,

– нераспределенная прибыль.

Отклонения от этих показателей и будем рассчитывать в дальнейшем. Тогда показатель θ можно рассчитать следующим образом:

$$\theta = \frac{\Delta_{S2}}{\text{ВР}^R + \text{ПрБ}^R + \text{НерПр}^R},$$

где $\Delta_{S2} = \sqrt{(\text{ВР}^R - \text{ВР}^F)^2 + (\text{ПрБ}^R - \text{ПрБ}^F)^2 + (\text{НерПр}^R - \text{НерПр}^F)^2}$.

Далее мы определяем в какой диапазон попадает полученный показатель и на основе его делаем вывод о том, в каком состояние находится рассматриваемое предприятие.

Затем производится оценка адекватности полученной модели, с помощью среднего относительного отклонения, которое рассчитывается по следующей формуле:

$$\mu = \frac{1}{n} \times \sum_{j=1}^{n} \frac{|Y_j - \overline{Y_j}|}{Y_j} \times 100\%$$

где — соответственно значения задаваемых финансовых показателей и значения финансовых показателей, рассчитанных по данным рассчитанного баланса.

Если среднее относительное отклонение не превышает 15%, построенная модель адекватна иначе требуется корректировка данных. Адекватность модели в данном случае позволит избежать получения противоречивых результатов [5].

Данная математическая модель отвечает требованиям показателей рентабельности и деловой эффективности. Ее использование является эффективным, потому что она позволяет находить оптимальное финансовое состояние организации и нужные решения для ее улучшения.

Литература

1. Мамедова Т.Ф., Егорова Д.К., Десяев Е.В. Об управлении портфелем ценных бумаг // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем: сборник статей X Международной научно-технической конференции / Под ред. И. В. Бойкова. Пенза, 2015. С. 87–90.

2. Мамедова Т.Ф., Ляпина А.А. Алгоритм исследования моделей нелинейной динамики // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2013. № 3 (27). С. 48–57.

3. Поверинов А.И., Кирейчева Е.Ю. Формирование математической модели оценки финансового состояния предприятия [Электронный ресурс]// Огарев онлайн: Электронное периодическое издание для студентов и аспирантов. 2016. № 20. С. 7.

4. Мамедова Т.Ф., Егорова Д.К. Об асимптотическом равновесии некоторых экономических систем // Журнал Средневолжского математического общества. 2013. Т. 15, № 2. С. 55–58.

5. Мамедова Т.Ф., Егорова Д.К., Десяев Е.В. Анализ устойчивости математической модели Лукаса по части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. 2015. Т. 17, № 3. С. 30–36.

MSC2010 91B02

Mathematical model of the efficiency of pharmaceutical organizations

A.I. Poverinov[1], T.F. Mamedova[1]
National Research Ogarev Mordovia State University[1]

УДК 517.958:519.632.4

Распространение тепла в безграничной среде с кусочно-непрерывными свойствами

Понкратова Ю.В.[1]

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет[1]

Имеется безграничная сплошная среда с постоянной теплопроводностью λ_F. В ней находится одна частица с теплопроводностью λ_P. Она представляет собой круг (на плоскости) или шар (в пространстве) радиуса R. Центр частицы находится в начале координат. В среде создан градиент температуры, который далеко от частицы, постоянен и равен T_1 (рис. 1).

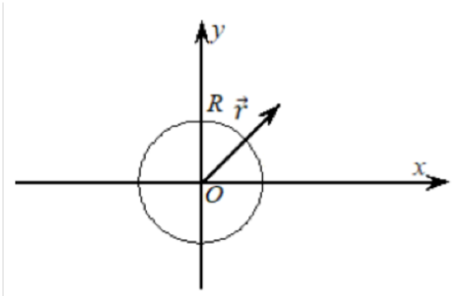

Рис. 1. Одиночная частица в среде с постоянным градиентом температуры.

Требуется получить распределение температуры, возникающее в жидкости и в частице.

Аналитическое решение такой задачи о сплошной среде с единичным включением на плоскости выглядит следующим образом [1]:

$$T_F = T_0 + T_1 x \left[1 + \frac{\lambda_P - \lambda_F}{\lambda_P + \lambda_F}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right], \tag{1}$$

$$T_P = T_0 + \frac{2\lambda_F}{\lambda_P + \lambda_F} T_1 x. \tag{2}$$

Более интересен случай, когда частиц в среде несколько. Но такие задачи решаются либо асимптотическими методами [2], либо численно, а значит, необходимо выявить источники погрешности расчетов и оценить эту погрешность. Сделаем это на примере одиночной частицы. Расчеты будем проводить в универсальной программе конечно-элементного анализа ANSYS.

В данной задаче необходимо найти стационарное распределение температуры, поэтому выбирается тип анализа Steady-State Thermal. Чтобы решить поставленную задачу в пакете ANSYS, нужно заменить бесконечную область на конечную. На плоскости внешняя область выбирается в форме квадрата со стороной H. Как следует из (1), (2), радиус частицы R не влияет на температуру T_P внутри частицы, а температура среды T_F зависит не от R, а от отношения R/r. Поэтому можно рассмотреть частицу в виде круга радиуса $R = 1$ м с центром в начале координат. Распределение температуры зависит не от самих теплопроводностей среды и частицы, а от их отношения. Поэтому можно считать, что $\lambda_F = 1$.

Далее будут рассматриваться возмущения T', вызванные частицей. Чтобы их найти, из аналитического решения (1) нужно вычесть выражение, соответствующее распределению температуры в случае однородной среды:

$$T' = T_F - (T_0 + T_1 x) = T_1 x \left[\frac{\lambda_P - \lambda_F}{\lambda_P + \lambda_F} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right]. \qquad (3)$$

Для оценки точности численного метода будет рассмотрена относительная погрешность в определении T'.

Имеются три источника погрешности:

- погрешность, связанная с заменой бесконечной среды на конечную,
- погрешность метода конечных элементов (МКЭ), используемого при расчете в ANSYS,
- погрешность округления чисел в ЭВМ.

Из них основными являются первые два.

В системе ANSYS можно описать только ограниченную область, поэтому главная наша цель — это нахождение погрешности, связанной с заменой бесконечной среды на конечную. Однако вначале нужно оценить погрешность метода конечных элементов. При его использовании вблизи поверхности контакта «частица-среда» при всех расчетах выполнялось сгущение сетки с помощью инструмента Inflation.

Поскольку аналитическое решение (1) известно, то в качестве граничного условия можно задать точную температуру на границе квадрата. Тогда погрешность первого вида равна нулю и мы можем оценить погрешность МКЭ. Например, при $H = 80$ м и $\lambda_P = 10$ график относительной погрешности T' вдоль одной из прямых, проходящей по квадрату, показан на рис. 2.

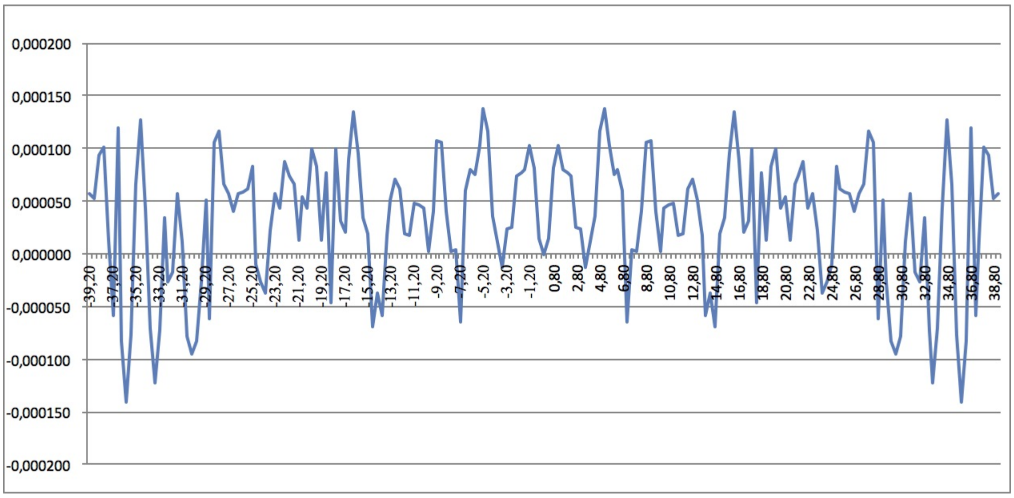

Рис. 2. Оценка погрешности МКЭ.

Если бы точное решение типа (1), (2) было неизвестно, то для описания градиента температуры на противоположных гранях области надо было бы задать постоянное значение температуры T_{left} и T_{right}. Тогда градиент температуры мог быть найден как

$$T_1 \approx \frac{(T_{right} - T_{left})}{H}.$$

Величина относительной погрешности T' вдоль различных прямых $y = const$ внутри квадрата со стороной $H = 20$ м приведена на рис. 3.

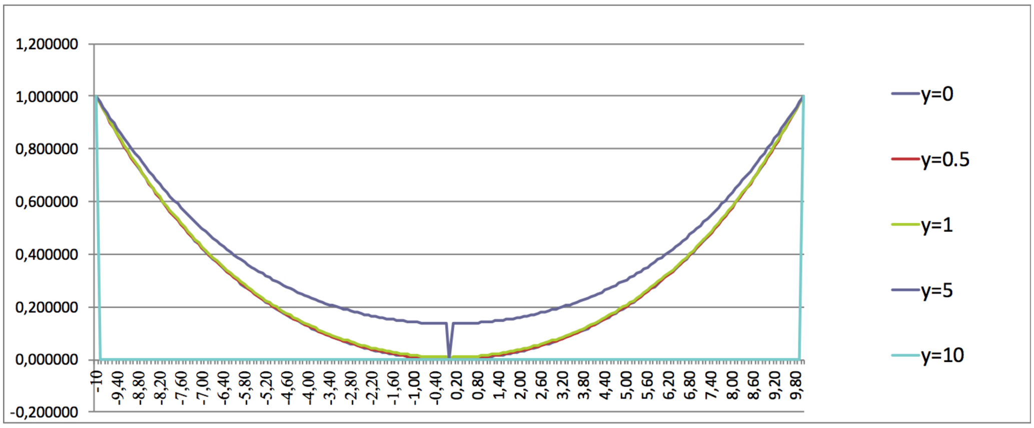

Рис. 3. Относительная погрешность вычислений.

В этих расчетах T_{left} и T_{right} подбирались так, чтобы выполнить равенство $T_1 \approx 5$.

Из него видно, что погрешность метода конечных элементов во много раз меньше погрешности, связанной с заменой бесконечной среды на конечную, то есть основным источником погрешности служит конечность расчетной области.

Кроме того, размер расчетной области должен быть в несколько раз больше той области, где необходимо обеспечить приемлемую погрешность. Например, при $H = 20$ м и $y = 0.5$ м относительная погрешность не превышает 0.05 только при $|x| < 2.5$ м.

Также выяснилось, что относительная погрешность возрастает при «сближении» теплопроводностей среды и частицы, т. е. при $\dfrac{\lambda_P}{\lambda_F} \to 1$.

При решении задачи в пространстве при тех же настройках, что и при решении задачи на плоскости, выбирается внешняя область в форме куба со стороной H и частица в форме шара радиуса R. Дальнейшее изучение погрешности аналогично рассмотренному на плоскости.

Полученные результаты в перспективе позволяют строить расчетные области для численного моделирования распределения температуры в среде с несколькими включениями.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: в 10 т. 3-е изд., перераб. М. : Наука, 1986. Т. 6 : Гидродинамика. 736 с.

2. Сыромясов А. О. Термодинамическое взаимодействие сферических частиц в среде с постоянным градиентом температуры // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4, ч. 3. С. 1158-1160.

MSC2010 35K05, 80A20, 80M10

The propagation of heat in an infinite medium with a piecewise continuous properties

Yu.V. Ponkratova[1]

National Research Ogarev Mordovia State University[1]

УДК 519.6; 517.95

Параллельный алгоритм решения уравнения Кардара-Паризи-Цванга с источником на основе численной оценки континуального интеграла*

Рассадин А.Э.[1], Степанов А.В.[2]

Лаборатория бесконечномерного анализа и математической физики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова[1], Чувашская государственная сельскохозяйственная академия[2]

Один из ключевых вопросов при внедрении нанотехнологий в практику — это вопрос о качестве поверхности твёрдого тела. Чтобы прояснить его, необходимы математические модели временной эволюции поверхности кристалла для различных технологических процессов. В настоящее время наиболее популярным феноменологическим уравнением, применяемым при описании роста кристаллов, является уравнение Кардара-Паризи-Цванга (КПЦ) [1]. Это уравнение было выведено в работе [2] для описания процесса роста поверхности твёрдого тела при эпитаксиальной технологии.

Мы будем рассматривать следующий вариант уравнения КПЦ [2]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = c + \frac{c}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \nu\,\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + Q(x)\,, \tag{1}$$

где $h(x,t)$ — высота поверхности, обладающей цилиндрической образующей, c — скорость роста поверхности, ν — коэффициент поверхностной диффузии и $Q(x)$ — дополнительный источник напыляемого вещества в окрестности поверхности.

Уравнение (1) при $-\infty < x < +\infty$ необходимо дополнить начальным условием:

$$h(x,0) = h_0(x)\,, \tag{2}$$

соответствующим начальному профилю исследуемой поверхности.

Хорошо известно [1, 2], что уравнение КПЦ можно существенно упростить подстановкой вида:

$$h(x,t) = c\,t + \frac{2\,\nu}{c}\,\ln\varphi(x,t)\,, \tag{3}$$

сводящей исходное уравнение (1) к линейному параболическому уравнению для новой неизвестной функции $\varphi(x,t)$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \nu\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{c\,Q(x)}{2\,\nu}\,\varphi\,, \tag{4}$$

однако начальное условие (2) заменой (3) трансформируется нелинейным образом:

$$\varphi(x,0) \equiv \varphi_0(x) = \exp\left(c\,\frac{h_0(x)}{2\,\nu}\right). \tag{5}$$

Если для уравнения (4) известна его функция Грина (ФГ) $G(x,\xi;t)$, то решение задачи Коши (4)-(5) записывается с её помощью следующим образом:

$$\varphi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi;t)\,\varphi_0(\xi)\,d\xi\,. \tag{6}$$

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-08-01356-а.

При $t > 0$ ФГ $G(x, \xi; t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{c\,Q(x)}{2\,\nu}\,G\,, \tag{7}$$

совпадающему с уравнением (4) для функции $\varphi(x,t)$, а при $t = 0$ — начальному условию:

$$G(x, \xi; 0) = \delta(x - \xi)\,, \tag{8}$$

где $\delta(x-\xi)$ — дельта-функция Дирака [3].

При достаточно общих предположениях о функции $Q(x)$ точное решение уравнения (7) для ФГ с начальным условием (8) задаётся формулой Фейнмана-Каца [4]:

$$G(x, \xi; t) = \int_{C(t,\,x-\xi)} \exp\left[-\frac{c}{2\,\nu}\int_0^t Q(\xi + X(\tau))d\tau\right] d_{\,w(t,\,x-\xi)}X, \tag{9}$$

где $d_{\,w(t,\,x-\xi)}X$ — условная мера Винера, а $C(t,\,x-\xi)$ — пространство непрерывных на отрезке $[0,\,t]$ функций, удовлетворяющих условиям: $X(0) = 0$ и $X(t) = x - \xi$.

Для вычисления континуальных интегралов вида (9) существуют приближённые формулы, точные на множестве функциональных многочленов произвольной заданной степени [5], однако в данной работе для его оценки мы применим метод, который не требует глубокого знания функционального анализа, а именно, заметим, что для гауссовых функций $f^\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{x^2}{2\,\sigma^2}\right)$ согласно [3]:

$$\lim_{\sigma\to 0+} f^\sigma(x-\xi) = \delta(x-\xi)\,, \tag{10}$$

то есть слабый предел последовательности функций $f^\sigma(x-\xi)$ в левой части формулы (10) даёт начальное условие (8) к уравнению (7) на ФГ.

Это означает, что если построить однопараметрическое семейство $G^\sigma(x,\xi;t)$ решений уравнения (7), удовлетворяющее начальному условию:

$$G^\sigma(x, \xi; 0) = f^\sigma(x-\xi)\,, \tag{11}$$

то ФГ $G(x,\xi;t)$ уравнения (7) есть не что иное как слабый предел последовательности функций $G^\sigma(x,\xi;t)$ при $\sigma \to 0+$.

Для нахождения функций $G^\sigma(x,\xi;t)$ перепишем уравнение (7) следующим образом:

$$\frac{\partial \ln G^\sigma}{\partial t} = \nu\left[\frac{\partial^2 \ln G^\sigma}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \ln G^\sigma}{\partial x}\right)^2\right] + \frac{c\,Q(x)}{2\,\nu} \tag{12}$$

и используем метод степенных рядов [6], то есть будем искать решение уравнения (12) в виде:

$$\ln G^\sigma(x,\xi;t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^\sigma(t;\xi)\,x^n\,, \tag{13}$$

где $g_n^\sigma(t;\xi)$ — новые неизвестные функции.

Подставляя разложение (13) в уравнение (12), получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений на функции $g_n^\sigma(t;\xi)$:

$$\frac{\partial g_n^\sigma(t;\xi)}{\partial t} = \nu(n+1)(n+2)g_n^\sigma(t;\xi) + \nu\sum_{k=0}^{n}(k+1)(n-k+1)g_{k+1}^\sigma(t;\xi)g_{n-k+1}^\sigma(t;\xi) + \frac{c\,Q_n}{2\,\nu}\,, \tag{14}$$

где Q_n — это коэффициенты разложения в степенной ряд источника $Q(x)$:

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \, x^n \,, \tag{15}$$

а переменная ξ в этой системе играет роль параметра.

Начальные условия для системы уравнений (14) легко получаются из формулы (11):

$$g_0^{\sigma}(0;\xi) = \ln \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma} - \frac{\xi^2}{2\,\sigma^2} \,,\ g_1^{\sigma}(0;\xi) = \frac{\xi}{2\,\sigma^2} \,,\ g_2^{\sigma}(0;\xi) = -\frac{1}{2\,\sigma^2} \,,\ g_n^{\sigma}(0;\xi) = 0 \ (n \geq 3)\,. \tag{16}$$

Для того, чтобы численно решить систему (14), её надо «оборвать», то есть положить $g_n^{\sigma}(t;\xi) \equiv 0$ при больших n $(n > N)$ — что согласуется с характером начальных условий (16) к ней.

Далее, пусть задано достаточно малое $\sigma > 0$, а начальное условие (5) обладает компактным носителем, таким, что $\operatorname{supp}\ \varphi_0(x) \subset [-L, L]$, тогда для оценки ФГ по формуле:

$$\ln G(x,\xi;t) \approx \sum_{n=0}^{N} g_n^{\sigma}(t;\xi)\, x^n \,, \tag{17}$$

получающейся из степенного ряда (13) оставлением его N-частичной суммы, надо задать на отрезке $[-L, L]$ сетку по переменной ξ с N_ξ узлами и решить N_ξ идентичных систем из N обыкновенных дифференциальных уравнений, являющихся результатом усечения системы (14), с начальными условиями (16), меняющимися при переборе N_ξ значений ξ на этой сетке.

Таким образом, символическая запись приближённого численно-аналитического решения задачи Коши (4)-(5) имеет вид:

$$\varphi(x,t) \approx \int_{-L}^{L} \exp\left[\sum_{n=0}^{N} g_n^{\sigma}(t;\xi)\, x^n\right] \varphi_0(\xi)\, d\xi\,. \tag{18}$$

Эта запись имеет следующий смысл: пусть на отрезке $[-L_x, L_x]$ задана сетка по переменной x с N_x узлами, тогда в каждой точке этой сетки значение вспомогательной функции $\varphi(x,t)$ в заданный момент времени t вычисляется по квадратурной формуле [7], например, по формуле трапеций, применённой к правой части выражения (18). При этом если радиус сходимости степенного ряда (15) равен R, то, очевидно, должно выполняться неравенство $L_x \leq R\,$.

Численное решение усеченной системы удобно проводить с помощью технологии CUDA параллельного программирования корпорации NVIDIA. Для одновременного нахождения решений N_ξ таких систем можно использовать GRID-технологию [8]. Ту же технологию можно применить и для оценки интеграла (18), при этом сетка по переменной ξ может быть неравномерной. Значения же решения $h(x,t)$ исходного уравнения КПЦ на сетке по переменной x пересчитываются по значениям вспомогательной сеточной функции $\varphi(x,t)$ по формуле (3).

Таким образом, в докладе описан параллельный алгоритм решения уравнения КПЦ с источником, не зависящим от времени, на основе численной оценки континуального интеграла по условной мере Винера методом степенных рядов.

Литература

1. Gubinelli M., Perkowski N. KPZ Reloaded // Communications in Mathematical Physics. 2017. V. 349, № 1. P. 165-269.

2. Kardar M., Parisi G., Zhang Y. C. Dynamical scaling of growing interfaces // Physical Review Letters. 1986. V. 56. P. 889-892.

3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.

4. Гельфанд И.М., Яглом А.М. Интегрирование в функциональных пространствах и его применения в квантовой физике // УМН. 1956. Т. 11, Вып. 1 (67). С. 77–114.

5. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю., Шахбагян Р.Р. Об одном методе вычисления континуальных интегралов без решеточной дискретизации // Матем. моделирование. 1989. Т. 1, № 8. С. 139–157.

6. Красовский А.А. Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем. М.: Наука, 1974. 232 с.

7. Никольский С.М. Квадратурные формулы. М.: Наука, 1974. 224 с.

8. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. СПб.: БХВ-Петербург, 2004. 608 с.

MSC2010 65Y05; 35K55

The parallel algorithm for solving of the Kardar-Parisi-Zhang equation with a source on the basis of numerical estimation of path integral

A.E. Rassadin[1], A.V. Stepanov[2]

Laboratory of infinite-dimensional analysis and mathematical physics, faculty of mechanics and mathematics, Lomonosov Moscow State University[1], Chuvash State Agricultural Academy[2]

УДК 517.9

Косые произведения над квазипериодическими потоками на торе

Сахаров А.Н.[1]

Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия[1]

Доклад посвящен вопросам топологической классификации потоков на трехмерном торе, порождаемых системами вида

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega}, \qquad \dot{\theta} = a(\boldsymbol{\varphi}, \theta), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)$ – двумерный вектор угловых координат на торе $\mathbb{T}^2$, θ – угловая координата на окружности S^1, вектор $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$ имеет рационально независимые компоненты, функция $a(\boldsymbol{\varphi}, \theta)$ непрерывная и периодическая с периодом 2π по всем переменным. Ясно, что (1) задает поток на расслоении $\mathbb{T}^2 \times S^1$ с линейным потоком на базе $\mathbb{T}^2$. Поднятие этого потока на универсальное накрытие тора $\mathbb{T}^3$ представимо в виде

$$\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\varphi}_0) = \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\omega} t, \qquad \theta(t, \boldsymbol{\varphi}_0, \theta_0) = \theta_0 + r(t, \boldsymbol{\varphi}_0, \theta_0),$$

где $r(t, \boldsymbol{\varphi}, \theta)$ – периодическая функция по переменным $\boldsymbol{\varphi}$ и θ.

Топологическая классификация строится относительно отношения послойной топологической эквивалентности и основывается на следующих свойствах таких потоков:

1. Поток имеет *вектор вращения* $\boldsymbol{\rho} = (\omega_1, \omega_2, \varrho)$, где число $\varphi = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{r(t, \boldsymbol{\varphi}_0, \theta_0)}{t}$ не зависит от начальных данных $(\boldsymbol{\varphi}_0, \theta_0)$ [1].

2. Имеет место альтернатива: либо существует постоянная $c > 0$ такая, что $D(t) = |\widetilde{f}^t(\boldsymbol{\varphi}_0, \theta_0) - \theta_0 - t\varrho| \le c$ (*регулярный* поток), либо существует последовательность $\{t_n\}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} D(t_n) = \infty$ (*нерегулярный* поток).

Регулярность потока – это частный случай условий справедливости теоремы Готшалка-Хедлунда о существовании непрерывных решений аддитивных когомологических уравнений [2].

Литература

1. Веременюк В.В. Формула для числа вращения уравнения первого порядка с квазипериодической по времени правой части // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 1. С. 158–159.

2. Gottschalk W., Hedlund G. Topological dynamics // Providence. Amer. Math. Soc. 1955. P. 151.

MSC2010 37C55

Skew products over quasiperiodic torus flows

A.N. Sakharov[1]
Nizhny Novgorod State Agricultural Academy[1]

УДК 534.13

Математическое моделирование свободных и вынужденных колебаний датчика давления, находящегося в тепловом поле, под действием внутреннего давления и внешних периодических сил

Сулейманов И.Р.[1]

Ульяновский государственный университет[1]

В данной работе рассматриваются способы математического моделирования и исследования свободных и вынужденных колебаний датчика давления [1, 2], находящегося в тепловом поле, под действием внутреннего давления и внешних периодических сил.

Цель работы заключается в исследовании и анализе внешних периодических сил, влияющих на поддержание резонанса изгибных колебаний стенок датчика, возникающих вследствие воздействия внешнего источника электромагнитных волн определенной частоты.

Проводится исследование частотного датчика давления для обеспечения его требуемой точности и чувствительности при воздействии различных внешних факторов, способствующих образованию «паразитных» частот. Также требуется разработать соответствующие способы компенсации влияния некоторых внешних воздействующих факторов.

При решении поставленной задачи использовались методы математического моделирования и исследования физических процессов с помощью комплекса программ ANSYS Workbench [3, 4], который позволяет выполнять расчёты в области газогидродинамики, проводить модальный анализ и оценивать механические деформации.

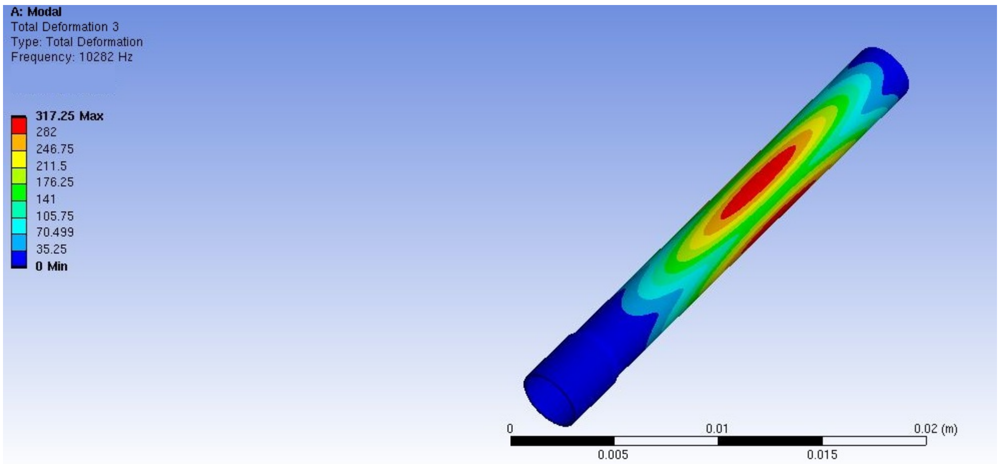

Рис. 1. Распределение величин деформаций на 4 форме собственных колебаний (частота 10282 Гц).

Оценка влияния температуры и давления на поддержание резонанса изгибных колебаний стенок датчика проводилась только для установившегося режима работы. Результаты математического моделирования результатов воздействия температуры(от +70°C до -60°C) и давления (от 25 мм рт.ст. до 120 мм рт.ст.) приведены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты математического моделирования.

Измеряемое давление P, мм рт.ст	Температура T, ^{0}C		
	+70	-60	+20
25	11093	11294	11171
900	12298	12468	12364
1200	13780	13918	13834

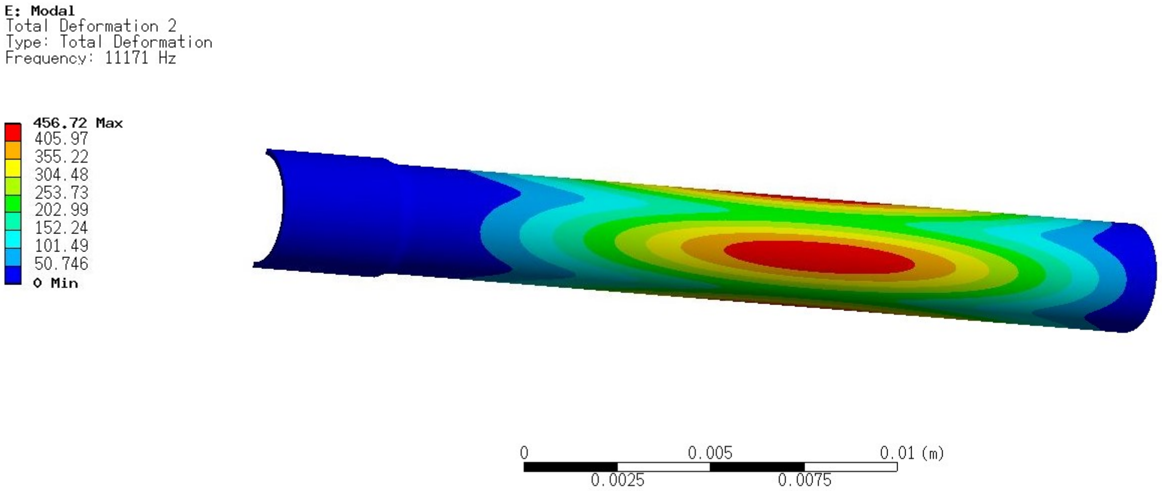

Рис. 2. Форма собственных колебаний на частоте 11171 Гц.

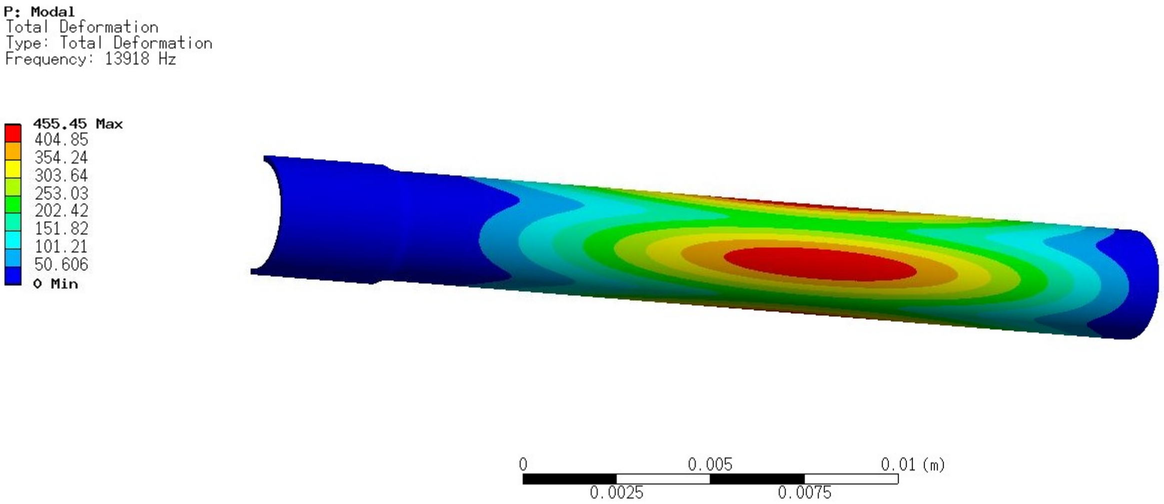

Рис. 3. Форма собственных колебаний на частоте 13918 Гц.

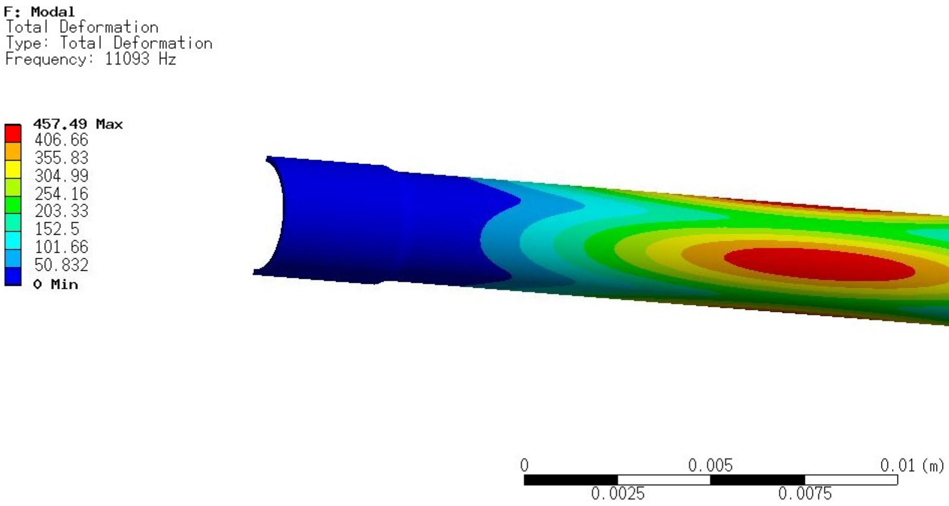

Рис. 4. Форма собственных колебаний частоте 11093 Гц.

Проведенное математическое моделирование влияния температуры и давления на измерение частоты собственных колебаний резонатора показало, что при уменьшении температуры от номинальной +20 °С до -60 °С и с увеличением измеряемого давления на преобразователь частота собственных колебаний увеличивается с 11171 Гц до 13918 Гц, а при увеличении температуры преобразователя до +70 °С с уменьшением измеряемого давления частота собственных колебаний уменьшается до 11093 Гц. Как видно из приведенных результатов, наблюдается существенная аддитивная погрешность при воздействии температуры и давления. Так, при уменьшении температуры на 80 °С при постоянном давлении 25 мм рт.ст., уход частоты собственных колебаний составляет 78 Гц при общей девиации частоты 7037 Гц, что составляет 1,1%.

При проведении исследования были получены следующие результаты.

1. Разработаны математические модели новых конструктивных вариантов исполнения частотного датчика механических величин, позволяющие увеличить чувствительность датчика.

2. Проведено исследование влияния внешних воздействующих факторов, таких как температура и давление, на погрешность датчика давления

3. Определена зависимость частоты собственных колебаний датчика от прикладываемого давления для формы собственных колебаний, соответствующей полуволне синусоиды по длине вибрирующей цилиндрической стенки датчика.

4. Проведена оценка динамических свойств датчика давления посредством изучения его свободных колебаний.

5. Проведено исследование вынужденных колебаний датчика давления с учетом полученных данных о характере его свободных колебаний.

6. Построена амплитудно-частотная характеристика проектируемого датчика давления. С ее помощью проведено исследование наличия резонанса изгибных колебаний цилиндрической части датчика давления в заданном частотном диапазоне, определяющего эффективную работу датчика.

7. Использование интегральных преобразований, нано-моделей и моделей механики деформируемого твердого тела, связанных с ортогональными финитными функциями, а также со смешанными вариационными принципами и с численными методами [5-7], создает потенциал дальнейшего повышения уровня проектирования частотных датчиков давления.

Литература

1. Сорокин М.Ю. Моделирование частотного датчика давления // Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке, технике и экономике: труды международной конференции. Ульяновск: УлГТУ, 2003. Т. 3. С. 139–141.

2. Фрайдеи Дж. Современные датчики. Справочник. (Текст) /перевод с англ. Ю.А. Заболотной / под ред. ЕЛ. Свинцова. М.: Техносфера, 2005. 580 с.

3. Леонтьев Н.В. Применение системы ANSYS к решению задач модального и гармонического анализа. Учебно-методический материал по программе повышения квалификации «Информационные системы в математике и механике». Нижний Новгород, 2006. 101 с.

4. Бруяка В. А. Инженерный анализ в ANSYS Workbench. Самара: Самар. гос.техн. ун-т, 2010. 234 с.

5. Леонтьев В.Л., Риков Е.А. Интегральные преобразования, связанные с ортогональными финитными функциями, в задачах спектрального анализа сигналов // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, № 7. С. 93-100.

6. Леонтьев В.Л., Михайлов И.С. О построении потенциала взаимодействия атомов, основанном на ортогональных финитных функциях // Нано- и микросистемная техника. 2011. № 9 (134). С. 48-50.

7. Леонтьев В.Л., Мелентьев А.Ю. Сеточные методы расчета криволинейных стержней // Математическое моделирование. 2003. Т. 15, № 10. С. 95.

MSC2010 0071A

Mathematical modeling of free and forced oscillations of a pressure sensor in a thermal field, under the action of internal pressure and external periodic forces

I.R. Suleymanov[1]

Ulyanovsk State University[1]

УДК 519.63

Моделирование процессов в порах зерна катализатора

Узянбаев Р.М. [1,2], Губайдуллин И.М.[1,3], Фасхутдинова Р.И.[3]

Уфимский государственный нефтяной технический университет[1], Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Огарёва[2], ИНК УФИЦ РАН[3]

Процесс импортозамещения программного обеспечения позволяет поднять на качественно высокий уровень математическое моделирование. С одной стороны, появились новые технологические и конструктивные решения для моделирования самого объекта или процесса, а с другой стороны, усовершенствовались информационно-компьютерные технологии, такие как теория анализа и хранения больших данных, параллельные вычисления, 4D моделирование. Математическое описание каталитических процессов и аппаратов с помощью дифференциальных уравнений было предложено в середине прошлого века и успешно развивалось до 90-х гг. Но уровень и точность вычислительной техники не позволяли адекватно численно решать сложные уравнения в частных производных, которые описывали процессы тепло- и массопереноса в порах зерна катализатора. Уже на начальном этапе необходимо численно решать уравнения с использованием очень мелкого шага, например, для расчёта концентрации химически реагирующих веществ по радиусу зерна катализатора. Таким образом, актуальной задачей является модификация параметров математических моделей сложных процессов на более глубоком уровне (детализированные химические превращения в порах зерна), реализация параллельных эффективных алгоритмов, расчет нестационарных режимов работы каталитических процессов и аппаратов. Более детально разработаны двухфазные математические модели, особенно системы газ-твёрдое. К числу таких относится окислительная регенерация – процесс контролируемого выжига коксовых отложений в порах дезактивированного катализатора.

Стратегия моделирования заключается в последовательном исследовании и анализе основных закономерностей регенерации на моделях различных уровней: кинетическом [1], зерна и слоя катализатора, контактного аппарата, агрегата в целом.

Основной вопрос, интересующий исследователей, – какие перегревы возможны при регенерации зерен катализатора в зависимости от выбора начальных условий: массы отложившегося кокса, размера зерна, температуры газа и содержания в нем кислорода. Другой важный вопрос – оценка влияния процессов переноса тепла и вещества в порах зерна на характер и скорость выжига кокса.

В разработанной модели учитывается перенос компонентов по зерну катализатора как за счет диффузии, так и стефановским потоком. При построении модели сделаны допущения, обычно принимаемые в литературе [2]: 1) зерно катализатора сферическое, его размер и структура пор не изменяются в ходе процесса; 2) теплофизические параметры, коэффициенты тепломассопереноса и обмена, энергии активации инвариантны относительно изменении температуры; 3) температура зерна и содержащегося в его порах газа в любой точке одинаковы; 4) массой газа в порах по сравнению с массой зерна катализатора можно пренебречь. Единственное дополнительное допущение сделано при выводе соотношений — отложения кокса имеют вид гранул, число которых в ходе регенерации не меняется.

С учетом сказанного математическое описание процесса регенерации на зерне катализатора представляется следующей системой дифференциальных уравнений параболического типа.

Запишем уравнения материального и теплового балансов для зерна катализатора:

$$\varepsilon_k \frac{dy_i}{dt} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D^* \frac{\partial y_i}{\partial r} - r^2 \mu y_i) + \frac{\gamma_k S_k}{C_0}\sum_{j=1}^{J} \nu_{ij} W_j, \tag{1}$$

$$C_k \frac{\partial T_k}{\partial t} = \frac{\lambda}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{\partial T_k}{\partial r}) + \gamma_k S_k \sum_{j=1}^{J} Q_j W_j, \tag{2}$$

с начальными и граничными условиями: $t = 0 :\ y_i = 0,\ T_k = T_r;\ r = 0 :\ D^* \dfrac{\partial y_i}{\partial r} = 0,\ \lambda^* \frac{\partial T_k}{\partial r} = 0;\ r = R_k :\ D^* \dfrac{\partial y_i}{\partial r} - \mu_R;\ y_i = \beta(x_i - y_i) - \mu_R Y_i$, где T_k, T_r, T_0 – температуры катализатора, газа и на входе в слой, K; ε_k – пористость зерна; D^* – эффективный коэффициент диффузии в порах зерна, $\frac{\text{м}^2}{\text{с}}$; λ^*, λ_{ck} – эффективные коэффициенты теплопроводности зерна и слоя катализатора, $\frac{\text{Вт}}{(\text{м К})}$; β, α – коэффициенты массо- и теплообмена на входе в слой, м/с, (^2K); C_k – объемная теплоемкость катализатора, Дж/м$^3 K$; Q – тепловые эффекты скоростей стадий химического превращения, Дж/моль; μ – стефановский поток, м/с, r – радиус зерна катализатора, мм; x_i, y_i – концентрация компонентов в окружещей зерно газовой фазе и порах зерна, мольные доли; S_k – удельная поверхность коксовых гранул, м^2/г; y_k – насыпная плотность катализатора, г/м^3; C_0 – мольная плотность газа, моль/м^3.

Систему уравнений (1)-(2) замыкает уравнение для количества кокса на катализаторе и компонентов в объеме коксовых отложений:

$$\frac{dq_c}{dt} = -M_c S_k (w_2 + w_3 + w_5), \tag{3}$$

$$\frac{dz_i q_c}{dt} = \frac{S_k k_I(T)\rho_c(\theta_i^* - zi)}{R_c}\ (i = 1, 2; I = i + 5), \tag{4}$$

с начальными условиями: $t = 0 :\ q_c = q_c^0,\ z_1 = z_1^0,\ z_2 = 0$; где q_c – содержание кокса, г/г; M_c – молекулярная масса кокса, г/моль; ρ_c – плотность кокса, г/м^3; z_i – объемные компоненты, мольные доли; q_c^0 – начальное содержание кокса.

$$\theta_1^* = \alpha_H \theta_1;\ \theta_2^* = \alpha_O \theta_2;$$

$$\alpha_H = 1/6; \alpha_O = 4/3;$$

$$R_c = R_0(q_c/qc^0)^{1/3};\ S_c = S_0(q_c/qc^0)^{2/3};$$

где θ_i^* – количество адсорбированного кокосом водорода и кислорода;R_c, S_k – радиус и удельная поверхность коксовых гранул; R_0, S_0 – начальный радиус и удельная поверхность коксовых гранул.

Литература

1. Губайдуллин И.М., Мусина А.Е., Узянбаев Р.М. Моделирование процесса пиролиза пропана и пропан-пропиленовой фракции в среде MATLAB // Вестник Башкирского университета. 2018. Т. 23, № 4. С. 1114-1121.

2. Балаев А.В., Дробышевич В.И., Губайдуллин И.М., Масагутов Р.М. Исследование волновых процессов в регенераторах с неподвижным слоем катализатора // В кн.: Распространение тепловых волн в гетерогенных средах. Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1988. С. 233–246.

MSC2010 35K10

Modelling of the processes at the pores of a catalyst grain

R.M. Uzyanbaev[1,2], I.M. Gubaydullin[1,3], R.I. Faskhutdinova[3]

Ufa State Petroleum Technological University[1], National Research Mordovia State University[2], Institute of Petrochemistry and Catalysis of the Russian Academy of Science[3]

УДК 519.65

Анализ информативности экспериментальных данных на примере задачи идентификации фуллеренсодержащих продуктов

Хашпер Б. Л. [1], Спивак С. И. [1], Кантор О. Г. [2], Колесов С. В. [3]

Башкирский государственный университет[1], Уфимский государственный нефтяной технический университет[2], Институт органической химии УФИЦ РАН[3]

При восстановлении параметров математических моделей стандартными методами параметрической идентификации часто возникают случаи, когда найденные значения не удовлетворяют некоторым условиям, вытекающим из физического смысла параметров [1]. Такая ситуация может возникнуть в силу отсутствия достаточного количества экспериментальных данных или наличия в экспериментальных данных некоторых погрешностей. Оценка этих погрешностей представляет интерес для исследователя. Также важно анализировать информационную ценность измерений и выявлять наиболее недостоверные экспериментальные данные, которые следует уточнить при наличии соответствующих возможностей или исключить из рассмотрения при построении функциональных зависимостей. Целью работы является разработка и реализация алгоритма получения приближенных значений параметров линейных зависимостей по экспериментальным данным на примере задачи определения содержания фуллерена и его замещенных производных в смеси фуллеренсодержащих продуктов.

Для количественного анализа содержания фуллерена в смесях, как правило, применяется метод УФ спектрометрии [2]. Для расчета концентраций фуллерена и продуктов его замещения можно применять закон Бугера-Ламберта-Бера (1) и принцип аддитивности, что позволяет получить уравнение Фирордта (2).

$$\lg\left(\frac{I}{I_0}\right) = A = \varepsilon^\lambda lc, \tag{1}$$

где I_0 – интенсивность падающего потока, l– интенсивность падающего потока, ε^λ – измеряемое значение оптической плотности раствора при длине волны λ, A – молярные экстинкции ядер вещества при длине волны λ, c – мольные концентрации соответствующих ядер C_60.

$$A^\lambda = \sum_{i=1}^{m} A_i^\lambda = l\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^\lambda c_i, \tag{2}$$

Для m-компонентной смеси определим m аналитических длин волн. И для каждой длины волны выпишем уравнение Фирордта. Получим систему уравнений Фирордта (3).

$$\begin{gathered} A^{\lambda_1} = \varepsilon_1^{\lambda_1} c_1 l + ... + \varepsilon_m^{\lambda_1} c_m l \\ .... \\ A^{\lambda_m} = \varepsilon_1^{\lambda_m} c_1 l + ... + \varepsilon_m^{\lambda_m} c_m l \end{gathered} \tag{3}$$

Введем обозначение (4):

$$a_{ij} = \varepsilon_j^{\lambda_i} l, i, j = \overline{i, m} \tag{4}$$

Имеем систему линейных уравнений $AX = B$. A и B определены экспериментальным путем. $A = (a_{ij})$ и $B = (b_i)$, $i = 1, ..., m, j = 1, ..., n$. Неизвестными модели являются концентрации X.

Предположим, что нахождение X стандартными методами дает результаты, не удовлетворяющие некоторым ограничениям модели из-за наличия неточностей в экспериментальных данных. В этом случае для определения приближенного решения предлагается метод, который заключается в сведении исходной системы линейных уравнений к задаче линейного программирования [3]. При этом предполагается, что на параметры модели X наложены условия неотрицательности. Будем считать, что параметры модели удовлетворяют некоторой заданной системе ограничений $CX >= D$, наличие которой, например, обусловлено необходимостью соблюдения материального баланса. Определение параметров модели X, удовлетворяющих всем ограничениям модели, будем осуществлять на основе задачи линейного программирования (5), в которой целевая функция задает предельно допустимую погрешность аппроксимации измерений ξ:

$$\xi \to \min$$

$$|AX - B| \leq \xi \tag{5}$$

$$CX \geq D$$
$$X \geq 0$$

где $C = (c_{lj})$ – матрица, состоящая из коэффициентов при параметрах модели в системе ограничений $(l = 1, ..., k, j = 1, ..., n)$, $D = (d_i)$ – вектор-столбец, элементы которого – концы промежутков значений параметров модели $(l = 1, ..., k)$, $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^{\mathrm{T}}$ – параметры модели, ξ – предельно допустимая погрешность описания измерений.

Предположим, что в каждом элементе матрицы A и столбца B присутствуют погрешности. Получить истинные значения A' и B' можно умножением каждого элемента A и B на неизвестные коэффициенты.

$$A' = \begin{pmatrix} \gamma_{11}a_{11} & ... & \gamma_{1m}a_{1m} \\ ... & ... & ... \\ \gamma_{m1}a_{m1} & ... & \gamma_{mm}a_{mm} \end{pmatrix},$$
$$B' = \begin{pmatrix} \delta_1 b_1 \\ ... \\ \delta_m b_m \end{pmatrix}.$$

В случае наличия погрешности одновременно в A и B задача (5) становится нелинейной. Если известен вектор X, расчет погрешностей γ и δ можно осуществлять на основе следующего алгоритма.

Алгоритм определения содержания фуллерена и его производных в смесях содержит следующие шаги.

1. Рассчитываются предельно допустимая погрешность аппроксимации ξ и поправочные коэффициенты γ и δ.

$$\xi \to \min$$

$$|A'\overline{x} - B'| \leq \overline{\tau}$$

$$|\delta_i - 1| \leq \xi, i = \overline{1,m} \qquad (6)$$

$$|\gamma_{ij} - 1| \leq \xi, i,j = \overline{1,m}$$
$$\delta_i \geq 0, \gamma_{ij} \geq 0, \xi \geq 0, i,j = \overline{1,m}$$

В задаче (6) $\overline{\tau}$ – заданный порог точности в уравнениях Фирордта. Оптимальное значение целевой функции обозначим ξ^*.

2. При фиксированной предельно допустимой погрешности аппроксимации рассчитываются минимальные и максимальные значения каждого поправочного коэффициента.

$$\gamma_{ij} \to \min(\gamma_{ij} \to \max, \delta_i \to \min, \delta_i \to \max), i,j = \overline{1,m}$$
$$|A'\overline{x} - B'| \leq \overline{\tau}$$
$$|\delta_i - 1| \leq \xi^*, i = \overline{1,m}$$
$$|\gamma_{ij} - 1| \leq \xi^*, i,j = \overline{1,m}$$
$$\delta_i \geq 0, \gamma_{ij} \geq 0, i,j = \overline{1,m}$$

Таким образом, для каждого коэффициента получим интервалы значений $[ymin_{ij}; ymax_{ij}]$, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$.

(На последующих этапах осуществляется уточнение интервалов значений искомых параметров.)

3. Посчитаем длину интервалов для каждого параметра.

$$\Delta_{ij} = ymax_{ij} - ymin_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}.$$

4. Если $\Delta_{ij} < 0.1$, будем считать, что параметр γ_{ij} не сильно изменяется и может быть зафиксирован.

Далее выполняются следующие итерации сначала из минимальной, затем из максимальной точки.

1 итерация

5. Зафиксируем все γ_{ij}, у которых $\Delta_{ij} < 0.1$, равными $ymin_{ij}(ymax_{ij}), i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$. Остальные параметры γ_{ij} отсортируем по возрастанию Δ_{ij}. Разделим их на 2-4 группы по 2-4 параметра в каждом (внутри одной группы должны быть γ_{ij} с близкими значениями Δ_{ij}).

6. Зафиксируем все значения γ_{ij} равными $ymin_{ij}(ymax_{ij})$, кроме параметров первой группы. Будем решать задачи линейного программирования, подставляя разные значения параметров для первой группы. Рассмотрим наборы значений параметров первой группы, для которых получилось наименьшее значение ξ. Получим новый диапазон $[y^*min_{ij}; y^*max_{ij}]$ для параметров первой группы.

Возможные варианты:

1) $[y^*min_{ij}; y^*max_{ij}] \subset [ymin_{ij}; ymax_{ij}]$;

2) $y^*min_{ij} = y^*max_{ij}$ (нашлось точечное значение);

3) $[y^*min_{ij}; y^*max_{ij}] = [ymin_{ij}; ymax_{ij}]$.

Повторим эту процедуру для каждой группы (все значения γ_{ij} фиксируются равными $ymin_{ij}(ymax_{ij})$, параметры группы варьируются в диапазоне $[ymin_{ij}; ymax_{ij}]$.

В результате получим новые диапазоны $[y^*min_{ij}; y^*max_{ij}]$ для всех параметров всех групп, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$.

2 итерация

5^* шаг. Повторяем 5 шаг. Кроме параметров, зафиксированных на 5 шаге, зафиксируем параметры, у которых $y^*min_{ij} = y^*max_{ij}$ (если такие есть).

6^* шаг. Повторяем 6 шаг, заменяя на $[ymin_{ij}; ymax_{ij}]$ на $[y^*min_{ij}; y^*max_{ij}]$, $[y^*min_{ij}; y^*max_{ij}]$ на $[y^{**}min_{ij}; y^{**}max_{ij}]$.

Повторяем шаги 5-6, пока все интервалы по всем параметрам всех групп не совпадут с интервалами предыдущей итерации:

$$[y^{**\cdots*}min_{ij}; y^{**\cdots*}max_{ij}] = [y^{*\cdots*}min_{ij}; y^{*\cdots*}max_{ij}], i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$$

(слева количество звездочек равно номеру итерации, справа количество звездочек равно номеру предыдущей итерации).

Из всех, полученных наборов интервалов $[y^*min_{ij}; y^*max_{ij}]$, $[y^{**}min_{ij}; y^{**}max_{ij}]$, $\ldots$, $[y^{**\cdots*}min_{ij}; y^{**\cdots*}max_{ij}]$ (количество звездочек равно номеру итерации), $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$, выбираем набор интервалов, при котором получается наименьшее значение ξ.

Проведена численная реализация разработанного алгоритма. Получены количественные оценки погрешностей экспериментально определенных коэффициентов экстинкции и оптической плотности раствора, содержащих в себе неточности измерений. Рассчитаны концентрации компонентов в фуллеренсодержащих смесях с учетом найденных погрешностей. Анализ полученных результатов показал, что применение предлагаемого алгоритма позволяет скорректировать значения погрешностей в экспериментальных данных.

Литература

1. Спивак С. И., Кантор О. Г., Юнусова Д. С., Кузнецов С. И., Колесов С. В. Предельно допустимые оценки расчета параметров физико-химических моделей. Доклады Академии наук. 2015. Т. 464, № 4. С. 437-439.

2. Спивак С. И., Кантор О. Г., Юнусова Д. С. КИдентификация и информативность моделей количественного анализа многокомпонентных смесей // Журнал СВМО. 2016. Т. 18, № 3. С. 153-163.

3. Spivak S, Kantor O, Yunusova D. International Conference «Stability and Control Processes» in Memory of V.I. Zubov (SCP) // Saint Peterrsburg: Institute of Electrical and Electronics Engineers. 2015. P. 603-605.

MSC2010 93A30

Mixtures of Fulleren-Contaning Products Data Analysis

B.L. Khashper [1], S.I. Spivak [1], O.G. Kantor [2], S.V. Kolesov [3]

Bashkir State Univerdity [1], Ufa State Petroleum Technical University [2], Institute of Organic Chemistry, Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences [3]

УДК 517.9

К вопросу о возмущении линейного уравнения двумя малыми линейными слагаемыми

Шаманаев П. А.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства. Рассматривается задача о нахождении решений линейного уравнения с возмущением в виде двух малых линейных слагаемых

$$Bx = h + \varepsilon_1 A_1 x + \varepsilon_2 A_2 x, \tag{1}$$

где B, A_1 и A_2 – плотно заданные замкнутые линейные фредгольмовы операторы, действующие из E_1 в E_2, ε_1, ε_2 – малые вещественные параметры.

Пусть $N(B) = span\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ – подпространство нулей оператора B, $N^*(B) = span\{\psi_k\}_{k=1}^n$ – подпространство дефектных функционалов оператора B, $N^*(B) \subseteq E_2^*$:

$$B\varphi_k = 0, \quad B^*\psi_k = 0, \quad k = 1, \dots, n, \tag{2}$$

где B^* – оператор, сопряженный к B, действующий из E_2^* в E_1^*, E_1^* и E_2^* – пространства, сопряжённые к E_1 и E_2, соответственно.

Так как B – фредгольмов оператор, то согласно [1] для разрешимости уравнения

$$By = h,$$

необходимо и достаточно выполнения условий

$$< h, \psi_k >= 0, \quad k = 1, ..., n,$$

где $< h, \psi_k >$ – значение линейного функционала ψ_k на элементе h.

Будем предполагать, что элементы $\varphi_k \in N(B)$, $k = 1, \dots, n$, образуют A-жорданову сетку согласно [2], причем $p_k = q_k$ и

$$J_k^+ = \{(i_k, j_k) : \ i_k + j_k = p_k\}, \qquad k = 1, \dots, n. \tag{3}$$

Положим

$$\begin{aligned} &z_k^{(p_k,0)} = A_1 \varphi_k^{(p_k-1,\,0)}, \\ &z_k^{(i,j)} = A_1 \varphi_k^{(i-1,\,j)} + A_2 \varphi_k^{(i,\,j-1)}, \quad (i,j) \in J_k^+, \\ &z_k^{(0,p_k)} = A_2 \varphi_k^{(0,\,p_k-1)}. \end{aligned}$$

Аналогично, будем предполагать, что элементы $\psi_k \in N(B^*)$, $k = 1, \dots, n$, образуют A^*-жорданову сетку и множество J_k^+ определяется согласно формулы (3).

Положим

$$\begin{aligned} &\gamma_k^{(p_k,0)} = A_1^* \psi_k^{(p_k-1,\,0)}, \\ &\gamma_k^{(i,j)} = A_1^* \psi_k^{(i-1,\,j)} + A_2^* \psi_k^{(i,\,j-1)}, \quad (i,j) \in J_k^+, \\ &\gamma_k^{(0,p_k)} = A_2^* \psi_k^{(0,\,p_k-1)}. \end{aligned}$$

Выбирая из каждого множества J_k^+, $k = 1, \dots, n$ по одному элементу, составим из них множество

$$\widetilde{J} = \{\, (i_1, j_1),\ (i_2, j_2),\ \dots,\ (i_n, j_n)\, \}, \tag{4}$$

здесь $(i_k, j_k) \in J_k^+$, $k = 1, \dots, n$. Множество $\widetilde{J}$ можно выбрать $(p_1+1)(p_2+1)...(p_n+1)$ способами.

Для каждого множества $\widetilde{J}$ построим обобщенный регуляризатор Шмидта

$$\widetilde{B}_{\widetilde{J}} = B + K_{\widetilde{J}}, \quad K_{\widetilde{J}} = \sum_{k=1}^{n} \left\langle \cdot, \gamma_k^{(i_k, j_k)} \right\rangle z_k^{(i_k, j_k)}, \tag{5}$$

где $(i_k, j_k) \in \widetilde{J}$, $k = 1, \dots, n$.

Аналогично работе [1] показывается справедливость обобщенной леммы Шмидта, заключающаяся в том, что оператор $\Gamma_{\widetilde{J}} = \widetilde{B}_{\widetilde{J}}^{-1}$ существует и, следовательно, уравнение

$$\widetilde{B}_{\widetilde{J}} x = g$$

имеет единственное решение.

Для любого множества $\widetilde{J}$ оператор $\Gamma_{\widetilde{J}}$ обладает свойством

$$\Gamma_{\widetilde{J}} z_k^{(i_k, j_k)} = \varphi_k, \tag{6}$$

где $(i_k, j_k) \in J_k^+$, $k = 1, \dots, n$.

Дальнейшие рассуждения проведем для каждого фиксированного множества $\widetilde{J}$. Для краткости обозначим $\Gamma_{\widetilde{J}} = \Gamma$.

Используя обобщенный регуляризатор $\widetilde{B}_{\widetilde{J}}$, применим метод Ляпунова-Шмидта для решения уравнения (1). Для этого, возмущая левую и правую часть уравнения (1) слагаемым $K_{\widetilde{J}} x$, получим систему

$$\begin{cases} \widetilde{B}_{\widetilde{J}} x = h + \varepsilon_1 A_1 + \varepsilon_2 A_2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k z_k^{(i_k, j_k)}, \\ \xi_k =< x, \gamma_k^{(i_k, j_k} >, \ \ i_k + j_k = p_k,\ k = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{7}$$

Решение системы (7) ищем в виде

$$x = w + v, \quad v = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k, \tag{8}$$

Подставляя (8) в первое уравнение системы (7), получим

$$w = \sum_{k=1}^{n} \xi_k (\varepsilon_1 \Gamma A_1 x + \varepsilon_2 \Gamma A_2 x)[I - (\varepsilon_1 \Gamma A_1 x + \varepsilon_2 \Gamma A_2 x)]^{-1} \varphi_k + \\ + [I - (\varepsilon_1 \Gamma A_1 x + \varepsilon_2 \Gamma A_2 x)]^{-1} \Gamma h. \tag{9}$$

Учитывая (6), имеем

$$[I - (\varepsilon_1 \Gamma A_1 x + \varepsilon_2 \Gamma A_2 x)]^{-1} \varphi_k = \theta_k(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \sum_{r=0}^{p_k - 1} \sum_{i+j=r} \varepsilon_1^i \varepsilon_2^j \varphi_k^{(i,j)}, \tag{10}$$

где $\varphi_k^{(i,j)}$ – элементы A-жордановой сетки, определенной в работе [1], $k = 1, \dots, n$,

$$\theta_k(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{1 - S_k}, \quad S_k = \sum_{i+j=p_k} \varepsilon_1^i \varepsilon_2^j.$$

Подставляя (8) во второе уравнение системы (7) с учетом (9) и (10), получим систему линейных алгебраических уравнений для определения ξ_k

$$S_k \xi_k = -\sum_{r=1}^{p_k-1} \sum_{i+j=r} \varepsilon_1^i \, \varepsilon_2^j \, d_k^{(i,j)}, \quad k = 1, \dots, n, \tag{11}$$

где

$$d_k^{(i,j)} =< h, \psi_k^{(i,j)} > .$$

Здесь $\psi_k^{(i,j)}$ – элементы A^*-жордановой сетки, определенной в работе [1].

Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 = 0$, то решением системы (11) являются произвольные постоянные c_k, и уравнение (1) имеет n-параметрическое семейство решений

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k + \Gamma h.$$

Если же хотя бы одно из ε_1 или ε_2 отлично от нуля, то система (11) имеет единственное решение

$$\xi_k = -\frac{1}{S_k} \sum_{r=1}^{p_k-1} \sum_{i+j=r} \varepsilon_1^i \, \varepsilon_2^j \, d_k^{(i,j)}, \quad k = 1, \dots, n,$$

и решения уравнения (1) могут быть записаны в виде

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \theta_k(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \sum_{r=0}^{p_k-1} \sum_{i+j=r} \varepsilon_1^i \varepsilon_2^j \, \varphi_k^{(i,j)} + [I - (\varepsilon_1 \Gamma_{\tilde{J}} A_1 x + \varepsilon_2 \Gamma_{\tilde{J}} A_2 x)]^{-1} \Gamma_{\tilde{J}} h.$$

Литература

1. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 528 с.

2. Шаманаев П. А. О некоторых обобщениях жордановых наборов линейных оператор-функций, зависящих от двух малых параметров [Электронный ресурс] // Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании: материалы XIII Международной научной конференции. (Саранск, 12-16 июля 2017 г.). - Саранск: СВМО, 2017. - С. 511-516. Режим доступа: http://conf.svmo.ru/files/deamm2017/papers/paper69.pdf. - Дата обращения: 25.08.2019.

MSC2010 47A13

On the perturbation of a linear equation by two small linear terms

P. A. Shamanaev

National Research Mordovia State University

УДК 517.9

О частичной устойчивости нулевого положения равновесия нелинейных динамических систем по первому приближению

Шаманаев П.А.[1], Язовцева О.С.[1]

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет[1]

Одним из подходов к исследованию частичной устойчивости систем является метод, изложенный в работах [1, 2] и основанный на установлении покомпонентной асимптотической эквивалентности между исследуемой системой и ее первым приближением. Особенностью этого подхода является то, что для асимптотически эквивалентных систем свойства частичной устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения переносятся с системы линейного приближения на нелинейную систему. При этом покомпонентную асимптотическую эквивалентность достаточно установить лишь в некоторой малой окрестности нулевого решения. В этом случае эквивалентность систем носит название локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности [3–6].

Такой подход позволяет получить новые достаточные условия частичной устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого положения равновесия для широкого класса систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущениями в виде векторных полиномов из множества Ξ

$$\frac{dx}{dt} = Ax + P(x), \tag{1}$$

где A – постоянная $(n \times n)$-матрица,

$$P(x) = (P_1(x), \ldots, P_n(x))^T, \ P_j(x) = \sum_{|p_j|=2}^{\sigma} d_j^{(p_j)} x^{p_j}, \ x^{p_j} = x_1^{p_{j1}} x_2^{p_{j2}} \ldots x_n^{p_{jn}}, \ \sigma \geq 2,$$

$$p_j = (p_{j1}, ..., p_{jn}), \quad |p_j| = p_{j1} + \ldots + p_{jn},$$

и ее линейное приближение

$$\frac{dy}{dt} = Ay. \tag{2}$$

Пусть матрица A имеет $r \leq n$ различных собственных значений

$$\lambda_1, ..., \lambda_k, ..., \lambda_r,$$

где каждому λ_k отвечает n_k групп решений системы (2) [7]. Причем число решений в каждой из n_k, $k = 1, ..., r$ групп равно

$$m_{k,1}, ..., m_{k,j}, ..., m_{k,n_k} \quad j = 1, ..., n_k.$$

Обозначим через $y_{ij}(t-t_0)$, $i, j = \overline{1,n}$, элементы нормированной фундаментальной матрицы $Y(t-t_0)$ и введем множества $K_i = \{j \ : \ y_{ij}(t-t_0) \equiv 0, \ \forall \ t, t_0 \geq T\}$, $i = \overline{1,n}$. Тогда для элементов i-ой строки нормированной фундаментальной матрицы $Y(t-t_0)$ справедливы оценки

$$|y_{ij}(t-t_0)| \leq D_0 e^{\beta_i (t-t_0)} \rho^{b_i}(t-t_0), \quad t \geq t_0, \quad j \in N \backslash K_i, \ i = \overline{1,n},$$

$$|y_{ij}(t-t_0)| \le D_0 e^{\alpha_i(t-t_0)} \rho^{a_i}(t-t_0), \quad t \le t_0, \quad j \in N \backslash K_i,\ i=\overline{1,n},$$

где

$$\rho^{\nu}(t) = \begin{cases} 1, \text{если } |t|<1, \\ |t|^{\nu}, \text{если } |t| \ge 1, \end{cases}$$

где $D_0 > 0$ – некоторая константа. Здесь в качестве β_i и α_i выбираются соответственно максимальное и минимальное из Λ_k, когда индекс j пробегает по всем ненулевым элементам $y_{ij}(t-t_0)$ i-ой строки нормированной фундаментальной матрицы, b_i, a_i – максимальные из степеней полиномов при ненулевых элементах, соответствующих β_i и α_i.

Сформулируем достаточные условия частичной устойчивости нулевого решения системы (1).

Теорема 1. *Если выполняются неравенства*

$$p_{j1}\beta_1 + ... + p_{jn}\beta_n < \alpha_i, i=\overline{1,n},$$

по всем наборам $(p_{j1},...,p_{jn})$, $|p_j| = \overline{2,\sigma}$, *таким что* $d_j^{(p_j)} \neq 0, j=\overline{1,n}$, *то системы* (1) *и* (2) *являются локально покомпонентно асимптотически эквивалентными по Брауеру относительно функций* $\mu_i(t) = e^{\beta_i(t-t_0)}\rho^{b_i}(t-t_0)$, $i=\overline{1,n}$, *и нулевое решение системы* (1)

1) асимптотически устойчиво по той переменной x_i, *для которой* $\beta_i < 0$;

2) устойчиво по той переменной x_i, *для которой* $\beta_i = 0$, *а алгебраические и геометрические кратности собственных значений с нулевыми вещественными частями совпадают; причем нулевое решение системы* (1) *имеет локальное асимптотическое равновесие по этим переменным;*

3) неустойчиво по той переменной x_i, *для которой* $\beta_i > 0$.

Доказательство теоремы 1 проводится аналогично доказательству теоремы 3.1 из работы [5], если в качестве μ_i взять $\mu_i(t) = e^{\beta_i(t-t_0)}\rho^{b_i}(t-t_0)$, $i=\overline{1,n}$.

Литература

1. Воскресенский Е. В. Асимптотические методы: теория и приложения. Саранск: СВМО, 2000. 300 с.

2. Воскресенский Е. В. Методы сравнения в нелинейном анализе. Саранск: Изд-во Сарат. ун-та, 1990. 224 с.

3. Язовцева О. С. Локальная покомпонентная асимптотическая эквивалентность и ее применение к исследованию устойчивости по части переменных [Электронный ресурс] // Огарев-online. 2017. № 13. Режим доступа: http://journal.mrsu.ru/arts/lokalnaya-pokomponentnaya-asimptoticheskaya-ekvivalentnost-i-ee-primenenie-k-issledovaniyu-ustojchivosti-po-chasti-peremennyx.

4. Шаманаев П. А., Язовцева О. С. Достаточные условия локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и ее приложение к устойчивости по части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. 2017. Т. 19, № 1. С. 102-115.

5. Шаманаев П. А., Язовцева О. С. Достаточные условия полиустойчивости по части переменных нулевого решения нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал Средневолжского математического общества. 2018. Т. 20, № 3. С. 304-317.

6. Шаманаев П. А., Язовцева О. С. Исследование устойчивости положения равновесия системы динамики биоценоза в условиях межвидового взаимодействия // Вестник Мордовского университета. 2018. Т. 28, № 3. С. 321-332.
7. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 533 с.

MSC2010 34C20

On partial stability of the trivial equilibrium of nonlinear dynamical systems according to the first approximation

P.A. Shamanaev[1], O.S. Yazovtseva[1]

National Research Mordovia State University[1]

MSC2010 34C15

On synchronization of oscillations in pendulum-type equations under quasiperiodic perturbations *

O. S. Kostromina[1]

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod[1]

We consider a pendulum-type equation close to an integrable one

$$\ddot{x} + \sin x = \varepsilon[(-1 + p_1 \cos 3x)\dot{x} + p_2 \cos \omega_1 t \sin \omega_2 t], \tag{1}$$

where p_1, $p_2 > 0$ are parameters, ε is a small positive parameter, ω_1 and ω_2 are incommensurable frequencies (this implies that the perturbation is a quasiperiodic function in t).

The equation is equivalent to the system

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\sin x + \varepsilon[(-1 + p_1 \cos 3x)y + p_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2], \\ \dot{\theta}_1 = \omega_1, \\ \dot{\theta}_2 = \omega_2. \end{cases} \tag{2}$$

For a perturbed autonomous case ($\varepsilon \neq 0$, $p_2 = 0$), the problem of limit cycles is solved. The solution of this problem is carried out by analyzing the Poincaré–Pontryagin generating functions, the simple real zeros of which correspond to the rough limit cycles of a perturbed autonomous system [1].

For nonautonomous case ($p_2 \neq 0$), the question of the structure of the resonance zones, to which the solution of the problem of synchronization of oscillations leads, is studied. Resonance levels in the unperturbed system ($\varepsilon = 0$) are found. In the neighborhood of an individual resonance level (called an individual resonance zone), we obtain an averaged system that describes the topology of an individual resonance zone up to terms of order ε. A simple stable (unstable) equilibrium state of the averaged system corresponds to a stable (unstable) quasiperiodic resonance solution and two-dimensional invariant tori with quasiperiodic motion in the original four-dimensional system.

We distinguish splittable and nonsplittable resonance levels. Splittable resonance levels are divided into passable, partially passable and impassable ones.

Next, introducing the "detuning", which determines the deviation of the resonance level from the level generating the limit cycle in the autonomous system, bifurcations of the transition from impassable resonance to partially passable one (the phenomenon of passing a three-dimensional torus through the resonance zone) are studied.

The results obtained are illustrated by numerical computations.

This work follows the works [2, 3].

References

1. Morozov A. D. Quasi-conservative systems: cycles, rezonances and chaos. Singopure: World Sci, in ser. Nonlinear Science. ser. A. V. 30. 1998.

*This work was partially supported by RFBR, No 18-01-00306.

2. Morozov A. D., Morozov K. E. Quasiperiodic perturbations of two-dimensional Hamiltonian systems. Differ. Equ. 2017. Vol. 53, No. 12. P. 1557–1566.

3. Morozov A. D., Morozov K. E. On synchronization of quasiperiodic oscillations. Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2018. Vol. 14, No. 3. P. 367–376.

MSC2010 37D15, 37D05

A criterion of topological conjugacy of flows with two limit cycles*

V. E. Kruglov[1], G. N. Talanova[1]

National Research University — Higher School of Economics[1]

Two flows are called topologically equivalent if there exists a homeomorphism sending trajectories of one flow into trajectories of another one preserving directions of trajectories. In contrast with diffeomorphisms topological conjugacy of flows differs of topological equivalence: two flows are called topologically conjugate if there exists a homeomorphism sending trajectories of one flow into trajectories of another one preserving time of moving along trajectories.

Here we study flows with two hyperbolic limit cycles without singular points on torus. Two flows with two limit cycles are topologically equivalent if orientations of the pairs of cycles are either both consistence or both non-consistence. In our research we found that this property is not sufficient for topological conjugacy of such flows.

In 1978 J. Palis [1] invented continuum topologically non-conjugate systems in a neighbourhood of a system with a heteroclinic contact (moduli). We tried to find some similar moduli for our class of flows to describe a class of topological conjugacy, but we found that each such flow has infinite number of moduli. More precisely, the condition of conjugacy is coincidence of two special functions constructing by the flow.

References

1. Palis J. A Differentiable Invariant of Topological Conjugacies and Moduli of Stability. Astérisque. 2017. Vol. 51. Pp. 335-346.

*The reported study was funded by RFBR according to the research project № 18-31-00022.

MSC2010 35S15

On an inverse boundary value problem with non-local integral terms condition for the pseudo-parabolic equation of the fourth order

A. T. Ramazanova [1], Y. T. Mehraliyev [2], S. I. Allahverdieva [3]
University Duisburg-Essen[1], Baku State University[2], Mingachevir State University[3]

Currently, problems with non-local conditions for partial differential equations are of great interest, which is due to the need to generalize the classical problems of mathematical physics in connection with the mathematical modeling of a number of physical processes studied by modern science [1]. Among non-local problems, of great interest are problems with integral conditions. Nonlocal integral conditions describe the behavior of the solution at interior points of the domain in the form of some mean. Examples include problems arising from the study of diffusion of particles in a turbulent plasma [1], the processes of heat propagation [2], [3] of the process of moisture transfer from capillary-simple media [4], as well as the study of some inverse problems of mathematical physics. In [5], a problem with nonlocal in time integral conditions for a hyperbolic equation was considered. In [6], an inverse boundary value problem with an unknown time-dependent coefficient was investigated for a fourth-order Boussinesq equation with nonlocal second-order integral in time. In the present paper, an inverse boundary value problem with nonlocal in time integral conditions for a fourth-order pseudoparabolic equation is investigated. Consider the equation

$$u_t(x,t) - bu_{txx}(x,t) + a(t)u_{xxxx}(x,t) = p(t)u(x,t) + f(x,t) \tag{1}$$

in the domain $D_T = \{(x,t) : 0 \le x \le 1, 0 \le t \le T\}$ an inverse boundary problem with the non-local initial conditions

$$u(x,0) + \int_0^T M(t)u(x,t)dt = \varphi(x)(0 \le x \le 1), \tag{2}$$

the boundary conditions

$$u_x(0,t) = 0, u(1,t) = 0, u_{xxx}(0,t) = 0, u_{xx}(1,t) = 0(0 \le t \le T), \tag{3}$$

and with the additional conditions

$$u(0,t) = h(t), (0 \le t \le T), \tag{4}$$

where $b > 0$ - given numbers, $a(t) > 0, f(x,t), \varphi(x), M(t) > 0, h(t)$ - given functions, $u(x,t)$ and $p(t)$ - desired functions. Denote

$$\tilde{C}^{4,1}(D_T) = \left\{u(x,t) : u(x,t) \in C^{2,1}(D_T), u_{txx}, u_{xxx}u_{xxxx} \in C(D_T)\right\}$$

Definition. The classical solution of the inverse boundary value problem (1)-(4) is the pair $\{u(x,t), p(t)\}$ of functions $u(x,t) \in \tilde{C}^{4,1}(D_T)$ and $p(t) \in C[0,T]$ satisfying equation (1) in D_T, condition (2) in $[0,1]$ and conditions (3)-(4) in $[0,T]$. The following theorem is true.

Theorem 1. Let $b > 0, 0 < a(t) \in C[0,T], \varphi(x) \in C[0,1], f(x,t) \in C(D_T), 0 \le M(t) \in C[0,T]$, $h(t) \in C^1[0,T]$, $h(t) \neq 0$, $(0 \le t \le T)$, $\varphi(0) = h(0) + \int\limits_0^T M(t)h(t)dt$.

Then the problem of finding a solution to problem (1)-(4) is equivalent to the problem of determining the functions $u(x,t) \in \bar{C}^{4,1}(D_T)$ and $p(t) \in C[0,T]$, from (1)-(3) and

$$h'(t) - bu_{txx}(0,t) + a(t)u_{xxxx}(0,t) = p(t)h(t) + f(0,t)(0 \le t \le T) \tag{5}$$

After applying the formal scheme of the Fourier method, finding the first component $u(x,t)$ of any solution $\{u(x,t), p(t)\}$ to problem (1)-(3), (5) reduces to solving the following nonlinear integro-differential equation:

$$u(x,t) = \sum_{k-1}^{\infty} \left\{ \left(\varphi_k - \int\limits_0^T M(t)u_k(t)dt \right) e^{-\int\limits_0^t \frac{a(s)\lambda_k^4}{1+b\lambda_k^2} ds} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1+b\lambda_k^2} \int\limits_0^t F_k(\tau; u, p) e^{-\int\limits_\tau^t \frac{a(s)\lambda_k^4}{1+b\lambda_k^2} ds} d\tau \right\} \cos \lambda_k x \tag{6}$$

where

$$\lambda_k = \frac{\pi}{2}(k-1)\, u_k(t) = 2\int\limits_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x dx$$

$$\varphi_k = 2\int\limits_0^1 \varphi(x)\cos\lambda_k x dx \, (k = 1,2,...) \, F_k(t;u,p) = f_k(t) + p(t)u_k(t),$$

$$f_k(t) = 2\int\limits_0^1 f(x,t)\cos\lambda_k x dx$$

Further, using equation (6), from condition (5) to determine the second component of any solution $U(p,t), p(t)$ of problem (1)-(3), (5) , we obtain the following nonlinear integral equation:

$$p(t) = [h(t)]^{-1} \left\{ h'(t) - f(0,t) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{b\lambda_k^2}{1+b\lambda_k^2} F_k(t;u,p) + \frac{a(t)\lambda_k^4}{1+b\lambda_k^2} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left(\left(\varphi_k - \int\limits_0^T M(t)u_k(t)dt \right) e^{-\int\limits_0^t \frac{a(s)\lambda_k^4}{1+b\lambda_k^2} ds} + \frac{1}{1+b\lambda_k^2} \int\limits_0^t F_k(\tau;u,p) e^{-\int\limits_\tau^t \frac{a(s)\lambda_k^2}{1+b\lambda_k^2} ds} d\tau \right) \right] \right\}. \tag{7}$$

Thus, the solution of problem (1)-(3), (5) was reduced to the solution of system (6),(7), with respect to the unknown functions $U(x,t)$ and $p(t)$. Using the principle of compressed mappings, we prove the following theorem on the existence and uniqueness in a small solution of problem (1)-(3), (5) .

Theorem 2. Let conditions 1) - 3) be satisfied

1. $\varphi(x) \in W_2^{(5)}(0,1), \varphi'(0) = \varphi(1) = \varphi'''(0) = \varphi''(1) = \varphi^{(4)}(1) = 0;$
2. $f(x,t), f_x(x,t), f_{xx}(x,t) \in C(D_T), f_{xxx}(x,t) \in L_2(D_T), f_x(0,t) = f(1,t) = f_{xx}(1,t) = 0;$
3. $b > 0, 0 < a(t) \in C[0,T], 0 \le M(t) \in C[0,T], h(t) \in C^1[0,T], h(t) \neq 0(0 \le t \le T).$

Then for sufficiently small values, problem (1)-(3), (5) has a unique solution.

Using Theorem 1, the last theorem immediately implies the unique solvability of the original problem (1)-(4).

Theorem 3. Let all the conditions of Theorem 2 and

$$\varphi(0) = h(0) + \int_0^T M(t)h(t)dt$$

be satisfied. Then, for sufficiently small values, problem (1)-(4) has a unique classical solution.

References

1. Samara A.A. On some problems of the theory of differential equations. Differential equa-tions 1980. Vol. 16, No. 11. pp. 1925-1935.

2. Cannon J.R. The solution of energy equation to the energy of. Quart. Appl. Math. 1963. Vol. 5, No. 21. pp. 1555-160.

3. Ionkin N.I. The solution of a boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition. Differential Equations. 1977. Vol. 13, No. 2. pp. 294-304.

4. Nakhushev A.M. About one approximate method for solving boundary value problems for differential equations and its approximation to the dynamics of soil moisture and groundwater. Differential Equations. 1982. Vol. 18, No. 1. pp. 72-81.

5. Kirichenko S.V. On a boundary value problem with nonlocal in time conditions for a one-dimensional hyperbolic equation. Vestn. SamSU. Natural Science Ser. 2013. No. 6 (107). pp. 31–39.

6. Megraliev Ya.T., Alizade F.Kh. An inverse boundary value problem for a fourth-order Boussinesq equation with nonlocal integral conditions of the second kind. Vestn. Ud-murtsk. un-ty. Mat Fur. Computer Science. 2016. 26 (4). pp. 503–514.

УДК 517.958:531.12; 534.11

Колебания кабеля на участке наложения на него изоляции

Анисимов В.Н.[1], Корпен И.В.[1], Косинова С.Н.[1], Литвинов В.Л.[1]

Самарский государственный технический университет, филиал в г.Сызрани[1]

Аннотация: В статье исследуются поперечные колебания кабеля на участке наложения на него изоляции. Модель учитывает натяжение кабеля, переменную изгибную жесткость, сопротивление внешней среды. Объект принадлежит к широкому кругу одномерных колеблющихся объектов с движущимися границами. Наличие движущихся границ затрудняет описание таких объектов. В статье при помощи метода Галеркина получено алгебраическое уравнение четвертого порядка, позволяющее получить две первые собственные частоты колебаний кабеля. Полученные результаты исследований могут быть использованы для обеспечения надежной работы технологических установок по изготовлению кабелей.

Ключевые слова: колебания объектов с движущимися границами, краевые задачи, резонансные свойства, колебания кабеля, собственные частоты.

1. Введение

В статье исследуются поперечные колебания кабеля на участке наложения на него изоляции. Объект исследования относится к широкому кругу колеблющихся одномерных объектов с движущимися границами и нагрузками. Такие объекты широко распространены в технике. Это канаты грузоподъёмных установок [2], [6], [8], гибкие звенья передач [1], [6], лентопротяжные механизмы [7], конвейеры [2], [6] и т.д. Наличие движущихся границ существенно осложняет математическое описание таких объектов, поэтому они в настоящее время изучены недостаточно.

2. Постановка задачи

Схема технологической установки по изготовлению кабелей изображена на рис. 1. Здесь в точке через круглое отверстие в разжиженном виде выдавливается изоляционная масса 3, которая накладывается на протягиваемую через отверстие жилу 4. Кабель 2 охлаждается в водяной ванне 1 и наматывается на катушку 5.

Особенность задачи заключается в том, что изгибная жесткость кабеля изменяется по длине. Скорость волн, бегущих из точки $x = 0$ в точку $x = l_0$, уменьшается, так как уменьшается жесткость струны, поэтому волны концентрируются с приближением к точке $x = l_0$. Кроме того, эти волны бегут относительно среды с меньшей скоростью, и среда этим волнам, как указывается в статье [1], оказывает меньшее сопротивление, чем волнам, бегущим в обратном направлении. Указанные факты могут привести к большим амплитудам колебаний вблизи точки $x = l_0$, что нежелательно. Чтобы предотвратить это, необходимо знать собственные частоты колебаний рассматриваемой системы.

Задачу по определению собственных частот поставим следующим образом:

$$TU_{xx}(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}[C(x - v_0 t)U_{xx}(x,t)] - \rho U_{tt}(x,t) - \lambda U_t(x,t) - RU_x(x,t) = 0; \tag{1}$$

$$U(v_0t,t)=0;U(v_0t+l_0,t)=0;U_x(v_0t,t)=0;U_x(v_0t+l_0,t)=0. \tag{2}$$

Здесь λ, R – коэффициенты, учитывающие сопротивление воды; $C(x-v_0t)$ – функция, характеризующая изгибную жесткость кабеля; v_0 – скорость продольного движения кабеля, T – сила натяжения кабеля, ρ – масса единицы длины кабеля.

Если принять

$$R=\lambda v_0, \tag{3}$$

то на волну $U=\phi(x-v_0t)$, бегущую со скоростью v_0 и, следовательно, покоящуюся относительно воды, силы сопротивления не действуют ($F_c=\lambda U_t+RU_x=0$), что соответствует действительности.

Введем новые переменные $\zeta=x-v_0t$; $t=t$; $V(\zeta,t)=U(x,t)$. После преобразований, с учетом (3), получим задачу с условиями, заданными на неподвижной границе:

$$(a^2-v_0^2)V_{\zeta\zeta}(\zeta,t)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}[C(\zeta)V_{\zeta\zeta}(\zeta,t)]+2v_0V_{\zeta t}(\zeta,t)-V_{\zeta\zeta}(\zeta,t)-\frac{\lambda}{\rho}V_t(\zeta,t)=0;$$

$$V(0,t)=0;V(l_0,t)=0;V_\zeta(0,t)=0;V_\zeta(l_0,t)=0.$$

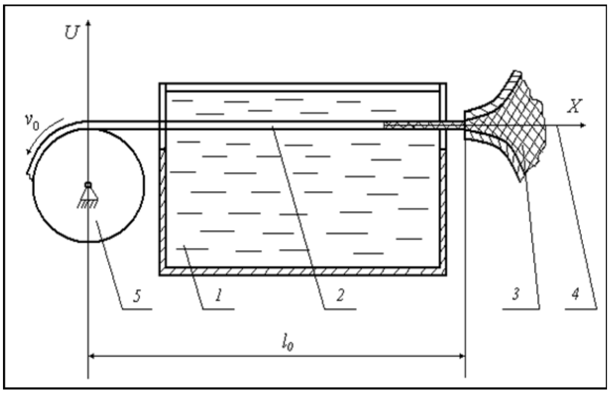

Рис. 1. Схема технологической установки по изготовлению кабелей.

Здесь a – скорость распространения колебаний. Примем зависимость жесткости от ζ линейной: $C(\zeta)=d-b\zeta$. Введем в задачу безразмерные переменные: $\xi=\dfrac{\zeta}{l_0}-0,5$; $\tau=\dfrac{at}{l_0}$; $Z(\xi,\tau)=V(\zeta,t)$.

Окончательная постановка задачи примет вид

$$\begin{gathered}r\xi Z_{\xi\xi\xi\xi}(\xi,\tau)+\gamma Z_{\xi\xi\xi\xi}(\xi,\tau)+2rZ_{\xi\xi\xi\xi}(\xi,\tau)+(1-v^2)Z_{\xi\xi}(\xi,\tau)+\\+2vZ_{\xi\tau}(\xi,\tau)-Z_{\tau\tau}(\xi,\tau)-\beta Z_\tau(\xi,\tau)=0;\end{gathered} \tag{4}$$

$$Z(-0,5;\tau)=0;Z(0,5;\tau)=0;Z_\xi(-o,5;\tau)=0;Z_\xi(0,5;\tau)=0, \tag{5}$$

где

$$r=\frac{b}{\rho l_0a^2};\gamma=\frac{0,5b}{\rho l_0a^2}-\frac{d}{\rho l_0^2a^2};v=\frac{v_0}{a};\beta=\frac{\lambda l_0}{\rho a}.$$

Безразмерные параметры характеризуют: v – скорость продольного движения; r, γ – переменную изгибную жесткость; β – сопротивление внешней среды.

Изоляционная масса выдавливается в жидком виде, поэтому изгибную жёсткость в точке $x=l_0$ можно принять равной нулю.

3. Решение задачи

Решение полученной задачи будем искать в виде произведения двух функций: $Z(\xi, \tau) = \mu(\xi)e^{Xt}$. Для $\mu(\xi)$ получим следующую задачу:

$$L[\mu(\xi)] = r\xi\mu''''(\xi) + \gamma\mu''''(\xi) + 2r\mu''''(\xi) + (1 - v^2)\mu''(\xi)+ \\ +2vW\mu'(\xi) - (W^2 + \beta W)\mu(\xi) = 0; \tag{6}$$

$$\mu(-0,5) = 0; \mu(0,5) = 0; \mu'(-o,5) = 0; \mu'(0,5) = 0. \tag{7}$$

Точно определить собственные частоты задачи (6), (7) довольно сложно, поэтому воспользуемся приближенным методом, основанным на методе Галеркина [4] – [6]. Решение задачи будем искать в виде

$$\mu(\xi) = A\varphi_1(\xi) + B\varphi_2(\xi),$$

где

$$\varphi_1(\xi) = \xi^4 = 0,5\xi^2 + 0,0625; \varphi_2(\xi) = \xi^5 - 0,5\xi^3 + 0,0625\xi \tag{8}$$

– две линейно независимые функции (8) удовлетворяют граничным условиям (7) и являются ортогональными на интервале $(-0,5; 0,5)$.

При использовании метода Галеркина коэффициенты и следует определять из однородной системы

$$\begin{cases} A\int_{-0,5}^{0,5} L[\varphi_1(\xi)]\varphi_1(\xi)d\xi + B\int_{-0,5}^{0,5} L[\varphi_2(\xi)]\varphi_1(\xi)d\xi = 0; \\ A\int_{-0,5}^{0,5} L[\varphi_1(\xi)]\varphi_2(\xi)d\xi + B\int_{-0,5}^{0,5} L[\varphi_2(\xi)]\varphi_2(\xi)d\xi = 0. \end{cases}$$

Здесь оператор определяется выражением (6).

Приравняв нулю определитель системы, после преобразований получим уравнение собственных частот:

$$W^4 + 2\beta W^3 + W^2(\beta^2 - 4465\gamma - 12v^2 + 56) + W[56\beta(1 - v^2) - 4465\beta\gamma]+ \\ +1996855\gamma^2 - 69726\gamma(1 - v^2) + 528(1 - v^2)^2 - 128407r^2 = 0. \tag{9}$$

Данное уравнение позволяет определить две пары комплексно сопряженных корней:

$$W_1 = -\omega_{01} \pm i\omega_1; W_2 = \omega_{02} \pm i\omega_2.$$

Действительные части корней характеризуют затухание свободных колебаний. Мнимые части представляют собой первую и вторую собственные частоты системы.

Уравнение (9) решалось в среде MATLAB. В таблице приведены собственные частоты W_1 и W_2 в зависимости от параметров v и r при $\beta = 0,5$ и $\gamma = -0,5r$.

Анализ таблицы показывает, что частота колебаний (мнимая часть) увеличивается с увеличением r (характеризует изгибную жёсткость) и уменьшением v (характеризует скорость продольного движения). Действительные части корней, характеризующие затухание, от r и V зависят слабо.

Заметим, что если W_n безразмерная частота (задача (4), (5)), то частота реальной системы ω_n (задача (1), (2)) находится по формуле: $\omega_n = \dfrac{aW_n}{l_0}$.

Таблица 1. Зависимость собственной частоты колебаний кабеля от изгибной жёсткости и скорости продольного движения.

$r\backslash v$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	
0	-0,250+3,455i	-0,247+3,414i	-0,237+3,294i	-0,222+3,100i	-0,204+2,840i	W_1
	-0,250+6,629i	-0,253+6,641i	-0,263+6,674i	-0,278+6,722i	-0,297+6,775i	W_2
0,1	-0,253+6,641i	-0,250+5,560i	-0,250+5,508i	-0,250+5,420i	-0,240+5,300i	W_1
	-0,25+15,750i	-0,250+15,751i	-0,250+15,760i	-0,250+15,770i	-0,250+15,780i	W_2
0,2	-0,278+6,722i	-0,250+7,002i	-0,249+6,963i	-0,248+6,897i	-0,246+6,805i	W_1
	0,250+21,288i	-0,250+21,289i	-0,251+21,294i	-0,252+21,301i	-0,254+21,311i	W_2

4. Заключение

Рассмотренная математическая модель позволяет учесть широкий круг факторов, влияющих на колебания: продольное движение, переменную изгибную жесткость, сопротивление внешней среды, натяжение кабеля. Полученное уравнение собственных частот позволяет с использованием стандартных программных средств получить две первые собственные частоты колебаний кабеля. Полученные результаты могут быть использованы для обеспечения надежной работы технологической установки по изготовлению кабелей.

Литература

1. Самарин Ю.П., Анисимов В. Н. Вынужденные поперечные колебания гибкого звена при разгоне // Изв. Вузов. Машиностроение. 1986. № 12. С. 17–21.

2. Горошко О.А., Савин Г.Н. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев: Наукова думка, 1971. 270 с.

3. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами. М.: Физматлит, 2001. 320 с.

4. Лежнева А.А. Изгибные колебания балки переменной длины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1970. № 1. С. 159–161.

5. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В. Применение метода Канторовича – Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. № 2. С. 70–77.

6. Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами: монография // Самар. гос. техн. ун–т. 2017. 149 с.

7. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Математические модели нелинейных продольно–поперечных колебаний объектов с движущимися границами // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико–математические науки». 2015. № 2 (19). С. 382–397.

8. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Поперечные колебания каната, движущегося в продольном направлении // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2017. Т. 19, № 4. С. 161–165.

9. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Вычисление собственных частот поперечных колебаний вязкоупругого каната, движущегося в продольном направлении и имеющего изгибную жесткость // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Пятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. Самара: СамГТУ, 2008. 358 с.

10. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Сравнительный анализ линейной и нелинейной моделей, описывающих колебания систем с движущимися границами // Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (18 - 22 сентября 2017 г., Самара, Россия): в 2-х томах. Т.1. / под ред. Н.Ф. Морозова, А.В. Манжирова, В.П. Радченко. Самара: СамГТУ. 2017. С. 35–39.

MSC2010 35R37, 35G30, 35Q70

Cable oscillations on the section of the area of application of insulation

V.N. Anisimov[1], I.V. Korpen[1], S.N. Kosinova[1], V.L. Litvinov[1]

Syzran' Branch of Samara State Technical University[1]

Abstract: Researches the transverse vibrations of the cable in the area where the insulation is applied to it. The model takes into account the cable tension, variable bending stiffness, resistance of the external environment. The object belongs to a wide range of one-dimensional objects with moving boundaries. Moving boundaries complicate the description of such objects. In this paper, using the Galerkin method, a fourth-order algebraic equation is obtained, which makes it possible to obtain two first natural frequencies of cable oscillations. Results can be used to ensure reliable operation of the technological installation for the manufacture of cables.

Keywords: oscillations of objects with moving boundaries, boundary value problems, resonant properties, cable oscillations, natural frequencies.

References

1. Samarin Yu.P., Anisimov V.N. Forced lateral vibrations of a flexible link during acceleration. Izv. Universities. Engineering, 1986. No. 12. P. 17-21.

2. Goroshko O. A., Savin G. N. Introduction to the mechanics of deformable one-dimensional bodies of variable length. Kiev: Naukova Dumka, 1971. 270 p.

3. Vesnitsky A.I. Waves in systems with moving boundaries. M.: Fizmatlit, 2001. P.320.

4. Lezhneva A. A. Bending vibrations of a beam of variable length. Izv. USSR Academy of Sciences. Solid Mechanics, 1970. No. 1. P. 159–161.

5. Anisimov V.N., Litvinov V.L., Korpen I.V. Application of the Kantorovich - Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries. Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Solid mechanics. 2018. No. 2. P. 70-77.

6. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Mathematical modeling and study of oscillations of one-dimensional mechanical systems with moving boundaries: monograph. Samar. state tech. univ, 2017. 149 p.

7. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Mathematical models of nonlinear longitudinal-transverse vibrations of objects with moving boundaries. Bulletin of the Samara State Technical University. Series "Physics and Mathematics". No. 2 (19). 2015. P. 382–397.

   bibitemlitvinovBib8en Anisimov V.N., Litvinov V.L. Transverse vibrations of a rope moving in the longitudinal direction. Bulletin of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. 2017. V. 19. No. 4. P.161-165.

8. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Calculation of natural frequencies of transverse vibrations of a viscoelastic rope moving in the longitudinal direction and having bending stiffness. Mathematical modeling and boundary value problems: Proceedings of the Fifth All-Russian Scientific Conference with international participation. Part 1: Mathematical models of mechanics, strength and reliability of structural elements. Samara: Samara State Technical University, 2008. 358 p.

9. Anisimov V.N., Litvinov V.L. A comparative analysis of linear and nonlinear models describing the oscillations of systems with moving boundaries. Materials of the X All-Russian Conference on the Mechanics of a Deformable Solid: in 2 volumes. V. 1. / ed. N.F. Morozova, A.V. Manzhirova, V.P. Radchenko. Samara: Samara State Technical University, 2017. P. 35–39.

УДК 517.962.2

Оценки решений разностных аналогов систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

Афиногентова Е.В.[1]

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет[1]

Аннотация: В статье предложен метод построения оценок погрешности линеаризации нелинейной системы конечно-разностных уравнений с переменными коэффициентами в линейной части. Метод основан на дискретном аналоге второго метода Ляпунова. Результат может быть применим к исследованию устойчивости разностных схем решения систем дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: устойчивость, погрешность линеаризации, оценка, конечно-разностные уравнения.

1. Введение

Численные методы решения систем дифференциальных уравнений приводят к необходимости изучения свойств решений систем конечно-разностных уравнений. Вопросы устойчивости разностных схем имеют непосредственное отношение к поведению решений таких систем. В статье рассматривается нелинейный дискретный процесс, описанный системой конечно-разностных уравнений. Исследование проводится с привлечением дискретного аналога второго метода Ляпунова [1] и следующей теоремы сравнения [2].

Теорема 1. *Пусть скалярная функция $R(k,u)$, определенная для всех $k \in N = \{0,1,2,...\}$ и $0 \leq u < \infty$, является неубывающей по u для любого фиксированного k. Тогда, если $u(k)$ и $v(k)$ удовлетворяют отношениям*

$$v(k+1) \leq R(k, v(k)),\ u(k+1) = R(k, u(k)),\ k \in N,$$

то выполняется неравенство

$$v(k) \leq u(k),\ k \in N,\ \text{при условии, что } v(k_0) \leq u(k_0).$$

2. Основные результаты

Пусть дискретный процесс задан системой конечно-разностных уравнений

$$x(k+1) = A(k)x(k) + F(x(k)) + r(k),\ x(0) = x_0,\ k \in N, \tag{1}$$

где $A(k)$ — матрица размерности $n \times n$, $F(x(k))$ — n-мерная вектор-функция, $x(k),\ r(k)$ — n-мерные векторы,

$$||F(x(k))|| \leq h||x(k)||^{\gamma},\ \gamma > 1,\ ||r(k)|| \leq R < \infty \text{ при } ||x(k)|| \leq \rho.$$

Здесь $||\cdot||$ — евклидова норма, $h > 0,\ \rho > 0$ — произвольное вещественное число.

Предполагается, что для линейной однородной системы при фиксированном s

$$\tilde{x}(k+1) = A(s)\tilde{x}(k),\ k \in N, \tag{2}$$

существует дискретная функция Ляпунова $V(x(k))$, удовлетворяющая неравенствам

а) $||x(k)|| \leq V(x(k)) \leq M||x(k)||,\ M > 1$;

б) $|V(x''(k)) - V(x'(k))| \leq M||x''(k) - x'(k)||$;

в) $V(\tilde{x}(k+1)) - V(\tilde{x}(k)) \leq -\chi V(\tilde{x}(k)),\ 0 < \chi < 1$.

В [2] для систем вида (2) приведены условия существования функций Ляпунова, удовлетворяющих оценкам а)–в).

Линеаризованный вариант системы (1) имеет вид

$$t(k+1) = A(k)t(k) + r(k),\ t(0) = x_0,\ k \in N. \tag{3}$$

Пусть $\varepsilon(k) = x(k) - t(k),\ k \in N$ есть погрешность линеаризации. Необходимо найти оценку нормы разности $\varepsilon(k),\ k \in N$ решений системы (1) и (3). Сначала оценим $||x(k)||,\ k \in N$.

Для системы (1) выберем функцию Ляпунова $V(x(k))$, удовлетворяющую условиям а)–в). Первая разность функции $V(x(k))$ на решениях системы (1) имеет вид

$$\begin{aligned} &V(A(k)x(k) + F(x(k)) + r(k)) - V(x(k)) \leq \\ &\leq -\chi V(x(k)) + M||A(k) - A(s)|| \cdot ||x(k)|| + Mh||x(k)||^\gamma + MB,\ k \in N. \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} ||A(i) - A(i-1)||$ сходящийся и сумма ряда равна $\sigma' > 0$. Тогда частичные суммы ряда не превышают σ'. Получим следующую оценку

$$\begin{aligned} &V(A(k)x(k) + F(x(k)) + r(k)) - V(x(k)) \leq \\ &\leq -\chi V(x(k)) + M\left(\sum_{i=1}^{k} ||A(i) - A(i-1)|| + ||A(s) - A(0)||\right) ||x(k)|| + Mh||x(k)||^\gamma + MB \leq \\ &\leq -\left(\chi - M(\sigma' + ||A(s) - A(0)||)\right) V(x(k) + MhV^\gamma(x(k)) + MB,\ k \in N. \end{aligned}$$

Пусть

$$0 < \chi - M\left(\sigma' + ||A(s) - A(0)||\right) < 1. \tag{5}$$

Выполнение условия (5) гарантирует асимптотическую устойчивость линейного приближения системы (1).

Введем обозначение

$$V(x(k)) = v(k). \tag{6}$$

Тогда с учетом условия а) неравенство (4) приводится к виду

$$v(k+1) - v(k) \leq -\left(\chi - M(\sigma' + ||A(s) - A(0)||)\right) v(k) + Mhv^\gamma(k) + MB.$$

По теореме 1 $v(k) \leq u(k),\ k \in N$, где $u(k)$ – решение уравнения

$$u(k+1) - u(k) = -\left(\chi - M(\sigma' + ||A(s) - A(0)||)\right) u(k) + Mhu^\gamma(k) + MB \equiv \varphi(u(k)), \tag{7}$$

$$u(0) = v(0),\ k \in N.$$

Если уравнение $\varphi(u) = 0$ имеет решение при $u \geq 0$, то таких решений может быть не более двух, а, именно: $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$. Для определенности будем считать, что $0 \leq u^{(1)} \leq u^{(2)}$. Очевидно, что $\varphi(u) > 0$ при $0 < u < u^{(1)}$, $u > u^{(2)}$; $\varphi(u) < 0$ при $u^{(1)} < u < u^{(2)}$, и $u^{(1)}$

— асимптотически устойчивое, а $u^{(2)}$ — неустойчивое положения равновесия уравнения (7). Таким образом, если $M||x(0)|| \le u^{(2)}$, то

$$||x(k)|| \le \max\{M||x_0||, u^{(1)}\} \equiv \Delta,\ k \in N. \tag{8}$$

Перейдем к оценке нормы погрешности линеаризации $\varepsilon(k),\ k \in N$. Для $\varepsilon(k)$ справедлива система конечно-разностных уравнений

$$\varepsilon(k+1) = A(k)\varepsilon(k) + F(x(k)),\ \varepsilon(0) = 0,\ k \in N. \tag{9}$$

С учетом полученной выше оценки $||x(k)||$ для первой разности функции $V(\varepsilon(k))$ на решениях системы (9) выполняется неравенство

$$V(A(k)\varepsilon(k) + F(x(k)) - V(\varepsilon(k)) \le -\left(\chi - M(\sigma' + ||A(s) - A(0)||)\right) V(\varepsilon(k)) + Mh\Delta^\gamma,\ k \in N. \tag{10}$$

Используя обозначение (6) для $V(\varepsilon(k))$, неравенство (10) запишем следующим образом

$$v(k+1) \le (1 - \chi + M(\sigma' + ||A(s) - A(0)||))v(k) + Mh\Delta^\gamma,\ k \in N.$$

Согласно теореме 1 $v(k) \le u(k),\ k \in N$, где $u(k)$ — решение скалярного уравнения

$$u(k+1) = (1 - \chi + M(\sigma' + ||A(s) - A(0)||))u(k) + Mh\Delta^\gamma,\ u(0) = v(0),\ k \in N. \tag{11}$$

Уравнение (11) равносильно уравнению

$$u(k) = Mh\Delta^\gamma \frac{1 - (1 - \chi + M(\sigma' + ||A(s) - A(0)||))^k}{\chi - M(\sigma' + ||A(s) - A(0)||)},\ u(0) = 0,\ k \in N. \tag{12}$$

В силу условия (5), из (12) следует, что $u(k) < \dfrac{Mh\Delta^\gamma}{\chi - M(\sigma' + ||A(s) - A(0)||)},\ k \in N$. Отсюда получаем оценку для нормы погрешности линеаризации $\varepsilon(k)$

$$||\varepsilon(k)|| < \frac{Mh\Delta^\gamma}{\chi - M(\sigma' + ||A(s) - A(0)||)},\ k \in N. \tag{13}$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Пусть для линейной системы (2) существует функция V, обладающая свойствами а)–в), ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} ||A(i) - A(i-1)||$ сходящийся и имеет место условие (5), кроме того, уравнение*

$$-\left(\chi - M(\sigma' + ||A(s) - A(0)||)\right) u(k) + Mhu^\gamma(k) + MB = 0 \tag{14}$$

имеет решения $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ такие, что $0 \le u^{(1)} \le u^{(2)}$, то при $k \in N$ справедливы оценки

1) $||x(k)|| \le \max\{M||x_0||, u^{(1)}\} \equiv \Delta$;

2) $||\varepsilon(k)|| < \dfrac{Mh\Delta^\gamma}{\chi - M(\sigma' + ||A(s) - A(0)||)}$.

Рассмотрим задачу построения оценки погрешности линеаризации по части переменных.

Представляя вектор $x(k)$ в виде $x(k) = (y(k), z(k))$, где $y(k) = (y_i(k)) = (x_i(k))$, $i = 1, 2, ..., n_1$; $z(k) = (z_j(k)) = (x_j(k))$, $j = n_1 + 1, ..., n$, систему (1) запишем следующим образом

$$\begin{gathered} y(k+1) = P(k)y(k) + L(y(k), z(k)) + f(k), \\ z(k+1) = S(k)y(k) + Q(k)z(k) + D(y(k), z(k)) + g(k), \\ x(0) = x_0,\ k \in N. \end{gathered} \tag{15}$$

Здесь $P,\ S$ и Q — матрицы размерности $(n_1 \times n_1),\ (n-n_1)\times n_1$ и $(n-n_1)\times(n-n_1)$ соответственно; $L(y(k),z(k)),\ D(y(k),z(k))$ — вектор-функции размерности n_1 и $(n-n_1)$ соответственно; $f(k)$ — n_1-мерный вектор, $g(k)$ — $(n-n_1)$-мерный вектор, удовлетворяющие соотношениям

$$||L(y(k),z(k))|| \le m||y(k)||^{\alpha},\ ||f(k)|| \le q < \infty,\ \alpha > 1,\ q > 0, m > 0;$$

$$||D(y(k),z(k))|| \le d||y(k)||^{\beta},\ ||g(k)|| \le p < \infty,\ \beta > 1,\ d > 0, p > 0.$$

Оценим норму погрешности линеаризации $\varepsilon_y(k) = y(k) - \eta(k),\ \varepsilon_z = z(k) - \nu(k),\ k \in N$, где $\eta(k)$ и $\nu(k)$ — решения системы

$$\eta(k+1) = P(k)\eta(k) + f(k),$$

$$\nu(k+1) = S(k)\eta(k) + Q(k)\nu(k) + g(k),\ \tau(k) = (\eta(k),\nu(k)),\ \tau(0) = x_0,\ k \in N.$$

Пусть для линейной системы при фиксированном s

$$\begin{aligned}\tilde{y}(k+1) &= P(s)\tilde{y}(k),\\ \tilde{z}(k+1) &= S(s)\tilde{y}(k) + Q(s)\tilde{z}(k),\ k \in N,\end{aligned} \tag{16}$$

существует дискретная функция Ляпунова $\tilde{V}(x(k))$, удовлетворяющая неравенствам

а$'$) $||y(k)|| \le \tilde{V}(x(k)) \le \mu(||y(k)|| + ||z(k)||),\ \mu > 1;$

б$'$) $|\tilde{V}(x''(k)) - \tilde{V}(x'(k))| \le \mu(||y''(k) - y'(k)|| + ||z''(k) - z'(k)||);$

в$'$) $\tilde{V}(A\tilde{x}(k)) - \tilde{V}(\tilde{x}(k)) \le -\theta\tilde{V}(\tilde{x}(k)),\ 0 < \theta < 1,\ \tilde{x}(k) = (\tilde{y}(k),\tilde{z}(k)).$

Потребуем, чтобы ряды были сходящимися и $\sum\limits_{i=0}^{\infty} ||P(i+1) - P(i)|| = \sigma_1,\ \sum\limits_{i=0}^{\infty} ||S(i+1) - S(i)|| = \sigma_2,\ \sum\limits_{i=0}^{\infty} ||Q(i+1) - Q(i)|| = \sigma_3$. В силу сделанных выше предположений для первой разности функции $V(x(k))$ на решениях системы (15) справедливо неравенство

$$\tilde{V}(x(k+1)) - \tilde{V}(x(k)) \le -(\theta - \vartheta)\tilde{V}(x(k)) + \mu m||y(k)||^{\alpha} + \mu d||y(k)||^{\beta} + \mu(p+q),$$

где

$$\vartheta = \mu\left(||P(s) - P(0)|| + ||S(s) - S(0)|| + ||Q(s) - Q(0)|| + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right).$$

Пусть $0 < \theta - \vartheta < 1$. После введения обозначения $\tilde{V}(x(k)) ::= \tilde{v}(k)$

$$\tilde{v}(k+1) - \tilde{v}(k) \le -(\theta - \vartheta)\tilde{v}(k) + \mu m\tilde{v}^{\alpha}(k) + \mu d\tilde{v}^{\beta}(k) + \mu(p+q).$$

По теореме 1 $\tilde{v}(k) \le w(k),\ k \in N$, где $w(k)$ — решение уравнения

$$\begin{gathered} w(k+1) - w(k) = \\ = -(\theta - \vartheta)w(k) + \mu m w^{\alpha}(k) + \mu d w^{\beta}(k) + \mu(p+q) \equiv \psi(w(k)), \\ w(0) = v(0),\ k \in N. \end{gathered} \tag{17}$$

Если уравнение $\psi(w) = 0$ имеет решение в области $w \ge 0$, то таких решений может быть не более двух. Обозначим их через $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$ так, чтобы $0 \le w^{(1)} \le w^{(2)}$. Очевидно, что

$$\psi(w) > 0 \quad \text{при} \quad 0 < w < w^{(1)},\ w > w^{(2)};$$

$$\psi(w) < 0 \quad \text{при} \quad w^{(1)} < w < w^{(2)};$$

или

$$w(k+1) > w(k) \quad \text{при} \quad 0 < w < w^{(1)},\ w > w^{(2)};$$

$$w(k+1) < w(k) \quad \text{при} \quad w^{(1)} < w < w^{(2)}.$$

Значит, если $0 < w(0) < w^{(1)}$ или $w^{(1)} < w(0) < w^{(2)}$, то $w(k) \to w^{(1)}$ при $k \to \infty$, а если $w(0) > w^{(2)}$, то $w(k) \to \infty$ при $k \to \infty$. Следовательно, $w^{(1)}$ — точка асимптотически устойчивого, а $w^{(2)}$ — точка неустойчивого положения равновесия для уравнения (17).

Таким образом, если $\mu||x(0)|| \leq w^{(2)}$, то справедлива оценка

$$||y(k)|| \leq \max\{\mu||x(0)||, w^{(1)}\} \equiv \delta. \tag{18}$$

Перейдем к оценке нормы погрешности линеаризации $\varepsilon(k)$. Вектор $\varepsilon(k)$ есть решение системы

$$\begin{gathered} \varepsilon_y(k+1) = P(k)\varepsilon_y(k) + L(y(k), z(k)), \\ \varepsilon_z(k+1) = S(k)\varepsilon_y(k) + Q(k)\varepsilon_z(k) + D(y(k), z(k)), \\ \varepsilon(k) = (\varepsilon_y(k), \varepsilon_z(k)),\ \varepsilon(0) = 0,\ k \in N. \end{gathered} \tag{19}$$

Оценим первую разность функции $\tilde{V}$ на решениях системы (19), принимая во внимание полученную оценку (18) для $||y(k)||$,

$$\tilde{V}(\varepsilon(k+1)) - \tilde{V}(\varepsilon(k)) \leq -(\theta - \vartheta)\tilde{V}(\varepsilon(k)) + \mu(m\delta^{\alpha} + d\delta^{\beta}). \tag{20}$$

Применяя обозначение $\tilde{V}(x(k)) ::= \tilde{v}(k)$, перепишем неравенство (20)

$$\tilde{v}(k+1) - \tilde{v}(k) \leq -(\theta - \vartheta)\tilde{v}(k) + \mu(m\delta^{\alpha} + d\delta^{\beta}),\ k \in N.$$

По теореме 1 $\tilde{v}(k) \leq w(k),\ k \in N$, где $w(k)$ — решение уравнения

$$w(k+1) = (1 - \theta + \vartheta)w(k) + \mu(m\delta^{\alpha} + d\delta^{\beta}),\ w(0) = v(0),\ k \in N. \tag{21}$$

Уравнение (21) равносильно уравнению

$$w(k) = \mu(m\delta^{\alpha} + d\delta^{\beta})\frac{1 - (1 - \theta + \vartheta)^k}{\theta - \vartheta},\ u(0) = 0,\ k \in N. \tag{22}$$

Поскольку $0 < \theta - \vartheta < 1$, то из (22) следует, что

$$||\varepsilon_y(k)|| \leq w(k) \leq \frac{\mu(m\delta^{\alpha} + d\delta^{\beta})}{\theta - \vartheta} \equiv \sigma,\ k \in N. \tag{23}$$

Все выше изложенное сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3. *Если для линейной системы (16) выполнены условия a')–$в'$) и уравнение*

$$-(\theta - \vartheta)w + \mu m w^{\alpha} + \mu d w^{\beta} + \mu(p+q) = 0 \tag{24}$$

в области $w \geq 0$ имеет решения $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$ такие, что $0 \leq w^{(1)} \leq w^{(2)}$ и $\mu||x(0)|| \leq w^{(2)}$, то при $k \in N$ справедливы оценки

$$||y(k)|| \leq \delta,\ ||\varepsilon_y(k)|| \leq \sigma,$$

где

$$\delta = \max\{\mu||x(0)||, w^{(1)}\}, \sigma = \frac{\mu(m\delta^{\alpha} + d\delta^{\beta})}{\theta}.$$

Результат работы является обобщением метода построения оценок погрешности линеаризации, предложенного в [3], на случай систем с переменными коэффициентами в линейной части.

Литература

1. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М: Мир, 1971.
2. Sugiyama S. Difference inequalities and their applications to stability problems //Lect. Notes Math. 1971. № 243. 1–15. URL: https://doi.org/10.1007/BFb0058714
3. Афиногентова Е.В., Щенников В.Н. Построение оценок погрешности линеаризации систем конечно-разностных уравнений // Изв. вузов. Матем. 2002. № 8. 75–78. URL: http://mi.mathnet.ru/ivm1061

MSC2010 39A22

The estimates for solutions of difference analogues of systems of differential equations with variable coefficients

E.V. Afinogentova[1]

National Research Mordovia State University[1]

,

Abstract: The paper proposes a method for constructing error estimates of linearization of a nonlinear system of finite-difference equations with variable coefficients in the linear part. The method is based on a discrete analogue of the second Lyapunov method. The result can be applied to the study of stability of difference schemes for solving systems of differential equations.

Keywords: stability, linearization error, estimation, finite difference equations.

References

1. Halanay A., Veksler D. Qualitative theory of impulse systems. Mir Publ., Moscow. 1971. 310 p. (In Russ.)
2. Sugiyama S. Difference inequalities and their applications to stability problems // Lect. Notes Math. 1971. No. 243. P. 1-15. URL: https://doi.org/10.1007/BFb0058714
3. Afinogentova E.V., Shchennikov V.N. Construction of error estimates for the linearization of finite-difference equations // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 2002. 8. P. 75-78. URL: http://mi.mathnet.ru/ivm1061 (In Russ.)

УДК 004.942

Математическое моделирование частотного датчика давления

Калинов Е.Д.[1]

Ульяновский государственный университет[1]

Аннотация: Математическое моделирование разрабатываемых изделий с целью оценки эффективности конструкции, влияние изменения материалов, из которых она изготавливается, исследование различных технических решений, являющихся новаторскими в области их применения, применяются на практике в различных отраслях промышленности. В статье описаны конструкция и принцип работы частотного датчика давления, применяемого в авиационном приборостроении, и его математическая модель, отражающая его работу в условиях окружающей среды.

Ключевые слова: частотный датчик давления, тонкостенный резонатор, FSI-анализ, Ansys CFX, Ansys Mechanical.

1. Общие сведения об авиационных датчиках давления

Система воздушных сигналов (СВС) определяет параметры потока воздуха, проводя измерения во внешней среде [1]. Датчики давления СВС предназначены для восприятия полного и статического давления, преобразования их в электрические сигналы и последующей передачи их в вычислитель в удобной форме с целью определения параметров движения летательного аппарата.

Схема датчика давления представлена на рис. 1.

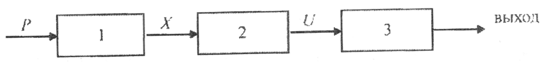

Рис. 1. Структурная схема датчика давления: P – измеряемое давление; 1 – первичный преобразователь; 2 – вторичный преобразователь; 3 – блок обработки сигналов; X – перемещение; U – электрический сигнал.

Первичный преобразователь (чувствительный элемент по давлению) присутствует в датчиках давления всех типов и служит для преобразования давления в перемещение. Чувствительный элемент – самая ответственная часть конструкции датчика давления. Главными статическими характеристиками любого упругого чувствительного элемента, самой ответственной части конструкции датчика, являются:

– зависимость перемещения X от давления:

$$X = f(P), \tag{1}$$

– зависимость тягового усилия F от давления:

$$F = f(P). \tag{2}$$

Выходом чувствительного элемента для вибрационно-частотного датчика давления являются колебания, которые также являются перемещениями, в связи с чем уравнение (1) актуально и для датчиков давления данного типа. При этом упругий чувствительный элемент любого вида работает только в пределах закона Гука, когда сила упругости прямо пропорциональна изменению перемещения материала.

Принцип работы преобразователя давления в частоту вибрационно-частотного датчика основан на функциональной зависимости частоты резонансных колебаний упругого чувствительного элемента от величины измеряемого давления [2]:

$$\nu = F(P). \tag{3}$$

В рассматриваемом случае в качестве упругого чувствительного элемента используется тонкостенный цилиндр, собственная частота колебаний которого является функцией его физических свойств. Она зависит от формы и размера, упругости материала, массы цилиндра и распределения масс, участвующих в колебаниях, механических напряжений внутри него. Действие датчика основано на зависимости собственной частоты упругого элемента от величины его внутреннего механического напряжения, вызванного действием измеряемого давления [3].

2. Устройство и принцип работы частотного датчика давления с цилиндрическим чувствительным элементом

Датчик давления работает следующим образом. Давления, разность которых подлежит измерению, с помощью штуцеров 1 и 17 (рис.2) характеризуют воздействия на внешнюю и внутреннюю поверхности тонкостенного цилиндрического резонатора 11, вследствие чего в последнем возникают пропорциональные этой разности тангенциальное (окружное) и меридиональное механическое напряжения. Совместно с системой самовозбуждения колебаний резонатор образует электромеханическую автоколебательную систему, частота колебаний которой равна его собственной частоте и связана с механическими напряжениями в его стенке и, следовательно, с измеряемой разностью давлений однозначной функциональной зависимостью [4].

Система самовозбуждения поддерживает незатухающие изгибные колебания резонатора, в процессе которых его поперечное сечение принимает форму эллипса, вытянутого попеременно то по одной, то по другой из двух взаимно перпендикулярных осей, совпадающих с направлениями жирных стрелок 6 на рис. 3. На этом рисунке на фоне деталей конструкции датчика давления схематично изображена конфигурация создаваемого постоянными магнитами 1 квадрупольного магнитного поля (пунктирные стрелки 4) и форма поперечного сечения резонатора, которая возникает при взаимодействии протекающего по нему тока с этим магнитным полем. Жирными стрелками 6 условно обозначены равнодействующие приложенных к резонатору пондеромоторных сил [5].

При равенстве наружного и внутреннего давлений частота колебаний стенок определяется их массой и жесткостью. В случае присутствия внутреннего избыточного давления к жесткости стенок добавляется жесткость, созданная давлением. Влияние этой дополнительной жесткости состоит в том, что при деформации сечения цилиндра из окружности в эллипс его внутренний объем уменьшается, следовательно, должна быть затрачена дополнительная энергия, пропорциональная внутреннему давлению [6].

При колебаниях резонатора изменяются емкости конденсаторов, образуемых электродами и цилиндрической поверхностью резонатора, вследствие чего на входе усилителя появляется переменное напряжение той же частоты, что и частота колебаний резонатора. С выхода усилителя это напряжение через согласующий трансформатор подается на резонатор. При протекании переменного тока в осевом направлении через резонатор, расположенный

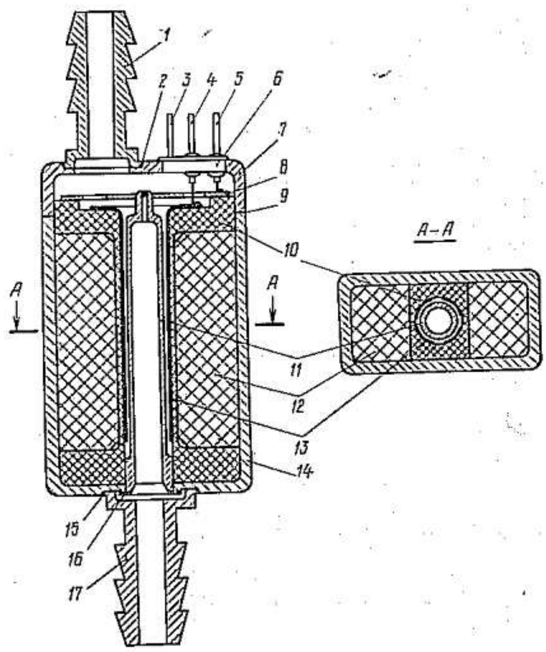

Рис. 2. Конструкция модуля давления (общий вид): 1, 17 – штуцера; 2, 9, 15, 16 – сварные швы; 3 – электрический вывод от кожуха модуля; 4, 5 – электрические выводы от электродов 13 и от резонатора; 6 – корпус гермоввода; 7 – крышка; 8 – плоская пружина из термобиеталла; 10 – керамическое основание; 11 – тонкостенный цилиндрический резонатор; 12 – постоянные магниты из ферроксдюра; 13 – электроды ёмкостной системы съема; 14 – кожух датчика.

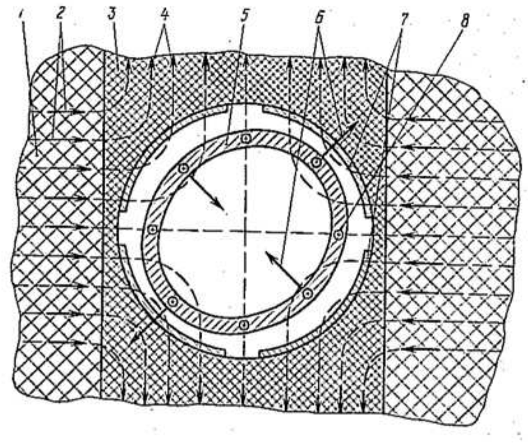

Рис. 3. Форма равновесия цилиндрического резонатора с током в квадрупольном магнитном поле: 1 – постоянные магниты из ферроксдюра; 2 – направления постоянного намагничивания магнитов; 3 – керамическое основание; 4 – силовые линии квадрупольного магнитного поля; 5 – тонкостенный цилиндрический резонатор; 6 – равнодействующие приложенных к резонатору пондеромоторных сил; 7 – электроды емкостной системы съема; 8 – условные обозначения протекающих по резонатору токов.

в постоянном квадрупольном магнитном поле, на него действуют пондеромоторные силы, обеспечивающие его дальнейшую раскачку.

Выходной сигнал усилителя является одновременно и выходным сигналом датчика. Фазовая характеристика усилителя подбирается таким образом, что обеспечивается выполнение условия самовозбуждения. Благодаря этому в системе поддерживаются незатухающие колебания, частота которых связана с измеряемой разностью давлений [5].

В таблице 1 представлен диапазон измерения абсолютного давления для рассматриваемого датчика давления.

Таблица 1. Диапазон измеряемого давления.

ГПа	мм.рт.ст
От 6,67 до 1199,90	От 5 до 2100

Чувствительный элемент в виде тонкостенного цилиндра для датчика изготавливается из стали 45НХТ, свойства которой представлены в таблице 2 [7].

Таблица 2. Свойства материала резонатора (45НХТ)

$T,^\circ C$	$E, 10^{11}, Pa$	$\rho, kg/m^3$	σ_B, MPa
20	1,85	8050	800-1180

3. Математическая модель частотного датчика давления

Моделирование механических колебаний датчика осуществлялось в программном комплексе ANSYS. Применялась технология FluidStructureInteraction (FSI), позволяющая реализовать связь между анализом напряженно-деформированного состояния и газодинамическим расчетом, по схеме одностороннего взаимодействия, подразумевающей передачу поверхностных нагрузок из ANSYS CFX в ANSYS Mechanical и перемещений из ANSYS Mechanical в ANSYS CFX.

При проведении моделирования были использованы модули программного комплекса ANSYS:«Modal»(для расчета форм и частот собственных колебаний чувствительного элемента), «TransientStructural» (для моделирования колебания стенок резонатора под воздействием магнитов), «CFX» (проектирование воздуха, находящего внутри резонатора). Схема проекта в ANSYS Workbench представлена на рис. 4.

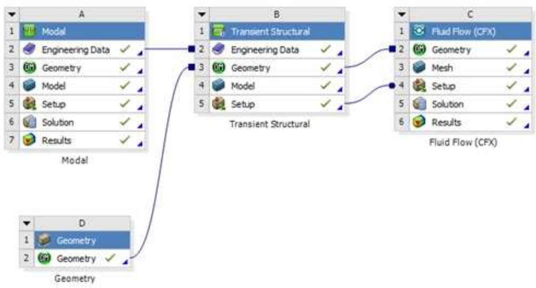

Рис. 4. Схема проекта в ANSYS Workbench.

При выполнении расчета форм и частот собственных колебаний внешние силы и демпфирование отсутствуют, в качестве граничных условий использовалось частичное ограничение перемещения (фиксация) конструкции. В данном случае фиксация выполнена на открытом конце на утолщенной части цилиндра и на конце токосъемника (рис. 5).

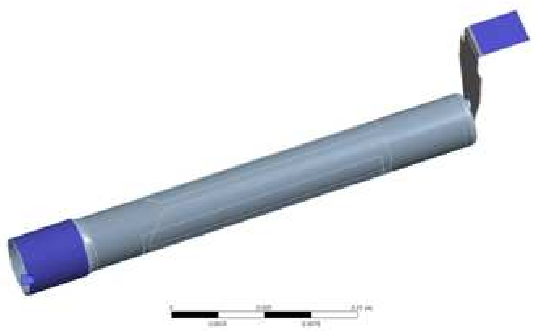

Рис. 5. Фиксация конструкции.

По результатам модального анализа нужные формы колебаний соответствуют 4 и 5 модам (формам свободных колебаний), собственные частоты которых равны 10783 и 10785 Гц (рис. 6).

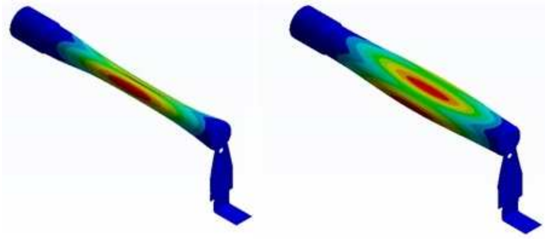

Рис. 6. Формы продольных колебаний резонатора, соответствующие собственным частотам 10783 Гц (слева) и 10785 Гц (справа).

Согласно техническим характеристикам датчика, его рабочая частота равна 11 кГц, в связи с чем модель и полученные по ней результаты можно считать адекватными.

В настройках Transient анализа (анализа переходных процессов) для решения задачи, связанной с взаимодействием газа (воздуха) и твердого тела, создается объект Fluid SolidInterface, представляющий собой поверхность контакта двух сред.

Задается граничное условие Force, определяющее силу, действующую на резонатор со стороны магнитов, изменяющуюся по синусоидальному закону (рис. 7).

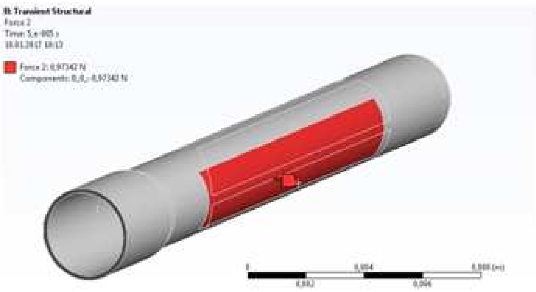

Рис. 7. Сила, действующая на магниты.

Перемещение стенок цилиндра из Transient анализа передавались в модуль Fluid Flow (CFX). Обязательным условием функционирования модели, реализующей связанный расчет, является идентичность настроек длительности одного шага расчета по времени и диапазона расчетного времени в TransientStructural и CFX. В данном случае это 0,00002 с и 0,01 с.

В качестве граничных условий в модуле CFX задается давление, равномерно распределенное по всему объему воздуха. Величины давления заданы 0,5; 1,0; 1,5 атм. (рис. 8).

На основании результатов расчета были построены графики зависимости спектральной плотности от частоты, по которым выявлено, что резонансные частоты находятся в пределах 11-12 кГц (рис. 9).

4. Заключение

Анализ полученных данных математического моделирования датчика дает представление о корректности построенной модели, применение которой позволяет оценить точность прибора на этапе проведения научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ.

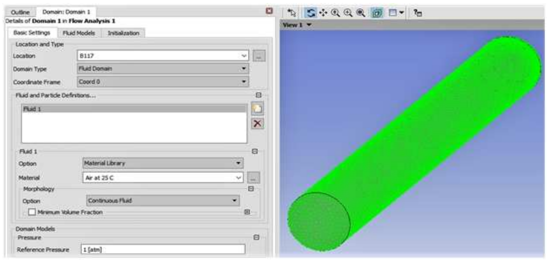

Рис. 8. Граничные условия для расчета датчика с учётом воздуха при давлении 1 атм. Процесс – изотермический, температура равна $25°C$.

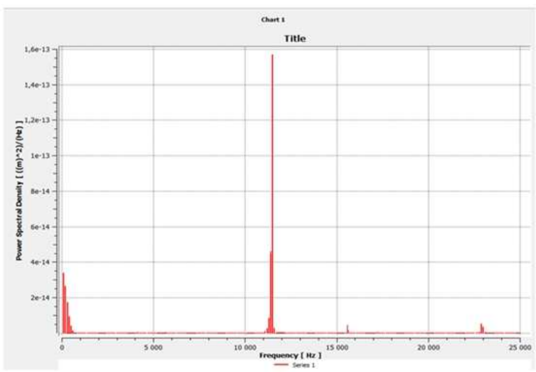

Рис. 9. График зависимости спектральной плотности от частоты.

Помимо этого, изменение параметров модели дает возможности использования ее для оценки работоспособности чувствительного элемента при измерении отличных от давления величин. Частотный датчик давления может послужить общей конструктивной основой для создания унифицированных рядов датчиков средней точности для измерения в широких диапазонах таких величин, как давление, температура, линейные и угловые ускорения, угловые скорости, массовые плотности и вязкоупругие свойства жидкости сред и др. [5]

Развитие численных методов расчета динамики датчиков, связанное с использованием смешанных вариационных принципов, ортогональных финитных функций и моделей наномеханики [8–10], дает возможность развития конструкций датчиков и проведения исследований динамики напряженно-деформированного состояния датчиков на более высоком уровне, поскольку такой подход позволяет находить не только приближенные решения для перемещений, но и для деформаций и напряжений с одинаково высокой точностью и одинаковой гладкостью. Подобными достоинствами численные методы, используемые, например, в ANSYS, не обладают.

Литература

1. Кучерявый А.А. Бортовые информационные системы: Курс лекций / А.А. Кучерявый; под ред. В.А. Мишина и Г.И. Клюева. 2-е изд., перераб. и доп. Ульяновск: УлГТУ, 2004. С. 5-7.

2. Клюев Г.И. Измерители аэродинамических параметров летательных аппаратов:

учебное пособие / Г.И. Клюев, Н.Н. Макаров, В.М. Солдаткин, И.П. Ефимов; под ред. В.А. Мишина. Ульяновск: УлГТУ, 2005. С. 419-433.

3. Вульвет Дж. Датчики в цифровых системах / Пер. с англ. Под ред. А. С. Яроменка. М.: Энергоиздат, 1981. С. 78-98.
4. Патент СССР №4340588/10, 03.11.1987.Частотный датчик давления // Патент SU №1484068. 2005. Бюл. № 16. / Граур С.И.
5. Горенштейн И. А. Гидростатические частотные датчики первичной информации. М.: Машиностроение, 1976. С. 12-17.
6. Агейкин Д.И., Костина Е.И., Кузнецова Н.Н. Датчики контроля и регулирования. М.: Машиностроение, 1965. 928 с.
7. ТУ14-1-3074-80 Прокат горячекатаный сортовой и листовой, пруток и полоса кованые, проволока и лента из сплава марки 45НХТ (ЭП218), 45НХТ-П (ЭП218-П), 45НХТ-ВИ (ЭП218-ВИ), 45НХТ-ИЛ (ЭП218-ИЛ) – Изменение №13; Введ. 1.12.2017г.
8. Леонтьев В.Л., Мелентьев А.Ю. Сеточные методы расчета криволинейных стержней // Математическое моделирование. 2003. Т. 15. № 10. С. 95.
9. Леонтьев В.Л., Михайлов И.С. О построении потенциала взаимодействия атомов, основанном на ортогональных финитных функциях // Нано- и микросистемная техника. 2011. № 9 (134). С. 48-50.
10. Леонтьев В.Л., Рыков Е.А. Интегральные преобразования, связанные с ортогональными финитными функциями, в задачах спектрального анализа сигналов // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, № 7. С. 93-100.

MSC2010 65-04

Mathematical modeling of the frequency pressure sensor

E.D. Kalinov[1]

Ulyanovsk State University[1]

Abstract: Mathematical modeling of the products being developed in order to assess the effectiveness of the design, the impact of changes in the materials, studies of various technical solutions, is used in practice in various industries. The article describes the design and principle of operation of the frequency pressure sensor used in aircraft instrumentation, and its mathematical model.

Keywords: frequency pressure sensor, thin-wall resonator, FSI analysis, Ansys CFX, Ansys Mechanical.

References

1. Kucheryavyj A.A. Bortovye informacionnye sistemy: Kurs lekcij "[Airborne Information Systems: Lecture Course]". Edited by V.A. Mishina, G.I. Klyueva. 2-nd ed. Ul'yanovsk: UlGTU, 2004. P. 5-7.

2. Klyuev G.I., Makarov N.N., Soldatkin V.M., Efimov I.P. Izmeriteli aerodinamicheskih parametrov letatel'nyh apparatov: uchebnoe posobie "[Meters of the aerodynamic parameters of aircraft: tutorial]". Edited by V.A. Mishina. Ul'yanovsk: UlGTU, 2005. P. 419-433.
3. Vul'vet Dzh. Datchiki v cifrovyh sistemah "[Transducers in digital systems]". Edited by A. S. YAromenka. M.: Energoizdat, 1981. P. 78-98.
4. Patent SSSR №4340588/10, 03.11.1987. "[Pressure transmitter]". Patent SU №1484068. 2005. Bul. № 16. / Graur S.I.
5. Gorenshtejn I. A. Gidrostaticheskie chastotnye datchiki pervichnoj informacii "[Hydrostatic frequency sensors of primary information]". M.: Mashinostroenie, 1976. P. 12-17.
6. Agejkin D.I., Kostina E.I., Kuznecova N.N. Datchiki kontrolya i regulirovaniya [Monitoring and regulation sensors]. M.: Mashinostroenie, 1965. 928 p.
7. TU14-1-3074-80 Hot-rolled sectional and sheet metal, forged bar and strip, wire and strip from alloy grade 45NHT (EP218), 45NHT-P (EP218-P), 45NHT-VI (EP218-VI), 45NHT-IL (EP218-IL) - Change №13; ent. 1.12.2017.
8. Leont'ev V.L., Melent'ev A.I. Grid methods of calculations curvilinear bars. Matematicheskoe modelirovanie. 2003. Vol. 15, No. 10. P. 95.
9. Leont'ev V.L., Mihajlov I.S. On the construction of the atomic interaction potential based on orthogonal finite functions. Nano- i mikrosistemnaya tekhnika. 2011. No. 9 (134). P. 48-50.
10. Leont'ev V.L., Rykov E.A. Integral transformations associated with orthogonal finite functions in problems of spectral analysis of signals. Matematicheskoe modelirovanie. 2006. Vol. 18, No. 7. P. 93-100.

УДК 517.958:519.6

О конечных рядах, связанных с ортогональными финитными функциями, в методе Фурье

Леонтьев В.Л. [1]

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого[1]

Аннотация: Излагается обобщение метода Фурье, связанное с применением ортогональных финитных функций, на примере первой начально-краевой задачи для двумерной области с криволинейной границей. Формируемая последовательность конечных рядов Фурье в каждый момент времени сходится к точному решению задачи – бесконечному ряду Фурье. Метод дает сколь угодно точные приближенные аналитические решения задачи, по структуре аналогичные точному решению, в форме конечных ортогональных рядов – обобщенных рядов Фурье, открывая новые возможности классического метода разделения переменных при решении задач для областей с криволинейными границами. Аналогичное обобщение метода Фурье справедливо в рамках начально-краевых задач других типов, для областей более высокой размерности.

Ключевые слова: метод разделения переменных, метод Фурье, ортогональные финитные функции, конечные ряды, краевая задача, область с криволинейной границей, собственные значения оператора, собственные функции оператора.

1. Введение

На примере первой начально-краевой задачи для области с криволинейной границей излагается алгоритм обобщенного метода Фурье, связанный с применением ортогональных финитных функций (ОФФ). Показано, что формируемая последовательность конечных рядов Фурье в каждый момент времени сходится к точному решению задачи – бесконечному ряду Фурье. Структура этих конечных рядов Фурье аналогична структуре бесконечного ряда Фурье. При увеличении числа узлов сетки в рассматриваемой области с криволинейной границей имеет место сходимость приближенных собственных значений и собственных функций краевой задачи к точным собственным значениям и собственным функциям и при этом структура конечных рядов Фурье приближается к структуре бесконечного ряда Фурье, представляющего собой точное решение начально-краевой задачи. Метод дает сколь угодно точные приближенные аналитические решения задачи, по структуре аналогичные точному решению, и поэтому относится к группе аналитических методов построения решений в форме конечных ортогональных рядов – обобщенных рядов Фурье, открывая новые возможности классического метода Фурье.

Метод разделения переменных (метод Фурье) позволяет находить частные решения многих краевых и начально-краевых задач для уравнений в частных производных, допускающих разделение переменных. Метод связан с задачей Штурма-Лиувилля и, во многих случаях, со специальными функциями на этапе решения этой задачи. Классический метод Фурье позволяет получать решения широких классов задач, но его реализация для задач многих типов, в том числе задач, постановки которых содержат нерегулярные граничные условия, даже в тех случаях, в которых все участки границы области являются координатными линиями или поверхностями, встречается со значительными трудностями. Одно из направлений расширения области применения классического метода Фурье – решение сопутствующих методу математических проблем, например, связанных с характером граничных условий [1]. Специальные функции появляются при решении задачи Штурма-Лиувилля в цилиндрической или сферической системах координат, применение которых целесообразно в случаях областей, границы которых – координатные линии или поверхности в этих системах координат (границы цилиндрических и сферических областей). В общем случае задач для областей с криволинейными границами применение специальных функций является неэффективным. Классический метод Фурье применим только при решении краевых и начально-краевых задач для областей классической формы, что отмечается, например, в [2] при решении контактных задач для упругих тел с криволинейными границами. Решения, полученные классическим методом Фурье, приводятся, в частности, в статьях [3-6], применение метода рассматривается во многих книгах, например, в [7]. Другие направления развития математических инструментов решения задач для областей с криволинейными границами связаны, во-первых, с созданием и применением ряда методов, отличных от метода Фурье, и, во-вторых, с модификацией самого метода Фурье. Здесь рассматривается расширение области применения классического метода Фурье, определяемое применением последовательности конечных обобщенных рядов Фурье, а также использованием при этом ОФФ (ортогональных базисных функций с компактными носителями), позволяющих находить аналитические решения задачи Штурма-Лиувилля на сетках в областях с криволинейными границами.

2. Алгоритм метода Фурье, связанный с конечными рядами ОФФ

На примере первой начально-краевой задачи рассматривается алгоритм обобщенного метода Фурье решения начально-краевых задач для областей с криволинейными границами. Первые шаги алгоритма обобщенного метода Фурье для областей с криволинейной границей совпадают с аналогичными шагами классического метода Фурье. Решение начально-краевой задачи также разыскивается в виде произведения функции, зависящей только от времени, и функции, зависящей от пространственных координат. Подстановка произведения функций в дифференциальное уравнение начально-краевой задачи приводит к краевой задаче Штурма-Лиувилля. При разделении переменных из постановки начально-краевой задачи также следует уравнение задачи Коши, решение которой связано посредством входящего в постановку задачи Коши параметра с решением задачи Штурма-Лиувилля, и два начальных условия.

Дальнейшие шаги алгоритма обобщенного метода Фурье, предназначенного для решения начально-краевых задач в случае двумерных областей с криволинейными границами, отличаются от соответствующих шагов классического алгоритма, поскольку связаны с применением ОФФ при построении последовательности приближенных аналитических решений в форме конечных обобщенных рядов Фурье и с предельным переходом в этой последовательности к точному решению первой начально-краевой задачи – бесконечному ряду Фурье. Нетривиальное решение краевой задачи Штурма-Лиувилля ищется в виде линейной комбинации тензорных произведений функций одного аргумента – соответственно x и y, взятых из двух систем сеточных ОФФ [8]. Двумерная односвязная область с криволинейной границей вписывается в прямоугольную область, границы которой разбиваются сетками на части, определяющие конечные носители ОФФ.

Заметим, что использование диагоналей прямоугольных конечных элементов, возникающих при таком разбиении, позволяет аппроксимировать криволинейные части границы исходной области. Ортогональные финитные функции двух аргументов, конечные носители которых связаны с такими диагоналями, вводятся в [8] и заменяют собой тензорные произведения ОФФ одного аргумента.

Для определения величин неизвестных постоянных коэффициентов линейной комбинации ОФФ используются проекционные условия метода Бубнова-Галеркина, в рамках краевой задачи Штурма-Лиувилля совпадающие с условиями метода Ритца. Формируется однородная система линейных алгебраических уравнений, неизвестными в которой являются указанные коэффициенты. Эта система всегда имеет тривиальное решение. Те значения параметра, появляющегося на этапе разделения переменных, при которых система имеет нетривиальные решения, являются собственными значениями проекционно-сеточного оператора, полученного с помощью проекционного алгоритма Бубнова-Галеркина на основе исходного дифференциального оператора, а также собственными значениями краевой задачи Штурма-Лиувилля, записанной в проекционной форме. Матрица системы уравнений – вещественная и симметричная, а, следовательно, все собственные значения и собственные векторы этой матрицы имеют вещественные значения [9, с. 134-142], причем все ее собственные векторы линейно независимы и попарно ортогональны. Собственные значения положительны, поскольку матрица не только симметричная и вещественная, но и положительно определенная в силу того, что матрица возникла в проекционных условиях на основе скалярного произведения, примененного к положительно определенному в случае рассматриваемого граничного условия оператору. Строится конечная сумма, по индексам найденных собственных значений, произведений функций, соответствующих этим собственным значениям. Такими сомножителями-функциями являются решения начальной задачи Коши, возникающей после разделения переменных, для найденных собственных значений и конечный обобщенный ряд ОФФ-Фурье – аналитическое решение задачи Штурма-Лиувилля в проекционной форме. Коэффициенты конечного ряда определяются классическими формулами для коэффициентов Фурье, выражающими их через функции, заданные в двух начальных условиях и через ОФФ. Получаемый конечный ряд Фурье удовлетворяет уравнениям задачи Штурма-Лиувилля в проекционной форме, уравнению задачи Коши, а также граничному условию и двум начальным условиям, то есть является приближенным аналитическим решением первой начально-краевой задачи в случае области с криволинейной границей.

При сгущении сеток и, соответственно, при увеличении числа используемых ОФФ, собственные функции и собственные значения оператора задачи, записанной в равносильной проекционной форме, после ее дискретизации сходятся к соответствующим собственным функциям и собственным значениям оператора исходной задачи. Доказательство сходимости собственных функций проводится на основе рассмотрения вспомогательного квадратичного функционала, имеющего в стационарной точке минимум и равного нулю в этой точке. Поэтому задача минимизации функционала сводится к задаче теории аппроксимации точных собственных функций линейными комбинациями ОФФ, то есть к задаче, решение которой содержится в [8], где имеются соответствующие теоремы об аппроксимации, определяющие точность аппроксимации и скорость сходимости, зависящие от типа конкретных систем базисных ОФФ. В [8, стр. 129-134] показано, что для оператора Лапласа при увеличении числа узлов сетки области, то есть при увеличении числа используемых сеточных базисных ОФФ, приближенные собственные частоты сходятся к соответствующим по номерам точным собственным частотам краевой задачи. При увеличении числа узлов сетки области приближенные решения задачи Штурма-Лиувилля, то есть приближенные собственные функции этой задачи, сходятся по норме пространства Соболева к ее точным решениям – собственным функциям. При этом неограниченно возрастает число собственных значений и собственных функций краевой задачи в проекционной форме, а, следовательно, конечная сумма в пределе переходит в бесконечный ряд, который при всяком допустимом значении времени является бесконечным рядом Фурье. Такой ряд является единственным решением исходной начально-краевой задачи, что следует из теоремы [10, стр. 88-91], основанной на теореме Стеклова [10, стр. 87].

Отличие данного метода решения начально-краевых задач для областей с криволинейными границами от других методов, например, от классического метода конечных элементов, связанного с использованием неортогональных сплайнов, состоит в том, что в данном методе определяемая его алгоритмом последовательность конечных рядов Фурье в каждый фиксированный момент времени сходится к соответствующему бесконечному ряду Фурье, сформированному на основе точных собственных функций и точных собственных значений и представляющему собой существующее точное решение начально-краевой задачи, определить которое не удается.

3. Заключение

В работах [11-14] показано, что сочетание таких свойств сеточных базисных ОФФ, как финитность и ортогональность, приводит к высокой эффективности использования ОФФ при создании новых интегральных преобразований, потенциала взаимодействия атомов в механике деформируемого твердого тела (упругость и пластичность, статика или динамика, линейные или нелинейные задачи, стержни, пластины и оболочки, трехмерные тела).

Здесь раскрываются возможности ОФФ в обобщении классического метода математической физики, приводящем к включению в область его применения задач для областей с криволинейными границами. Показано, что обращение к ОФФ порождает конечные обобщенные ряды Фурье, которые представляют собой последовательность аналитических приближенных решений первой начально-краевой задачи для двумерной области с криволинейной границей, которые при увеличении числа узлов сетки неограниченно близко (в смысле нормы пространства Соболева, дающей оценку близости не только функций, но и их первых частных производных) подходят к точному решению этой задачи - бесконечному ряду Фурье, не только по количественным критериям, но по своей аналитической структуре.

Метод дает сколь угодно точные приближенные аналитические решения исходной начально-краевой задачи, поставленной в форме дифференциальных уравнений в частных производных с краевыми условиями, в форме ортогональных конечных рядов – обобщенных конечных рядов Фурье, связанных с сеточными ОФФ, для областей с криволинейными границами. Структура этих конечных обобщенных рядов Фурье аналогична структуре искомого точного решения в форме бесконечного ряда Фурье, и поэтому, после того, как задана точность, с которой определяется решение в форме конечного обобщенного ряда Фурье, можно считать, что метод приводит к точному аналитическому решению, удовлетворяющему заданной точности.

Литература

1. Гасымов Э.А., Гусейнова А.О., Гасанова У.Н. Применение обобщенного метода разделения переменных к решению смешанных задач с нерегулярными граничными условиями // Журнал вычислит. матем. и матем. физики. 2016. Т. 56, № 7. С. 1335–1339.

2. Савичев И.С., Чернышев А.Д. Применение метода угловых суперпозиций для решения контактной задачи о сжатии упругого цилиндра // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2009. № 3. С. 151-162.

3. Хромов А.П., М.Ш. Бурлуцкая М.Ш. Классическое решение методом Фурье смешанных задач при минимальных требованиях на исходные данные // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, № 2. С. 171–198.

4. Колмогоров В.Л., Федотова В.П., Спевак Л.Ф., Бабайлов Н.А., Трухин В.Б. Решение нестационарных температурных и термомеханических задач методом разделения переменных в вариационной постановке // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2006. Вып. 42. С. 72–75.

5. Малов Ю.И., Мартинсон Л.К., Павлов К.Б. Решение некоторых смешанных краевых задач гидродинамики проводящих сред методом разделения переменных // Журнал вычислит. матем. и матем. физики. 1972. Т. 12, № 3. С. 627–638.

6. Исраилов М.Ш. Дифракция акустических и упругих волн на полуплоскости при разнотипных граничных условиях // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2013. № 3. С. 121-134.

7. Vretblad A. Fourier analysis and its applications. New York, Berlin, Heidelber, SpringerVerlag, 2003. 269 p.

8. Леонтьев В.Л. Ортогональные финитные функции и численные методы. Ульяновск, УлГУ, 2003. 178 с.

9. Клиот-Дашинский М.И. Алгебра матриц и векторов. Л., изд-во Ленингр. ун-та, 1974. 160 с.

10. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М., главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1974. 430 с.

11. Леонтьев В.Л. Вариационно-сеточный метод решения задач о собственных колебаниях упругих трехмерных тел, связанный с использованием ортогональных финитных функций // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2002. № 3. С. 117.

12. Леонтьев В.Л., Риков Е.А. Интегральные преобразования, связанные с ортогональными финитными функциями, в задачах спектрального анализа сигналов // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, № 7. С. 93-100.

13. Леонтьев В.Л., Михайлов И.С. О построении потенциала взаимодействия атомов, основанном на ортогональных финитных функциях // Нано- и микросистемная техника. 2011. № 9 (134). С. 48-50.

14. Леонтьев В.Л., Мелентьев А.Ю. Сеточные методы расчета криволинейных стержней // Математическое моделирование. 2003. Т. 15, № 10. С. 95.

MSC2010 35Q74, 65M60

About Finite Series, connected with Orthogonal Finite Functions, in Fourier Method

V.L. Leontiev[1]

Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University[1]

Abstract: The generalization of Fourier method is connected with using of orthogonal compactly supported functions. The generalization is produced on the example of first boundary value problem for region with curvilinear boundary. Formed sequence of finite Fourier series converges to exact solution in every moment of time. The method gives analytical solutions in form of finite Fourier series, which have the structure similar to the structure of exact solution. It opens new possibilities of classical Fourier method for task in region with curvilinear boundary. Similar generalization of Fourier method is possible for other boundary value problems and for 3 dimensions.

Keywords: Method of differentiation of variables, Fourier method, orthogonal finite functions, finite series, boundary value problem, domain with curvilinear boundary, own values of operator, own functions of operator.

References

1. Gasimov E.A., Guseinova A.O., Gasanova U.N. Application of the generalized method of separation of variables to solving mixed problems with irregular boundary conditions. Zhurnal vichislit. matem. i matem. fiziki. 2016. V. 56, No. 7. P. 1335–1339.

2. Savichev I.S., Chernishov A.D. The use of the angular superposition method to solve the contact problem of compression of an elastic cylinder. Izvestia Rossiyskoy akademii nauk. Mehanika tverdogo tela. 2009. No. 3. P. 151-162.

3. Hromov A.P., Burluckaia M.Sh. Classical Solution by the Fourier Method of Mixed Problems with Minimum Requirements on the Initial Data. Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematica. Mehanica. Informatika. 2014. V. 14, No. 2. P. 171–198.

4. Kolmogorov V.L., Fedotova V.P., Spevak L.F., Babailov N.A., Truhin V.B. Solution of non-stationary temperature and thermomechanical problems by the method of separation of variables in a variational formulation. Vestn. Sam. gos. tehn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. 2006. V. 42. P. 72–75.

5. Malov Iu.I., Martinson L.K., Pavlov K.B. The solution of some mixed boundary value problems of the hydrodynamics of conducting media by the method of separation of variables. Zhurnal vichislit. matem. i matem. fiziki. 1972. V. 12, No. 3. P. 627–638.

6. Israilov M.Sh. Diffraction of acoustic and elastic waves in the half-plane under heterogeneous boundary conditions. Izvestia Rossiyskoy akademii nauk. Mehanika tverdogo tela. 2013. No. 3. P. 121-134.

7. Vretblad A. Fourier analysis and its applications. New York, Berlin, Heidelber, SpringerVerlag, 2003. 269 p.

8. Leontiev V.L. Orthogonal finite functions and numerical methods [Ortogonalnie finitnie funkcii i chislennie metodi]. Ulianovsk, UlGU, 2003. 178 p.

9. Kliot-Dashinskiy M.I. Algebra of matrices and vectors [Algebra matric i vektorov]. Leningrad, Leningr. un. press, 1974. 160 p.

10. Arsenin V.Ia. Methods of mathematical physics and special functions [Metodi matematicheskoy fiziki i specialnie funkcii]. M.: Nauka, 1974. 430 p.

11. Leontiev V.L. Variational-grid method for solving problems of natural vibrations of elastic three-dimensional bodies associated with the use of orthogonal finite functions. Izvestia Rossiyskoy akademii nauk. Mehanika tverdogo tela. 2002. No. 3. P. 117.

12. Leontiev V.L., Rikov E.A. Integral transformations associated with orthogonal finite functions in problems of spectral analysis of signals. Matematicheskoe modelirovanie. 2006. V. 18, No. 7. P. 93-100.

13. Leontiev V.L., Mihailov I.S. On the construction of the atomic interaction potential based on orthogonal finite functions. Nano- i mikrosistemnaia tehnika.2011. No. 9 (134). P. 48-50.

14. Leontiev V.L., Melentiev A.Iu. Grid methods for calculating curved rods. Matematicheskoe modelirovanie. 2003. V. 15, No. 10. P. 95.

УДК 532.529:541.182

Управления перемещением агрегатов частиц в вязкой жидкости внешним однородным переменным полем *

Мартынов С.И.[1], Ткач Л.Ю.[1]

Югорский государственный университет[1]

Аннотация: Рассмотрен механизм управления динамикой агрегатов сферических частиц в вязкой жидкости при помощи воздействия внешнего однородного переменного электрического или магнитного поля. Агрегаты рассматриваются, как система частиц, имеющих заряд или дипольный момент, причем суммарный заряд или дипольный момент системы равны нулю. Частицы в отсутствии внешнего воздействия находятся в положении минимума энергии взаимодействия. Воздействие внешнего однородного переменного поля приводит к периодическим деформациям агрегата, которые формируют в окружающей вязкой жидкости течение, создающее гидродинамическую силу, перемещающую центр тяжести агрегата в определенном направлении относительно приложенного поля. Приведены результаты численного моделирования динамики агрегатов из трех частиц. При расчетах учитывались как силы гидродинамического взаимодействия, так и электрические или магнитные силы, удерживающие частицы в агрегате, и стремящиеся вернуть их в исходное положение равновесия.

Ключевые слова: численное моделирование, вязкая жидкость, частицы, гидродинамическое взаимодействие, энергия взаимодействия, внешнее однородное поле, самодвижущиеся агрегаты частиц.

1. Введение

В последние годы активно изучаются активные коллоиды [1]. Интерес к таким системам связан, в том числе, с растущим запросом на нано технологические приложения по разработке автономно двигающихся устройств с целью доставки с их помощью, например, лекарств к пораженной клетке или элементов микроскопических аппаратов с их последующей сборкой в заданном месте. В то же время имеются известные проблемы с моделированием динамики таких систем, связанные, в первую очередь, с управлением такими системами с учетом взаимодействия частиц.

Как известно из классической механики, действие внутренних сил не меняет положение центра тяжести системы. Между тем в природе существует множество живых организмов, перемещающихся в окружающей их жидкой или газообразной среде за счет действия внутренних сил. Это происходит благодаря наличию у таких организмов специального двигательного аппарата, периодические движения которого формирует в окружающей среде течение, создающее движущую силу со стороны этой среды на организм и перемещающую его. Причем движение двигательного аппарата в одну сторону создает течение, действующее на организм с большей силой, чем при движении того же двигательного аппарата в противоположную сторону. Это достигается за счет формы плавников у рыб и ластообразных, ориентация которых относительно тела организма при отталкивании создает большую гидродинамическую силу, чем при возвращении в исходное положение. Сила гидродинами-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-41-860002/18).

ческого взаимодействия определяет динамику агрегата в вязкой жидкости.

Для управления динамикой агрегатов в вязкой жидкости предлагается использовать два механизма взаимодействия частиц, имеющихся в системах жидкость-частицы и принципиально различающихся между собой по своей природе. Первый механизм обусловлен силами, действующими непосредственно между частицами, и связан с физическими свойствами вещества, из которого созданы частицы, а второй - гидродинамическими силами взаимодействия частиц в жидкости. В сочетании с анализом характерных течений, возникающих в окружающей вязкой жидкости при движении живых организмов, это позволяет проектировать микро аппараты для перемещения в вязкой жидкости и способы воздействия на их части, имитирующие двигательный аппарат, внешними полями или другими источниками энергии. В работе [2] на основе анализа движения плавающих организмов в природе предложен способ перемещения агрегатов за счет моментов внутренних сил, действующих на пары частиц, которые своим вращением имитируют двигательный аппарат организма, и формируют характерное вихревое течение в окружающей вязкой жидкости, создающее перемещающую агрегат гидродинамическую силу. В качестве источника энергии, приводящего в движение частицы, обладающих магнитным дипольным моментом, было предложено использование переменного внешнего магнитного поля. Как было показано, при этом вращение частиц не меняет своего направления. Ниже предлагаются модели агрегатов частиц, в которых под действием внешнего поля происходит относительное перемещение частиц, а после его выключения, частицы меняют направления своего движения и стремятся вернуться в исходное состояние минимума энергии потенциального взаимодействия частиц в агрегате. При этом из-за изменения формы агрегата, гидродинамическая сила от возникающего течения в окружающей вязкой жидкости перемещает центр тяжести системы частиц в определенном направлении относительно приложенного поля.

2. Постановка задачи

Рассмотрим два агрегата, состоящих из 3 частиц. Первый агрегат представляет собой заряженные частицы, лежащие на одной прямой: 2 частицы радиуса и одна - радиуса 2. Считаем, что две крайние частицы заряжены отрицательным зарядом q каждая, а центральная частица – положительным $2q$. Помимо сил Кулона, между частицами действую силы неэлектрической природы. Суммарное взаимодействие частиц такое, что имеется их положение равновесия на прямой с координатами: $-6; 0; 6$. Вдоль этой прямой приложено внешнее однородное переменное электрическое поле напряженности . Второй агрегат представляет собой частицы одного радиуса a, обладающих одинаковыми дипольными моментами m. Положение равновесия такой структуры соответствует положению частиц в вершинах правильного треугольника, а направление дипольных моментов такое, что их суммарный момент равен нулю [3].

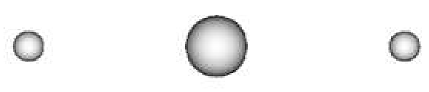

Рис. 1. Структура агрегата из заряженных частицы.

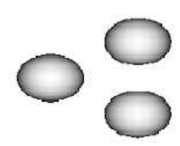

Рис. 2. Структура агрегата из дипольных частицы.

Для расчета течения жидкости вокруг рассматриваемы структур записываются уравнения движения жидкости и каждой частицы с учетом всех сил и моментов, связанных с гидродинамическим взаимодействием всех частиц и силами непосредственно действующими между частицами. Рассматривается случай малых чисел Рейнольдса. Система уравнений для скорости $\vec{u}(\vec{x})$ и давления $p(\vec{x})$ в жидкости в этом случае имеет вид

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad \eta \nabla^2 \vec{u} = \nabla p \tag{1}$$

На поверхности частиц граничные условия записываются в виде

$$\left|\vec{x}^k\right| = a: \quad \vec{u} = \vec{V}^k + \vec{\Omega}^k \times \vec{x}^k$$

Здесь $\vec{V}^k$, $\vec{\Omega}^k$ - векторы линейной и угловой скоростей частицы с номером k соответственно.

Возмущения скорости и давления, возникающие при движении частиц, должны удовлетворять условию:

$$|\vec{x}| \to \infty: \quad \vec{u}^k \to 0, \quad p(\vec{x}) \to 0$$

Система уравнений движения частиц имеет вид

$$\vec{F}^k + \vec{R}^k = 0, \quad \vec{T}^k + \vec{M}^k = 0$$

Здесь векторами $\vec{F}^k$, $\vec{R}^k$ обозначены, соответственно, внешние и внутренние силы, а векторами $\vec{T}^k$, $\vec{M}^k$ моменты внешних и внутренних сил, действующих на частицу с номером k.

3. Метод решения

Для решения системы уравнений используются полученные ранее результаты работ [4,5]. Из решения системы уравнений динамики жидкости находим распределение скорости и давления в жидкости вокруг агрегата и по полученным результатам — силы и моменты сил, действующие на каждую частицу агрегата со стороны жидкости. В общей сложности необходимо найти решение 18 уравнений. Для численного решения системы уравнений использовался специальный программный комплекс для персонального компьютера, который в качестве исходных данных получает только желаемую точность вычислений, координаты и радиусы частиц, скорость внешнего потока и приложенные силы и моменты. Программа сама составляет и находит численное решение системы уравнений, а результат выводит в уже обработанном виде. Аналогичная программа использовалась в работе [7].

Для решения системы уравнений использовалась специальная программа для персонального компьютера [4, 5], которая в качестве исходных данных получает только желаемую точность вычислений, координаты и радиусы частиц, скорость внешнего потока и приложенные внешние силы и моменты. Программа сама составляет и находит численное решение системы уравнений, а результат выводит в уже обработанном виде. Для получения корректных вычислительных результатов учитывались слагаемые с тензорными коэффициентами шестого порядка, что дало погрешность вычислений в десятые доли процента. Такая погрешность получена при компьютерном моделировании, когда вместо реальных параметров задачи используются модельные. Это связано с тем, что для реальных течений Стокса размеры частиц должны быть достаточно малыми, что затрудняет нахождения численного решения системы уравнений и визуализацию результатов. Поэтому применялся метод подобия и модельные параметры. При компьютерном моделировании задаются размер частицы $\hat{a}$, вязкость несущей жидкости $\hat{\eta}$, величина внешней силы $\hat{F}$, действующей на каждую частицу, и ее направление, а также промежуток времени $\hat{t}$. Детально такой метод моделирования и связь между реальными и модельными параметрами представлены в работах [4, 5]

Для учета гидродинамического взаимодействия частиц в жидкости при определении сил и моментов использовался метод, предложенный в работах [6, 7]. Метод основан на представлении решения уравнений Стокса в виде мультипольного разложения с тензорными коэффициентами и позволяет учитывать гидродинамическое взаимодействие большого числа частиц в вязкой жидкости. Для получения корректных вычислительных результатов учитывались слагаемые с тензорными коэффициентами шестого порядка, что дало погрешность вычислений в десятые доли процента. Такая погрешность получена при компьютерном моделировании, когда вместо реальных параметров задачи используются модельные. Это связано с тем, что для реальных течений Стокса размеры частиц должны быть достаточно малыми, что затрудняет нахождение численного решения системы уравнений и визуализацию результатов. Поэтому применялся метод подобия и модельные параметры. При компьютерном моделировании задаются размер частицы, вязкость несущей жидкости, величина внешней силы, действующей на каждую частицу, и ее направление, а также промежуток времени. Детально такой метод моделирования и связь между реальными и модельными параметрами представлены в работах [4, 5].

4. Результаты моделирования

Моделирование проводилось при следующих значениях модельных параметров первого агрегата: радиус частиц $0,5$ см и $1,0$ см, соответственно, время воздействия поля 3 сек., время релаксации – 2 сек., суммарное время счета – 15 сек., сила, действующая со стороны электрического поля $Eq = 1$ г см/сек^2, вязкость жидкости 1 г/(см сек). Сила взаимодействия частиц определялась выражением: $1.5(h-6)$, здесь h – расстояние между частицами. Расчеты дают следующее перемещение центра тяжести агрегата в направлении действия поля – $0,09$ см при погрешности вычислений $0,00017708$.

Необходимо также отметить, что поскольку за период релаксации система полностью не восстанавливает своего первоначального состояния, то через определенный промежуток времени агрегат может разрушиться на отдельные частицы под действием приложенного поля. Если в жидкости таких агрегатов много, то в силу того, что система из отдельных положительно и отрицательно заряженных частиц неустойчива, можно предполагать новую сборку агрегата из частиц, ранее принадлежащих разным агрегатам. Поскольку положительно и отрицательно заряженные частицы во внешнем поле двигаются в противоположных направлениях, то наиболее вероятное место новой сборки находится между двумя распавшимися агрегатам по направлению вектора приложенного поля. Распад и последующая сборка нового агрегата, но в новом месте, может рассматриваться как "фазовое"перемещение агрегата.

При моделировании динамики второго агрегата радиусы частиц брались равными $a = 1$, модельная вязкость $\eta = 1$ г/(см· сек). Диполи имеют следующую ориентацию: $\vec{m}_1 = (0, 0, m)$, $\vec{m}_2 = (0, -m\sqrt{3}/2, -m/2)$, $\vec{m}_3 = (0, m\sqrt{3}/2, -m/2)$. Для простоты вычислений внешнее поле $\vec{H}$ направлено вдоль диполя первой частицы. Поскольку суммарный момент равен нулю, то внешнее однородное поле приводит в противоположное вращение с угловой скоростью два других диполя, создавая вихревое течение в вязкой жидкости, благодаря которому они перемещается вдоль оси, перпендикулярной вектору поля. Внешнее поле действует промежуток времени 4 сек. После выключения внешнего поля система стремится вернутся в исходное состояние, поскольку это состояние устойчивого равновесия. Через время 4 сек. вновь включается внешнее магнитное поле и агрегат вновь перемещается в направлении, перпендикулярном приложенному полю. Поскольку за время действия приложенного поля угол поворота частиц не большой, то для упрощения вычислений моменты, действующие на частицы, считались постоянными: $|\vec{m} \times \vec{H}| = 0.5$. Суммарное перемещение центра тяжести системы равно $0,0183039$ см. за промежуток времени 24 сек., погрешность вычислений равна $1.5711 \cdot 10^{-6}$.

Так как сумма внешних сил, действующих на частицы в агрегате со стороны электрического или магнитного поля, равна нулю, а внутренние силы не могут изменить положение центра тяжести системы частиц, то перемещение агрегатов обусловлено действием гидродинамических сил. В результате взаимодействия частиц формируется течение в окружающей агрегат вязкой жидкости, создающей силу, перемещающую агрегат в определенном направлении относительно приложенного поля. Меняя направление поля, можно управлять движением агрегатов частиц. Аналогичный подход может быть применен для расчета перемещения других структур агрегатов заряженных или дипольных частиц с нулевым суммарным зарядом или магнитным моментом в однородном внешнем электрическом или магнитном поле.

По модельным значениям так же, как и в работах [4,5] определяются значения реальных параметров системы жидкость-частицы.

Литература

1. Арансон И.С. Активные коллоиды //Успехи физических наук, 2013. Т. 183, № 1. С. 87-102.

2. Мартынов С. И., Ткач Л.Ю. Об одной модели динамики самодвижущихся агрегатов частиц в вязкой жидкости // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12, № 4. С. 605-618.

3. Шутый А.М. Равновесные значения и динамика суммарного магнитного момента систем магнитных диполей // ЖЭТФ. 2010. Т.137, Вып. 2. С. 277-286.

4. Мартынов С.И., Ткач Л.Ю. Моделирование динамики агрегатов частиц в вязкой жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55, № 2. С. 109-118.

5. Мартынов С. И., Ткач Л.Ю. Динамика цепочечных агрегатов частиц в потоке вязкой жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56, № 5. С. 133-148.

6. Мартынов С. И. Гидродинамическое взаимодействие частиц // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1998. № 2. С. 112-119.

7. Баранов В. Е., Мартынов С. И. Влияние гидродинамического взаимодействия на скорость осаждения большого числа частиц в вязкой жидкости // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2004. № 1. С. 152-164.

MSC2010 76D07, 76D09, 76D17

Control of the movement of aggregates of particles in a viscous fluid by an external uniform alternating field

S.I. Martynov[1], L.Yu. Tkach [1]

Yugra State University, Khanty-Mansiysk, Russian Federation [1]

Abstract: The mechanism for controlling the dynamics of aggregates of spherical particles in a viscous fluid using an external uniform alternating electric or magnetic field is considered. Aggregates are considered as a system of particles having a charge or dipole moment, and the total charge or dipole moment of the system is zero. Particles in the absence of external influence are in the position of a minimum of the interaction energy. The impact of an external homogeneous alternating field leads to periodic deformations of the aggregate, which form a flow in the surrounding viscous fluid, creating a hydrodynamic force that moves the center of gravity of the aggregate in a certain direction relative to the applied field. The results of numerical modeling of the dynamics of aggregates of three particles are given. The calculations took into account both the forces of hydrodynamic interaction, and the electric or magnetic forces holding the particles in the aggregate, and seeking to return them to their original equilibrium position.

Keywords: numerical simulation, viscous fluid, particles, hydrodynamic interaction, interaction energy, external uniform field, self-moving aggregates of particles.

References

1. Aranson I.S. Active colloids. Successes of physical sciences, 2013. V. 183. Issue 1. P. 87-102.
2. Martynov S.I., Tkach L.Yu. On one model of the dynamics of self-moving aggregates of particles in a viscous fluid. Nonlinear dynamics. 2016. V. 12. Issue 4. P. 605-618.
3. Shuty A.M. Equilibrium Values and Dynamics of the Total Magnetic Moment of Magnetic Dipole Systems. ZhETF. 2010. V. 137. Issue 2. P. 277-286.
4. Martynov S.I., Tkach L. Yu. Simulation of particle aggregate dynamics in a viscous fluid. Comput. Math. Math. Phys. 2015. V. 55. Issue 2. P. 282–290.
5. Martynov S.I., Tkach L. Yu. Dynamics of chain particle aggregates in viscous flow. Comput. Math. Math. Phys. 2016. V. 56. Issue 5. P. 826–840.
6. Martynov S.I. Hydrodynamic interaction of particles. Fluid Dyn. 1998. V. 33. P. 245–251.
7. Baranov V. E., Martynov S.I. Effect of the hydrodynamic interaction of a large number of particles on their sedimentation rate in a viscous fluid. Fluid Dyn. 2004. V. 39. P. 136–147.

УДК 536.24

Управление процессом охлаждения изделий сложной формы с учётом ограничений на термические напряжения

Морозкин Н. Д.[1], Ткачев В. И.[1], Морозкин Н. Н.[1]

Башкирский государственный университет[1]

Аннотация: В работе рассматривается задача управления температурой печи при охлаждении изделий сложной формы с учетом ограничений на термоупругие напряжения. Предлагается алгоритм расчета температурного режима, который позволяет избежать разрушения изделий при их охлаждении. Представлен результат численного эксперимента, проведенного на примере охлаждения керамического изолятора. Определен режим, при котором охлаждение изолятора осуществляется за время, близкое к оптимальному, без превышения допустимых значений термических напряжений.

Ключевые слова: температурное поле, термические напряжения, теплообмен, метод конечных элементов.

При охлаждении керамических изделий после термообработки возникает опасность их сильной деформации или даже разрушения. В связи с этим процесс охлаждения занимает весьма продолжительное время. На производстве длительность охлаждения изделий чаще оценивается эмпирическими формулами, основанными на примерной оценке температурных градиентов в изделии. Вычисление термических напряжений при охлаждении изделий даёт возможность задавать управление температурой печи с учётом ограничений на термонапряжения, что, в свою очередь, можно использовать для получения температурного режима охлаждения, близкого к оптимальному.

1. Постановка задачи

Температурное поле в области Ω описывается уравнением теплопроводности

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right),$$

где $T(x, y, t)$ – температурное поле, $(x, y) \in \Omega$, $t \in [0, \bar{T}]$, ρ, c, λ – плотность, теплоемкость и коэффициент теплопроводности материала изделия соответственно. Занимаемая изделием область $\Omega \subset R^2$ с границей $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \partial\Omega$ представлена на рис. 1. Пунктирной линией на рисунке показана граница Γ_1, сплошной линией граница Γ_2.

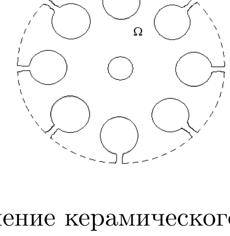

Рис. 1. Сечение керамического изолятора.

Начальные условия записываются в виде

$$T(x,y)|_{t=0} = T_0,$$

граничные условия

$$\left.\frac{\partial T(x,y)}{\partial \mathrm{n}}\right|_{\Gamma_1} = \alpha(T_f - T),$$

$$\left.\frac{\partial T(x,y)}{\partial \mathrm{n}}\right|_{\Gamma_2} = 0,$$

где n – вектор внешней нормали к поверхности изделия, α – коэффициент теплообмена, $T_f = T_f(t)$ – температура печи.

Компоненты σ_{ij} тензора напряжений находятся из уравнения равновесия

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y = 0, \\ \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y = 0. \end{cases}$$

Закон Гука, используемый для вычисления термических напряжений в рассматриваемом случае, имеет вид

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \lambda e + 2\mu\varepsilon_{xx} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_{\mathrm{T}}\Delta T, \\ \sigma_{yy} = \lambda e + 2\mu\varepsilon_{yy} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_{\mathrm{T}}\Delta T, \\ \sigma_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy}. \end{cases}$$

$e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}$, $\lambda = \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$, ε_{ij} – компоненты тензора деформаций, λ, μ – постоянные Ламе, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, α_{T} – коэффициент линейного расширения.

В высокотемпературных печах следует учитывать передачу тепла и излучением и конвекцией. С этой целью вводится суммарный коэффициент теплопередачи

$$\alpha = \alpha_{\mathrm{rad}} + \alpha_{\mathrm{conv}}.$$

Здесь α_{rad} – коэффициент теплопередачи излучением, α_{conv} – коэффициент теплопередачи конвекцией.

В электрических печах для вычисления коэффициента теплопередачи излучением обычно используется формула

$$\alpha_{rad} = C_r \cdot \frac{\left(\dfrac{T_{pr}}{100}\right)^4 - \left(\dfrac{T_w}{100}\right)^4}{T_{pr} - T_w},$$

где C_r – приведённый коэффициент излучения, который вычисляется следующим образом

$$C_r = \frac{C_0}{\dfrac{1}{\varepsilon_{pr}} + \left(\dfrac{1}{\varepsilon_w} - 1\right)\dfrac{F_{pr}}{F_w}}.$$

Здесь C_0 – коэффициент излучения абсолютно чёрного тела $\varepsilon_{\mathrm{pr}}$; ε_{w} – интегральная степень черноты изделия и стенки печи соответственно; F_{pr} – общая площадь поверхности изделия;

$F_{\rm w}$ – площадь внутренней поверхности печи; $T_{\rm pr}$ – температура изделия; $T_{\rm w}$ – температура стенки печи [1]. Конвективная составляющая теплообмена определяется оценками для свободной конвекции в ограниченном пространстве [2,3]

$$\alpha_{conv} = \frac{\varepsilon_{conv} \cdot \lambda_{\rm env}}{l},$$

где ε_{conv} – коэффициент конвекции, $\lambda_{\rm env}$ – теплопроводность среды, l – расстояние между поверхностями. Коэффициент конвекции для случая $Gr \cdot Pr > 1000$ определяется выражением $\varepsilon_{\rm conv} = 0,18(Gr \cdot Pr)^{0,25}$ для случая $Gr \cdot Pr < 1000$, $\varepsilon_{conv} = 1$, т. е. конвекция отсутствует. Здесь Pr – число Прандтля, определяемое эмпирически для соответствующей среды.

Интенсивность конвективного теплообмена характеризуется числом Грасгофа

$$Gr = \frac{(T_{pr} - T_w)gl^3}{T_{\rm air} \cdot {\nu_{\rm air}}^2},$$

где g – ускорение свободного падения, T_{air} – температура среды, ν_{air} – кинематическая вязкость среды.

Рассмотрим задачу определения эффективного режима изменения температуры печи $T_f(t)$, при котором охлаждаемое изделие достигнет заданной температуры за время, близкое к минимальному, и не разрушится от возникающих термических напряжений.

2. Алгоритм управления охлаждением печи

1. Задаём начальное распределение температуры изделия T_0, конечную температуру изделия $T_{\rm s}$, начальную температуру печи $T_{\rm f}^0$, минимальную температуру печи $T_{\rm f}^{min}$, скорость нагрева V_h и охлаждения V_c печи.

2. Снижаем температуру печи $T_{\rm f}$ с заданной скоростью охлаждения V_c.

3. Вычисляем распределение температуры в изделии для времени $t = t + \Delta t$.

4. Если максимальная температура изделия $T_{max} \leqslant T_{\rm s}$, то переходим к пункту 9.

5. Для полученного распределения температуры вычисляем максимальные термические напряжения σ_{max}.

6. Если $\sigma_{max} < \sigma_{per}$, то переходим к пункту 7; иначе к пункту 8 ($\sigma_{\rm per}$ – предельное допустимое напряжение).

7. Если $T_{\rm f} > T_{\rm f}^{min}$ снижаем температуру печи с заданной скоростью охлаждения V_c, иначе поддерживаем температуру печи $T_{\rm f} = T_{\rm f}^{min}$ и переходим к пункту 3.

8. Повышаем температуру печи с заданной скоростью $V_{\rm h}$ и переходим к пункту 3.

9. Вывод результатов.

3. Результаты вычислительного эксперимента и их анализ

В соответствии с приведённым выше алгоритмом, проведен вычислительный эксперимент.

Теплофизические характеристики материала считаются постоянными: $E = 1,46 \cdot 10^{11}$ Па; $\mu = 0,22$; $\rho = 3800$; $c = 1046$; $\alpha_T = 1,63 \cdot 10^{-5}$ 1/К. Пределы прочности на растяжение и на сжатие равны $\sigma_{\rm tens} = 5,12 \cdot 10^7$ Па; $\sigma_{comp} = 5,00 \cdot 10^8$ Па соответственно.

При вычислении коэффициента конвективного теплообмена использованы следующие теплофизические свойства воздуха: $\lambda_{air} = 0,026$; $\nu_{\rm air} = 1063$; $Pr_{\rm air} = 0,7$.

Максимальная скорость охлаждения печи $V_{\rm c} = 60\,^\circ$C/мин, максимальная скорость нагрева печи $V_h = 60\,^\circ$C/мин. Расчёт температурного режима охлаждения изделия производится от начальной температуры $T_0 = 1500\,^\circ$C до заданной температуры $T_s = 50\,^\circ$C.

В расчётах для аппроксимации решения уравнений использовалась двумерная конечно-элементная модель (рис. 2). Построенная модель состоит из 1254 узлов и 2006 треугольных элементов и повторяет форму поперечного сечения керамического изолятора.

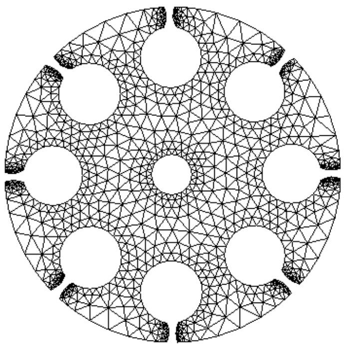

Рис. 2. Конечно-элементная модель поперечного сечения изолятора.

При решении поставленной задачи для вычисления термоупругих напряжений применяется метод конечных элементов в сочетании с принципом виртуальных (возможных) перемещений. Поскольку по физическим свойствам керамика представляет собой хрупкий материал, то прочностной анализ проводится с помощью первой теории прочности.

На рис. 3-5 показаны результаты расчетов, на рис. 3 – растягивающие напряжения, на рис. 4 – сжимающие напряжения. Пунктиром на этих рисунках обозначены пределы прочности на растяжение и сжатие соответственно.

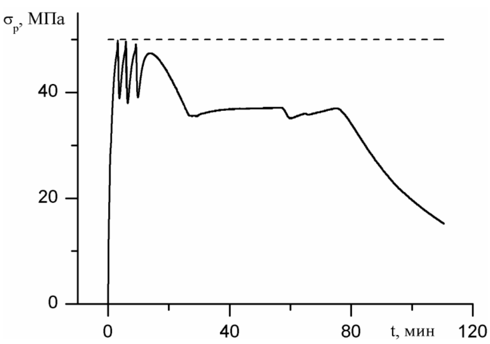

Рис. 3. Динамика максимальных растягивающих напряжений.

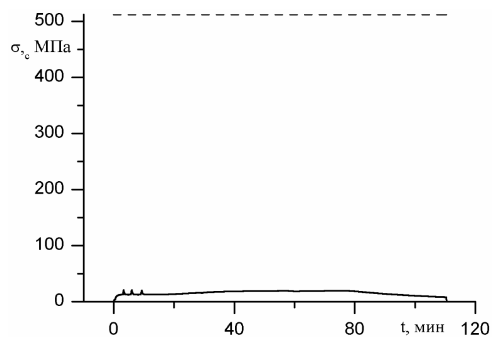

Рис. 4. Динамика максимальных сжимающих напряжений.

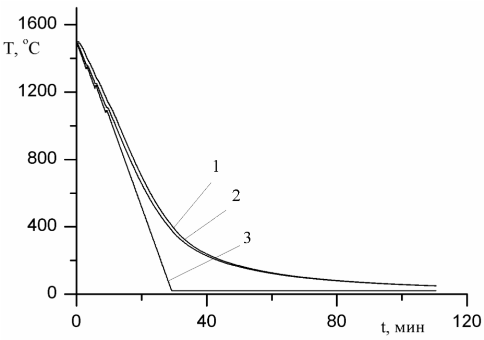

Рис. 5. Максимальная температура изделия (1), минимальная температура изделия (2), управляемая температура печи (3).

Сопоставление рис. 3-5 показывает, что на начальном этапе изменение температуры печи ограничивается максимальными растягивающими напряжениями. Это связано с тем, что в самом начале процесса охлаждения происходит очень интенсивный теплообмен с поверхностью изделия. Далее растягивающие термические напряжения снижаются в связи с тем, что уменьшаются температурные градиенты, т. е. температура изделия начинает выравниваться.

4. Заключение

Исследована динамика температурных полей и термопругих напряжений в керамическом изоляторе при его охлаждении в печи. Установлено, что к разрушению изделия могут привести растягивающие термонапряжения. Получен температурный режим охлаждения изолятора с температуры 1500 °C до температуры 50 °C, позволяющий избежать разрушения изделия. По приведённым выше результатам установлено, что охлаждение изолятора при заданных условиях и свойствах материала длится менее 110 мин.

Разработан алгоритм решения двумерной осесимметричной задачи параметрического управления процессом охлаждения для изделий сложной геометрической формы с учётом ограничений на термические напряжения. В алгоритме используется метод конечных элементов, который позволяет учесть сложные условия теплообмена на поверхности изделий, учитывать сложную геометрию изделия при вычислении температурных полей и термических напряжений. Практическое значение полученных результатов заключается в том, что они могут позволить существенно сократить энергозатраты и длительность этапа термообработки в целом.

Литература

1. Мастрюков Б.С. Теплотехнические расчёты промышленных печей. М.: Металлургия, 1972. 368 с.

2. Морозкин Н.Д., Ткачёв В.И. Управление процессом охлаждения керамических изделий с учетом ограничений на термические напряжения // Теплофизика и аэромеханика. 2016. Т. 23, № 3. С. 477-482.

3. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат, 1979. 416 с.

MSC2010 35Q79, 74A15, 80A10

The control of complex shape products cooling process taking into account the constrains on thermal stresses

N.D. Morozkin[1], V.I. Tkachev[1], N.N. Morozkin[1]
Bashkir State University[1]

Abstract: The problem of controlling the temperature of the furnace in the process of cooling complex shape products, taking into account the limitations on thermal stresses is considered in the paper. An algorithm for calculating the temperature regime, which allows to avoid the destruction of products during their cooling is proposed. The result of a computational experiment conducted on the example of cooling a ceramic insulator is presented. The temperature regime is determined in which the cooling of the insulator takes place in a time close to the optimal one without exceeding the permissible values of thermal stresses.

Keywords: temperature field, thermal stresses, heat transfer, finite element method.

References

1. Mastryukov B.S. Thermal calculations of industrial furnaces. M: Metallurgy, 1972. 368 p.
2. Morozkin N. D., Tkachev V.I. Control of the cooling process of ceramic products taking into account the constrains on thermal stresses. Thermal Physics and Aeromechanics. 2016. Vol. 23, No. 3. P. 477-482.
3. Kutateladze S.S. Fundamentals of the theory of heat transfer. M.: Atomizdat, 1979. 416 p.

УДК 532.5:517.9

Численный эксперимент по исследованию динамики упругого элемента датчика давления *

Покладова Ю.В.[1], Мизхер У.Д.[1], Вельмисов П.А.[1]

Ульяновский государственный технический университет[1]

Аннотация: В работе предложена математическая модель механической системы «трубопровод-датчик давления», на основе которой исследуется динамика упругого элемента датчика. Представлены результаты численного эксперимента по исследованию динамики упругого элемента датчика давления в системах Mathematica и ANSYS.

Ключевые слова: датчик давления, упругий элемент, трубопровод, деформация, динамика, дифференциальные уравнения с частными производными, метод Бубнова-Галёркина, ANSYS.

1. Введение

В связи со сложностью и длительностью процесса изготовления датчиков давления, высокими требованиями к сокращению сроков разработки датчиков, к точности и стабильности характеристик, возникает необходимость разработки новых методов проектирования датчиков давления. Теоретическим и практическим вопросам конструирования датчиков давления посвящено много работ. Перечислим некоторые из последних [1–5]. Описанию датчиков измерительных систем, принципов их работы, технических характеристик посвящены работы [1, 6–8]. Некоторые работы посвящены описанию материалов и технологии изготовления датчиков [4, 5].

Особенностью эксплуатации датчиков давления в авиационных и ракетных двигателях является воздействие на них высоких температур и повышенных виброускорений, в наибольшей степени проявляющееся в переходных режимах работы двигателя. Такие экстремальные эксплуатационные условия приводят к дополнительной погрешности измерений, и даже к разрушению упругого чувствительного элемента датчика [1, 5]. Перспективным направлением в плане решения проблемы является задача оптимального проектирования механической системы «трубопровод – датчик давления». В системе датчик расположен на некотором расстоянии от двигателя и соединен с ним с помощью трубопровода, что позволяет ослабить воздействие температур и виброускорений. Математические модели системы «трубопровод-датчик давления» рассматривались, например, в [9–15]. Задача состоит в получении уравнений, связывающих закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод (на выходе из камеры сгорания двигателя) и деформацию упругого элемента датчика и предназначенных для расчета давления в двигателе по величине деформации элемента.

Значительно ускорить исследования и проводить их на высоком техническом уровне позволяет математическое моделирование с использованием вычислительной техники. Проведение компьютерного моделирования позволяет сократить сроки разработки взаимодействующих с потоком жидкости или газа упругих элементов датчиков давления, снизить их себестоимость. В работе предложена модель механической системы «трубопровод – датчик

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Ульяновской области (проект № 18-41-730015).

давления», на основе которой проведен численный эксперимент по исследованию динамики упругого элемента датчика в системах Mathematica 12.0 и ANSYS (ANSYS Mechanical, ANSYS Fluent, Fluid Solid Interaction (FSI)).

2. Постановка задачи

Рассматривается задача о динамике упругого элемента конструкции, представляющей собой модель механической системы «трубопровод-датчик давления». Поле скоростей рабочей среды (идеального несжимаемого газа или жидкости) предполагается плоским, длина трубопровода – конечной (рис. 1).

Пусть на одном конце трубопровода задан закон изменения давления рабочей среды (например, на выходе из камеры сгорания двигателя), а на другом расположен датчик, предназначенный для измерения этого давления и содержащий в качестве составного элемента упругую пластину.

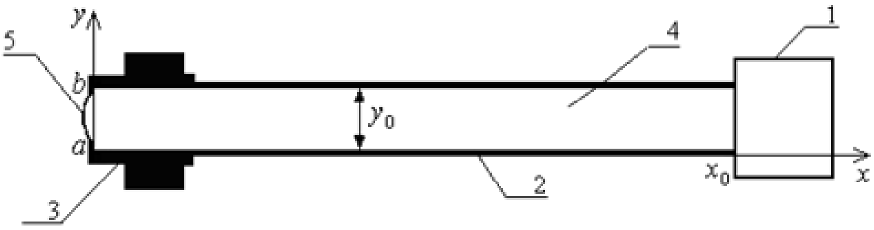

Рис. 1. Трубопровод конечной длины с упругим элементом на торцевой стенке.

На рис. 1: 1 – двигатель, 2 – трубопровод, 3 – датчик, 4 – рабочая среда, 5 – пластина (упругий элемент).

Предлагаемая математическая модель определяется следующими уравнениями и граничными условиями:

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0,\ (x, y) \in G = \{(x, y) : 0 < x < x_0,\ 0 < y < y_0\}, \tag{1}$$

$$\phi_y(x, 0, t) = \phi_y(x, y_0, t) = 0,\ x \in (0, x_0), \tag{2}$$

$$\phi_x(0, y, t) = \dot{w}(y, t),\ y \in (a, b),\ 0 < a < b < y_0, \tag{3}$$

$$\phi_x(0, y, t) = 0,\ y \in (0, a) \cup (b, y_0), \tag{4}$$

$$\tilde{P} - \rho\phi_t(x_0, y, t) = P_*(y, t),\ y \in (0, y_0), \tag{5}$$

$$\begin{gathered} L(w) \equiv M\ddot{w} + Dw_{yyyy} + Nw_{yy} + \alpha\dot{w}_{yyyy} + \beta\dot{w} + \gamma w = \\ = P_0(y, t) - \tilde{P} + \rho\phi_t(0, y, t),\ y \in (a, b). \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь (1) – уравнение Лапласа, описывающее движение рабочей среды в трубопроводе; (2)-(4) – условия непротекания среды через соответствующие границы; условие (5) задает закон изменения давления на входе в трубопровод; (6) – уравнение динамики пластины; x, y – декартовы координаты, t – время; $\phi(x, y, t)$ – потенциал скорости среды; $w(y, t)$ – прогиб упругого элемента; $\tilde{P}$ – давление рабочей среды в трубопроводе в состоянии покоя; ρ – плотность среды; $P_*(y, t)$ – закон распределения давления среды в сечении $x = x_0$ (на выходе из двигателя); $P_0(y, t)$ – распределенная внешняя нагрузка, действующая на упругий элемент; x_0, y_0 – продольный и поперечный размеры трубопровода; a, b – координаты концов упругого элемента; M, D – погонная масса и изгибная жёсткость пластины; N – сжимающее (растягивающее) пластину усилие; α – коэффициент внутреннего демпфирования; β и γ –

коэффициенты демпфирования и жёсткости основания; нижние индексы x, y, t обозначают частные производные по x, y, t, точка – частную производную по t.

Решая аэрогидродинамическую задачу методом Фурье [9,10,12,13], получим уравнение, связывающее деформацию упругого элемента датчика и давление на входе в трубопровод:

$$L(w) = P_0(y,t) - \frac{\rho x_0}{y_0}\int\limits_a^b \ddot{w}(y,t)dy - \frac{1}{y_0}\int\limits_0^{y_0} P_*(y,t)dy -$$

$$- \frac{2\rho}{y_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\lambda_n y)}{\operatorname{ch}(\lambda_n x_0)}\Big[\int\limits_0^{y_0}\frac{P_*(y,t)dy}{\rho}\cos(\lambda_n y)dy + \frac{\operatorname{sh}(\lambda_n x_0)}{\lambda_n}\int\limits_a^b \ddot{w}(y,t)\cos(\lambda_n y)dy\Big].$$

Функцию деформации $w(y,t)$ будем искать в виде $w(y,t) = \sum\limits_{k=1}^{n} w_k(t) g_k(y)$, где $\{g_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ – полная на $[a,b]$ система базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям, соответствующим условиям закрепления пластины. В результате применения метода Галеркина для уравнений и начальных условий получим задачу Коши для неизвестных функций $w_k(t)$. Полученная задача Коши является основой для проведения численного эксперимента.

3. Численный эксперимент

Задача Коши решается с помощью системы Mathematica. Исследовалась деформация элемента как функция времени (в фиксированных точках элемента) и как функция координаты (в фиксированные моменты времени) для различных параметров механической системы.

В случае шарнирного закрепления концов упругого элемента искомую функцию деформации $w(y,t)$ ищем в виде $w(y,t) = \sum\limits_{k=1}^{n} w_k(t)\sin(\lambda_k(x-a))$, $\lambda_k = \dfrac{\pi k}{b-a}$. Рабочая среда – воздух $\rho = 1$. Пластина изготовлена из алюминия ($E = 7.1 \cdot 10^{10}$, $\rho_0 = 2770$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.33$, $h_{pl} = 0.001$ – толщина пластинки). Значения параметров: $n = 3$, $x_0 = 3$, $y_0 = 0.03$, $a = 0$, $b = y_0$, $\alpha = 0.02$, $\beta = 0.3$, $\gamma = 0$, $P_0(y,t) = 0$, $P_*(y,t) = 2 \cdot 10^6 + 10^5\cos(10t)$, $y_* = (a+b)/2$. Начальные условия зададим в виде: $w(x,0) = 0$, $\dot{w}(x,0) = 0$. Все значения приведены в единицах СИ.

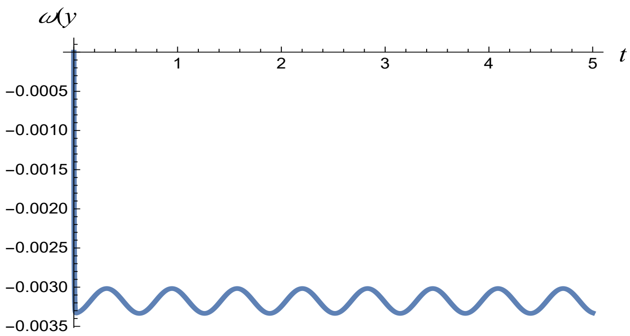

Рис. 2. График деформации $w(y_*,t)$ в случае шарнирного закрепления.

В случае жёсткого закрепления концов упругого элемента искомую функцию деформации $w(y,t)$ ищем в виде $w(y,t)=\sum_{k=1}^{n} w_k(t)\psi_k(y)$, где

$$\psi_k(y)=ch(\mu_k(y-a))-\cos(\mu_k(y-a))-\\ -\frac{ch(\mu_k(b-a))-\cos(\mu_k(b-a))}{sh(\mu_k(b-a))-\sin(\mu_k(b-a))}(sh(\mu_k(y-a))-\sin(\mu_k(y-a))),$$

при этом μ_k находятся из уравнения $ch(\mu_k(b-a))\cos(\mu_k(b-a))=1$ $(k=1,...,n)$. Функции $\{\psi_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ ортогональны на $[a,b]$, т.е. $\int_a^b \psi_i(y)\psi_j(y)dy=0$ при $i\neq j$.

Для указанных выше значений параметров получим график функции $w(y_*,t)$ в случае жёсткого закрепления концов упругого элемента (рис. 3).

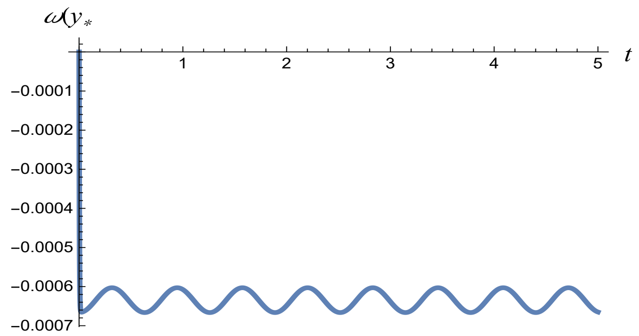

Рис. 3. График деформации $w(y_*,t)$ в случае жёсткого закрепления.

Для исследования динамики упругого элемента датчика давления применялась также система ANSYS. Для указанных выше параметров механической системы получены графики деформации упругого элемента датчика давления в случае шарнирного (рис. 4) и жёсткого (рис. 5) закреплений концов упругого элемента.

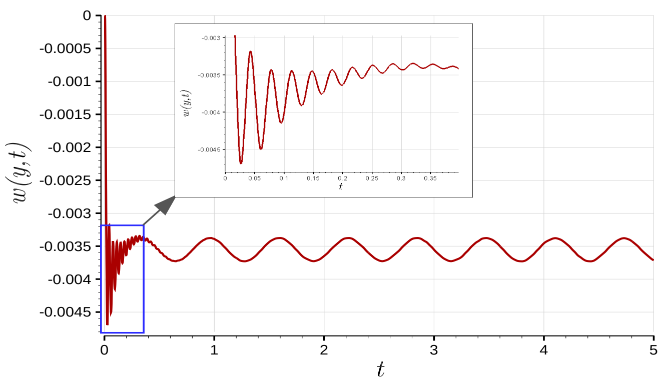

Рис. 4. График деформации упругого элемента в случае шарнирного закрепления (ANSYS).

Как видно из рис. 2–5, графики деформации упругого элемента, полученные в системах Mathematica и ANSYS, в целом мало различаются. В ANSYS используются уравнения Эйлера для идеальной несжимаемой среды [16], которые содержат производные по времени u_t, v_t, а уравнение Лапласа (1) подобных членов с производной по времени не содержит. Уравнения Эйлера более точно описывают развитие динамического процесса в начальный момент времени, поэтому наблюдается отличие графиков в начальный момент времени.

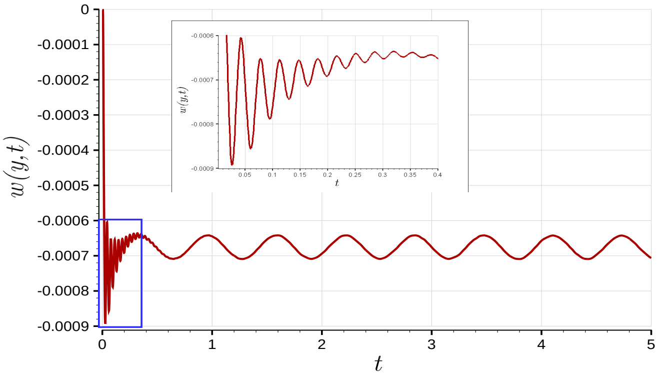

Рис. 5. График деформации упругого элемента в случае жёсткого закрепления (ANSYS).

4. Заключение

В работе рассмотрена математическая модель механической системы «трубопровод-датчик давления», на основе которой исследуется динамика упругого элемента датчика. Численно-аналитическое решение основано на методе Бубнова-Галёркина. Представлены результаты численного эксперимента по исследованию динамики упругого элемента датчика давления в системах Mathematica и ANSYS.

Литература

1. Pirogov S.P., Cherentsov D.A. Theoretical foundations of the design of vibration-resistant manometers. Measurement techniques. 2016. T. 59, № 8. P. 845-849.

2. Михайлов П.Г., Сазонов А.О., Ожикенов К.А. Вопросы конструирования датчиков для измерения давления высокотемпературных сред. Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. 2015. №2 (12). С. 10-18.

3. Mikhajlov P.G., Slesarev Y., Chulkov V.A. Mathematical modeling of combined sensor information - measuring systems // International Journal of applied engineering research. 2016. V. 11, No 20. P. 10332-10337.

4. Савченко Е.Г., Светухин В.В., Стучебников В.М., Устинов А.А. Керамические упругие элементы в тензопреобразователях давления на основе структур кнс // Датчики и системы. 2014. №10 (185). С. 58-62.

5. Михайлов П.Г., Мокров Е.А., Сергеев Д.А., Скотников В.В., Петрин В.А., Чернецов М.А. Чувствительные элементы высокотемпературных датчиков давления. Материалы и технологии изготовления // Известия ЮФУ. Технические науки. 2014. №4 (153). С. 204-213.

6. Казарян А.А., Грошев Г.П. Универсальный датчик давления // Измерительная техника. 2008. №3. С. 26-30.

7. Мартыненко В.Т. Исследование причин, влияющих на погрешность преобразования датчиков разности давлений «Сапфир-22» // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2005. № 6. С. 31-33.

8. Эткин Л.Г. Виброчастотные датчики. Теория и практика. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2004. 408 с.

9. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Горбоконенко В.Д., Покладова Ю.В. Математическое моделирование механической системы "трубопровод—датчик давления". Ульяновск: УлГТУ, 2008. 188 с.
10. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В. Исследование динамики деформируемых элементов некоторых аэрогидроупругих систем. Ульяновск: УлГТУ. 2018. 152 с.
11. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В., Серебрянникова Е.С. Математическое моделирование системы "трубопровод - датчик давления"// Журнал Средневолжского математического общества. 2010. Т. 12, № 4. С. 85-93.
12. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В., Серебрянникова Е.С. Математическая модель одной гидроупругой системы // Журнал Средневолжского математического общества. 2006. Т. 8, № 2. С. 93-98.
13. Покладова Ю.В., Решетников Ю.А. Математическое моделирование динамики упругого элемента датчика давления в трубопроводе конечной длины // Прикладная математика и механика (Ульяновск). 2004. № 6. С. 114-120.
14. Vel'misov P.A., Pokladova Yu.V. Investigation of dynamics of an elastic element of a pressure sensor // Applications of Mathematics in Engineering and Economics. Soft trade, Sofia, Bulgaria. 2006. P. 51-57.
15. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В. О некоторых математических моделях механической системы «трубопровод - датчик давления» // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки. 2011. №1 (29). С. 137-144.
16. ANSYS FLUENT 12.0. Theory Guide. April, 2009.

MSC2010 76D05 35B40

Numerical experiment to study the dynamics of the elastic element of the pressure sensor

Yu.V. Pokladova [1], U.J. Mizher [1], P.A. Velmisov [1]
Ulyanovsk State Technical University [1]

Abstract: The paper proposed a mathematical model of the mechanical system "pipeline - pressure sensor", on the basis of which the dynamics of the elastic element of the sensor is investigated. Results of a numerical experiment to investigate the dynamics of the elastic pressure sensor element in Mathematica and ANSYS systems.

Keywords: pressure sensor, elastic element, pipeline, deformation, dynamics, partial differential equations, Bubnov-Galerkin method, ANSYS.

References

1. Pirogov S.P., Cherentsov D.A. Theoretical foundations of the design of vibration-resistant manometers. Measurement techniques. 2016. V. 59, No. 8. P. 845-849.
2. Mikhailov P.G., Sazonov A.O., Ozhikenov K.A. The design of sensors for measuring the pressure of high-temperature environments. Measurement. Monitoring. Management. Control. 2015. No. 2 (12). P. 10-18.

3. Mikhajlov P.G., Slesarev Y., Chulkov V.A. Mathematical modeling of combined sensor information - measuring systems. International Journal of applied engineering research. 2016. V.11, No.20. P. 10332-10337.

4. Savchenko E.G., Svetukhin V.V., Stuchebnikov V.M., Ustinov A.A. Ceramic elastic elements in pressure strain gages on the basis of kns structures. Sensors and systems. 2014. No. 10 (185). P. 58-62.

5. Mikhailov P.G., Mokrov E.A., Sergeev D.A., Skotnikov V.V., Petrin V.A., Chernetsov M.A. Sensitive elements of high-temperature pressure sensors. Materials and manufacturing technology. News SFU. Technical science. 2014. No. 4 (153). P. 204-213.

6. Kazaryan A.A., Groshev G.P. Universal pressure sensor. Measuring equipment. 2008. No. 3. P.26-30.

7. Martynenko V.T. Investigation of the causes affecting the error of conversion of differential pressure sensors "Sapphire-22". Devices and systems. Management, monitoring, diagnostics. 2005. No. 6. P. 33.

8. Etkin L.G. Vibration sensors. Theory and practice. M.: Publishing House of the MSTU. N.E. Bauman. 2004. 408 p.

9. Ankilov A.V., Velmisov P.A., Gorbokonenko V.D., Pokladova Yu.V. Mathematical modeling of the mechanical system "pipeline-pressure sensor". Ulyanovsk: UlSTU, 2008. 188 c.

10. Velmisov P.A, Pokladova Yu.V. The study of the dynamics of deformable elements of some aerohydroelastic systems. Ulyanovsk: UlSTU. 2018. 152 p.

11. Velmisov P.A., Pokladova Yu.V., Serebryannikova E.S. Mathematical modeling of the system "pipeline - pressure sensor". Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 2010. Vol. 12, No. 4. P. 85-93.

12. Velmisov P.A., Pokladova Yu.V., Serebryannikova E.S. Mathematical model of one hydroelastic system. Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 2006. Vol. 8, No. 2. P. 93-98.

13. Pokladova Yu.V., Reshetnikov Yu.A. Mathematical modeling of the dynamics of the elastic element of the pressure sensor in the pipeline of finite length. Applied Mathematics and Mechanics (Ulyanovsk). 2004. No. 6. P. 114-120.

14. Velmisov P.A., Pokladova Yu.V. Investigation of dynamics of an elastic element of a pressure sensor. Applications of Mathematics in Engineering and Economics. Soft trade, Sofia, Bulgaria. 2006. P. 51-57.

15. Velmisov P.A, Pokladova Yu.V. On some mathematical models of the mechanical system "pipeline-pressure sensor". Bulletin of the Samara State Technical University. Series: Technical Sciences. 2011. No. 1 (29). P. 137-144.

16. ANSYS FLUENT 12.0. Theory Guide. April, 2009.

УДК 51-72:629.735.45.05

Анализ прочности композитной лопасти несущего винта вертолета при ударных повреждениях*

Сидоров И.Н.[1], Митряйкин В.И.[1], Горелов А.В.[1], Шабалин Л.П.[1]

Казанский национальный исследовательский
технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ[1]

Аннотация: Приведены результаты расчета предельного состояния лопасти несущего винта вертолета «АНСАТ» при различных режимах полета с учетом возможного повреждения лопасти в комлевом сечении. Определены коэффициенты запаса прочности лопасти в комлевом сечении в зависимости от азимутального угла поворота лопасти для случая, когда все обобщенные усилия изменяются пропорционально одному параметру нагружения.

Ключевые слова: теория предельного равновесия, коэффициент запаса, метод вариации упругих постоянных, композитная лопасть несущего винта вертолета, повреждения.

В работах [1], [2] предложен алгоритм расчёта, приведены результаты расчёта нижней границы нагрузки в комлевом сечении лопасти несущего винта (НВ) вертолёта, соответствующей её предельному состоянию для режима висения, а также сделан вывод, что оценка прочности лопасти должна проводиться только по предельной нагрузке. Оценка предельного состояния лопасти основана на методе вариации упругих постоянных, рассмотренного в работе [3]. Цель настоящей работы – определение коэффициента запаса статической прочности (нижней границы предельной нагрузки) лопасти НВ в комлевом сечении, имеющей повреждения в виде отверстий, для различных скоростей горизонтального полета вертолёта. Выявление экспериментальных повреждений лопасти при ударных воздействиях и сравнение их с расчётными.

Исследуемая лопасть НВ крепится к торсиону (рис. 1) в комлевом сечении (рис. 2) состоит из двух основных элементов: лонжерона и хвостового отсека, наружные обводы которых соответствуют аэродинамическому профилю NACA-23012. Материал лопасти – многослойный стеклопластик Т-25(ВМ). Лонжерон в поперечном сечении представляет собой многослойную профилированную трубу. Пределы прочности при растяжении, сжатии и сдвиге в осях ортотропии слоя материала Т-25(ВМ) по данным ВИАМ, которые использовались при расчетах, следующие: $\bar{\sigma}_1^+ = 933$ МПа, $\bar{\sigma}_1^- = 615$ МПа, $\bar{\sigma}_2^+ = 110$ МПа, $\bar{\sigma}_2^- = 244$ МПа, $\bar{\tau}_{12} = 11$ МПа. Здесь: индекс 1 соответствует направлению вдоль нитей основы, 2 – поперек нитей основы; индексы для пределов прочности «+» и «–» обозначают растяжение и сжатие; схема укладки слоев лонжерона и хвостовой обшивки по отношению к оси лопасти соответственно: $[0°/\pm45°/0°/\pm45°/0°_9]$ и $[0°/\pm45°/0°]$; порядок чередования слоев снаружи внутрь лопасти; толщина каждого слоя 0,28 мм.

Согласно алгоритму, предложенному в работе [1], в расчетах реальная лопасть заменялась аналогом, состоящим из участков (рис. 3) (точками показаны границы участков, цифрами – номера участков).

Повреждения моделировались отверстиями в виде полос по всей длине участка поперечного сечения комлевой части лопасти с постоянными характеристиками (рис. 1). При этом в сечении лопасти (рис. 3) на участке, соответствующем этой полосе, пределы прочности

*Работа выполнена в рамках проекта №19-08-00577 РФФИ

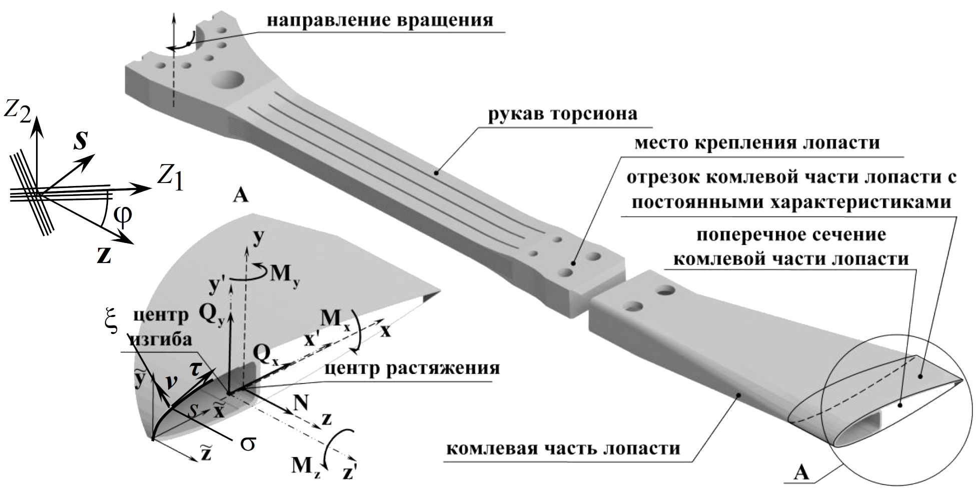

Рис. 1. Основные элементы несущего винта вертолета

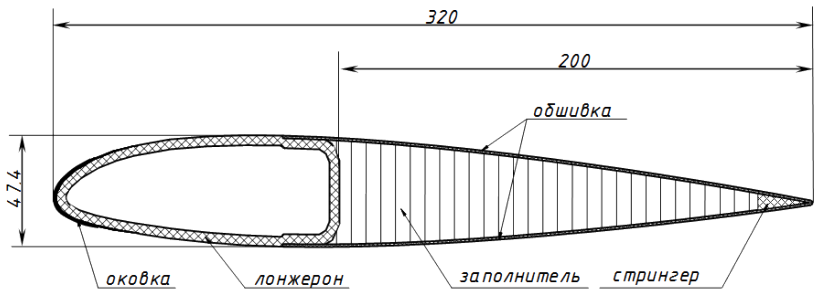

Рис. 2. Основные элементы лопасти

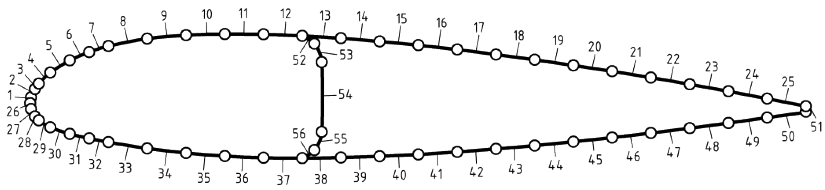

Рис. 3. Разбиение аналога лопасти на участки

слоев пакета уменьшались на 6 порядков по сравнению с соответствующими параметрами неповрежденных участков.

Основные допущения и положения теории предельного равновесия и идеального жестко - пластического тела, за который принимается материал слоёв композитной лопасти несущего винта вертолета «АНСАТ» следующие:

1. В пакете слоев лопасти реализуется плоско-напряженное состояние и в нормально – связанной системе координат $z\,s\,\xi$ (рис. 1) для компонент напряжений в этих осях выполняются неравенства $\sigma_{\xi\xi}$, $\sigma_{s\xi}$, $\sigma_{z\xi}$<<σ_{zz}, σ_{ss}, σ_{zs} (на рис. 1 $\tau(s)$, $\nu(s)$ – орты касательной и нормали к базовому контуру σ; s – текущая длина базового контура; ξ

– нормальная координата вдоль ν).

2. Принимается, что пластическое течение в элементах лопасти начинается при достижении вектором $\sigma = [\sigma_{11},\ \sigma_{22},\ \sigma_{12}]^T(\sigma_{11},\ \sigma_{22},\ \sigma_{12}$ – нормальные и касательное напряжения в осях ортотропии $z_1 z_2$ (рис. 1)) в осях ортотропии $z_1 z_2$ поверхности текучести, уравнение которой, с учетом гипотезы о малости нормальных напряжений на площадках параллельных оси лопасти по сравнению с нормальными напряжениями в её поперечном сечении $\sigma_{ss} << \sigma_{zz}, \sigma_{sz}$, в нормально – связанной системе координат $zs\xi$ переходит к виду ((a,l) - скалярное произведение векторов a, l)

$$\left(\hat{\mathrm{C}}(\varphi)\tau_z\ ,\tau_z\right) = 1\ ,\ \tau_z = \sigma_z - s_z\ , \tag{1}$$

$$\hat{\mathrm{C}}(\varphi) = \frac{1}{\lambda^2}\tilde{\mathrm{C}},\ \ s_z = -\frac{1}{2}\tilde{\mathrm{C}}^{-1}\tilde{d}(\varphi),\quad \lambda = \frac{1}{2}\sqrt{4 + \left(\tilde{d}(\varphi), \tilde{\mathrm{C}}^{-1}\tilde{d}(\varphi)\right)}\ ,$$

$$C(\varphi) = B(\varphi)PB(\varphi)\ ; d(\varphi) = B(\varphi)b\ ,\quad B(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi & -\sin 2\varphi \\ -\frac{1}{2}\sin 2\varphi & \frac{1}{2}\sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{bmatrix}\ ,$$

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}\ ,\ b = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{bmatrix}\ ,\ \tilde{C}(\varphi) = \begin{bmatrix} c_{11}(\varphi) & c_{13}(\varphi) \\ c_{31}(\varphi) & c_{33}(\varphi) \end{bmatrix}\ ,\ \tilde{d}(\varphi) = \begin{bmatrix} d_1(\varphi) \\ d_3(\varphi) \end{bmatrix}\ ,$$

где $p_i = (\bar{\sigma}_i^- - \bar{\sigma}_i^+)/(\bar{\sigma}_i^+\bar{\sigma}_i^-)$, $p_{ii} = 1/(\bar{\sigma}_i^+\bar{\sigma}_i^-)$, $f = 1/\bar{\tau}_{12}^2$, $i = 1, 2$, φ - угол поворота осей относительно оси ξ(рис. 1), $\sigma_z = \begin{bmatrix} \sigma_{zz} & \sigma_{sz} \end{bmatrix}^T$;

3. В соответствии с работами [1, 2] для вектора напряжений в осях $z\,s\,\xi$ согласно закону деформирования, ассоциированному предельной поверхности текучести (1) имеем представление

$$\sigma_z = s_z + \tau_z = s_z + \hat{e}\varepsilon_z^p = s_z + t_{(-)}\hat{e}kT_{\tau 0}\ ,\ \varepsilon_z^p = [\varepsilon_{zz}^p,\, 2\varepsilon_{sz}^p]^T\ , \tag{2}$$

$$\hat{e}\left(\varepsilon_{zz}^p,\ \mu\right) = \begin{bmatrix} E_z\left(\varepsilon_{zz}^p, \mu\right) & 0 \\ 0 & G_{sz}\left(\varepsilon_{zz}^p, \mu\right) \end{bmatrix}\ ,\ \mu = \left[1\ ,\ \frac{2\varepsilon_{sz}^p}{\varepsilon_{zz}^p}\right]^T,\ \Lambda\left(\mu\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(\mu, \tilde{!}^{-1}\mu\right)}},$$

$$E_z\left(\varepsilon_{zz}^p, \mu\right) = \frac{\lambda\left(\tilde{c}_{11}^{(-1)} + \tilde{c}_{12}^{(-1)}\mu\right)\Lambda\left(\mu\right)}{|\varepsilon_{zz}^p|}\ ,\ G_{sz}\left(\varepsilon_{zz}^p, \mu\right) = \frac{\lambda\left(\tilde{c}_{12}^{(-1)}\Big/\mu + \tilde{c}_{22}^{(-1)}\right)\Lambda\left(\mu\right)}{|\varepsilon_{zz}^p|},$$

где $\hat{e}\left(\varepsilon_{zz}^p,\ \mu\right)$ - матрица «фиктивных» модулей упругости, ε_{sz}^p, ε_{zz}^p - компоненты вектора пластической деформации, k - матрица податливостей поперечного сечения лопасти на растяжение, изгиб и кручение [1], $T_{\tau 0}$, ($|T_{\tau 0}| = 1$) - заданный единичный вектор обобщенных усилий, формирующий в сечении лопасти вектор «упругих» напряжений $\tau_{z0(e)}$, $t_{(-)}$ - нижняя граница параметра нагружения;

4. Определение вектора напряжений $\sigma_{z(-)}$, соответствующего статически возможному состоянию отсека комлевой части лопасти (рис. 1) [4], осуществляется на основе представления (2) и с помощью метода, предложенного в работе [5]. Согласно этому методу, вектор напряжений элемента сечения вычисляется в главных центральных осях (рис. 1) на основе компонент вектора обобщенных усилий

$$T_z = \left[\begin{array}{cccccc} Q_x & Q_y & N & M_x & M_y & M_z \end{array} \right]^T,$$

приложенных в соответствующих центрах сечения. Вектору напряжений $\sigma_z = s_z + \tau_z$ соответствует шестимерный вектор обобщенных усилий $T_z = T_s + T_\tau$, в котором компоненты вектора T_s вычисляются в главных центральных осях сечения с помощью s_z. В предельном состоянии поверхностям текучести слоев комлевой части лопасти в пространстве напряжений соответствует предельная поверхность в пространстве усилий и выход вектора T_z на эту поверхность эквивалентен выходу на неё вектора T_τ, исходящего из T_s.

В качестве коэффициента запаса статической прочности лопасти по допускаемой нагрузке принимается параметр нагружения $t^p_{(-)}$, равный коэффициенту увеличения «рабочего» вектора обобщенных усилий, при котором напряжения всех слоев отсека комлевой части лопасти соответствуют закону деформирования (2) и удовлетворяют уравнениям равновесия.

На рисунках 4.а, 4.б приведены диаграммы вычисленных коэффициентов для не поврежденного комлевого сечения лопасти при различных скоростях полета и лопасти имеющей повреждения в комлевом сечении для режима полета на скорости 220 км/ч. В скобках указаны номера поврежденных участков, соответствующих рис. 3.

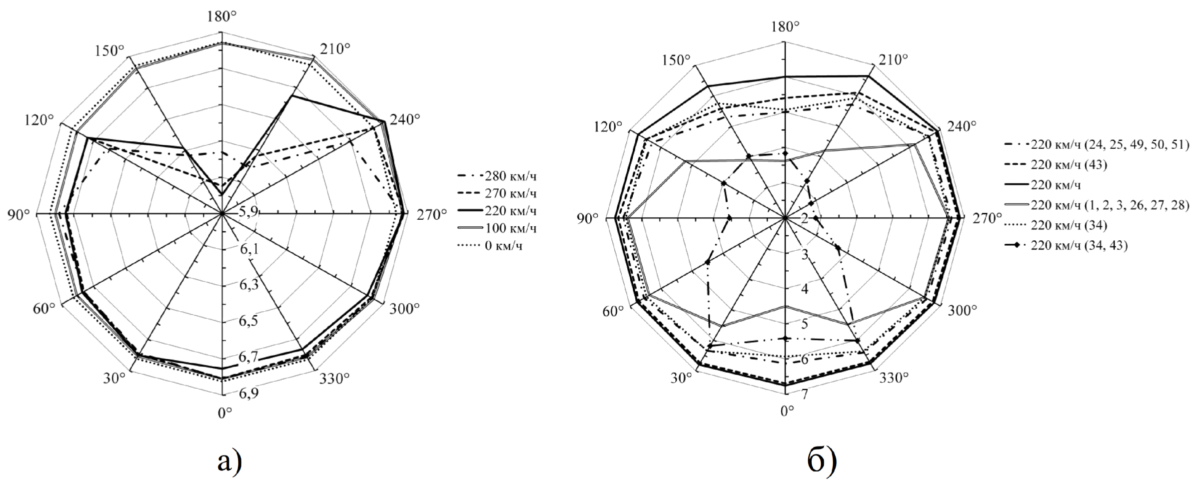

Рис. 4. Диаграммы коэффициентов $t^p_{(-)}$ комлевого сечения лопасти

Таким образом, предложен алгоритм и приведены результаты расчета запаса прочности лопасти по предельной нагрузке при повреждениях лопасти в различных участках комлевого сечения. Внешняя визуальная и внутренняя диагностика поврежденных образцов с использованием рентгеновской компьютерной томографии на основе медицинского рентгеновского томографа фирмы “Siemens” [6] позволят производить оценку остаточных запаса прочности и несущей способности лопасти НВ вертолета.

Литература

1. Горелов А.В., Сидоров И.Н. Расчет нижней границы предельной нагрузки композитной лопасти несущего винта вертолета по теории предельного равновесия. Основные этапы алгоритма // Изв. Вузов. Авиационная техника. 2011. № 3. С. 3–8.

2. Горелов А.В., Сидоров И.Н. Расчет нижней границы предельной нагрузки композитной лопасти несущего винта вертолета по теории предельного равновесия. Результаты расчета // Изв. Вузов. Авиационная техника. 2011. № 4. С. 12–14.

3. Каюмов Р.А. Метод вариации упругих характеристик в задаче о предельной нагрузке // Прикладная механика и техническая физика. 1990. № 3. С. 134–139.

4. Гвоздев А.А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. М.: Стройиздат, 1949. 280 с.

5. Горелов А.В., Сидоров И.Н. Расчёт напряженно-деформированного и предельного состояния композитной лопасти несущего винта вертолёта «АНСАТ». Казань, 2006. 40 с. Деп. в ВИНИТИ 17.07.2006, № 946 - В2006.

6. Митряйкин В.И., Павлова Н.В., Лустин А.Д. Диагностика ударных повреждений лопастей вертолета на компьютерном томографе // Инновационные подходы в современной науке. 2017. № 2(2). С.33–40.

MSC2010 35Q74, 74G70

Strength analysis of composite rotor blade of helicopter under shock damage

I.N. Sidorov[1], V.I. Mitryaikin[1], A.V. Gorelov[1], L.P. Shabalin[1]

Kazan national research technical University named after A. N. Tupolev – KAI[1]

Abstract: The results of the calculation of the stress-strain and limit states of the rotor blade of the ANSAT helicopter under different flight conditions, taking into account the possible damage of the blade in the butt section, are presented. The safety factors of the blade in the butt section depending on the azimuth angle of rotation of the blade are determined for the case when all the generalized forces change in proportion to one loading parameter.

Keywords: limit equilibrium theory, safety factor, method of variation of elastic constants, composite rotor blade of the helicopter, damage.

References

1. Gorelov A.V., Sidorov I.N. A lower bound estimate of the critical load for helicopter main rotor composite blade according to the limit equilibrium theory. The basic steps of an algorithm. Russian Aeronautics. 2011. Vol. 54, No. 3. P. 233–241.

2. Gorelov A.V., Sidorov I.N. A lower bound estimate of the critical load for helicopter main rotor composite blade according to the limit equilibrium theory. Analysis results. Russian Aeronautics. 2011. Vol. 54, No. 4. P. 341–345.

3. Kayumov R.A. Metod variacii uprugih harakteristik v zadache o predel'noj nagruzke. Prikladnaja mehanika i tehnicheskaja fizika. 1990. No. 3. P. 134–139.

4. Gvozdev A.A. Raschet nesushhej sposobnosti konstrukcij po metodu predel'nogo ravnovesija. M.: Strojizdat, 1949. 280 p.

5. Gorelov A.V., Sidorov I.N. Raschjot naprjazhenno-deformirovannogo i predel'nogo sostojanija kompozitnoj lopasti nesushhego vinta vertoljota «ANSAT». Kazan', 2006. 40 p. № 946 - B2006.

6. Mitrjajkin V.I., Pavlova N.V., Lustin A.D. Diagnostika udarnyh povrezhdenij lopastej vertoleta na komp'juternom tomografe. Innovacionnye podhody v sovremennoj nauke. 2017. No. 2(2). P.33–40.

УДК 517.956.4

Понижение размерности обратной задачи диффузии с помощью численных методов оптимизации*

Сыромясов А.О.[1], Галкин Д.В.[1], Шуршина А.С.[2]

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет[1],
Башкиркский государственный университет[2]

Аннотация: Рассматривается задача определения переменного коэффициента диффузии по результатам измерений средней концентрации примеси в пленке. Решение задачи затруднено как большим числом параметров, от которых зависит искомый коэффициент, так и сложным характером измеренных средних от этих параметров. Предложена гипотеза, позволяющая найти часть неизвестных величин независимо от остальных. Приведены результаты соответствующего численного эксперимента.

Ключевые слова: обратная задача диффузии, метод наименьших квадратов, численная оптимизация.

1. Постановка обратной задачи диффузии

Пусть в некотором объеме V распределено инородное вещество. Его концентрация c в каждой точке объема может изменяться вследствие диффузии; в частности, вещество может покидать V через его границу. Обратная задача диффузии состоит в том, чтобы найти коэффициент диффузии по известным значениям средней концентрации $\langle c\rangle(t)$ в объеме в некоторые моменты t_k, $k = 0, \dots, K-1$. Время $t_0 = 0$ соответствует началу процесса диффузии.

В [1] описана модель диффузии лекарственного вещества (ЛВ) из органической пленки (выступающей в роли V), основанная на следующих предположениях:

- Пленка является бесконечно протяженной в двух взаимно перпендикулярных направлениях из трех. В третьем направлении она имеет толщину $2l$.
- На границах пленки поддерживается нулевая концентрация вещества.
- Начальная концентрация лекарственного вещества одинакова во всех точках пленки: $c_0 = 1$.

Перечисленные гипотезы достаточно стандартны. Отличительной чертой модели служат два дополнительных утверждения:

- Вещество может находиться в свободном или в связанном состояниях: $c = b + f$. При этом связанное ЛВ может переходить в свободное состояние. Динамика этого перехода описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, решением которого служит функция
$$b(t) = b_\infty + (b_0 - b_\infty)e^{-\beta t}. \tag{1}$$
Здесь b_0, b_∞ – начальная и предельная концентрации связанного ЛВ. В диффузии участвует только свободное вещество, процесс диффузии описывается уравнением в частных производных параболического типа.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант мол_а 18-31-00119.

- Коэффициент диффузии зависит от времени по закону

$$D(t) = \frac{D_\infty + (D_0 - D_\infty)e^{-t/t_0}}{1 + \alpha(b(t) - b_0)}. \tag{2}$$

Это выражение учитывает зависимость свойств пленки от концентрации связанного вещества, а также постепенное набухание пленки в воде с течением времени.

При указанных предположениях средняя концентрация лекарственного вещества изменяется с течением времени по следующему закону:

$$\langle c\rangle(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} u_n T_n(t) + b_\infty + (b_0 - b_\infty)e^{-\beta t}, \tag{3}$$

причем

$$u_n = \frac{2(-1)^n}{\lambda_n l},\ \lambda_n = \frac{1}{l}\Big(\frac{\pi}{2} + \pi n\Big),$$
$$T_n(t) = u_n e^{-\lambda_n^2 I_D(t)}\Big[f_0 - \int_0^t \frac{db(s)}{ds} e^{\lambda_n^2 I_D(s)} ds\Big],$$
$$I_D(t) = \int_0^t D(p)dp.$$

Здесь функции $b(t)$ и $D(t)$ имеют вид (1) и (2), соответственно. Для параметров b_0 и f_0 выполнено соотношение $b_0 + f_0 = c_0$.

Т. о., при решении обратной задачи необходимо найти неизвестные постоянные b_0, b_∞, α, β, t_0, D_0, D_∞.

Как правило, известные c_k сходятся к некоторому пределу при увеличении номера k. Поскольку все $T_n(t)$ весьма быстро сходятся к нулю при $t \to \infty$, то из (1) следует, что $b_\infty \approx c_{K-1}$. Остальные неизвестные параметры должны подбираться так, чтобы выполнялось условие

$$Q^2 = \sum_{k=0}^{K-1} (\langle c\rangle(t_k) - c_k)^2 \to \min. \tag{4}$$

В приведенной формуле $\langle c\rangle(t_k)$ вычисляются по формуле (3).

В связи с громоздкостью выражения (3) указанная задача может быть решена только приближенно.

2. Понижение размерности задачи

Сложный характер зависимости Q^2 от искомых параметров и большое количество величин, подлежащих определению, затрудняет применение известных численных методов оптимизации [2].

Для упрощения задачи предлагается понизить ее размерность. При некоторых дополнительных предположениях зависимость средней концентрации от времени примет иной вид и будет включать не шесть параметров, как ранее, а некоторый более узкий их набор, который будет проще отыскать. Значения найденных величин затем можно будет подставить в выражения (3), (4) и найти оставшиеся параметры.

Пусть значения t достаточно малы. Тогда функция $I_D(t)$, наличие которой создает основные вычислительные трудности, упрощается:

$$I_D(t) \approx D(0)t,$$

причем из (1) и (2) следует, что

$$D(0) = \frac{D_0}{1 + \alpha(b_0 - \beta_\infty)}.$$

Поэтому выражение для средней концентрации при малых t принимает вид:

$$\langle c \rangle(t) \approx b_\infty + (b_0 - b_\infty)e^{-\beta t} + \frac{f_0}{2}\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 e^{-\lambda_n^2 D(0)t} + \frac{\beta(b_0 - b_\infty)}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n^2}{D(0)\lambda_n^2 - \beta}\Big[e^{-\beta t} - e^{-\lambda_n^2 D(0)t}\Big]. \tag{5}$$

В силу быстрого роста множителей λ_n^2 и убывания соответствующих экспонент бесконечные пределы суммирования в (5) можно заменить на сравнительно небольшие конечные пределы: $n \leq 100$.

Значения функции (5), вычисленные при заданных t_k, должны быть подставлены в (4), после чего можно будет отыскать b_0, β, $D(0)$.

3. Описание и результаты численного эксперимента

Для проведения тестового расчета были выбраны значения $b_0 = 0.8$, $b_\infty = 0.05$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.0$, $D_0 = 5.0$, $D_\infty = 12.0$, $t_0 = 48$. Согласно формуле (3), по ним были сгенерированы $K = 15$ значений c_k в моменты

$$t_k = 0;\ 0.17;\ 0.33;\ 0.50;\ 1.00;\ 1.50;\ 2.00;\ 3.00;\ 4.00;\ 5.00;\ 24.00;\ 72.00;\ 144.00;\ 168.00;\ 192.00.$$

Эти моменты времени (в часах) соответствуют моментам проведения измерений средней концентрации в экспериментах по выделению лекарственного вещества из хитозановой пленки.

При решении упрощенной задачи (4), (5) был проведен сравнительный анализ нескольких численных методов: Розенброка, сопряженных градиентов, Марквардта [2], а также реализованных в открытых библиотеках методов Нелдера-Мида [3], Левенберга-Марквардта [4] и глобальной оптимизации [5].

Предварительно из сгенерированных данных было найдено значение $b_\infty = 0.05$. На остальные параметры в ходе реализации перечисленных методов накладывались следующие ограничения:

$$c_0 = 1,\ b_0 \in [0;1],\ \alpha \in [0;10],\ \beta \in [0;25],\ D_0 \in [0;9],\ D_\infty \in [0;17],\ t_0 \in [0;72].$$

В результате было получено, что первые четыре из перечисленных выше методов дают близкие между собой значения $Q^2 \approx 0.006$. Минимум величины $Q^2 \approx 0.002$ был достигнут при использовании алгоритма Левенберга-Марквардта из библиотеки Ceres Solver. Наконец, алгоритм глобальной оптимизации занимает промежуточное положение с $Q^2 \approx 0.003$.

Метод Левенберга-Марквардта дал следующие значения искомых параметров: $b_0 \approx 0.802$, $\beta \approx 0.942$. Т. о., применение указанного метода обеспечивает достаточно точное совпадение приближенно найденных параметров модели с реальными.

Литература

1. Сыромясов А.О., Шуршина А.С., Галкин Д.В. Модель диффузии лекарственного вещества с учетом его связывания в органической пленке // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ имени Е.В. Воскресенского: VIII Международная научная молодежная школа-семинар (Саранск, 16–20 июля 2018 г.). Саранск, 2018. С. 150–155.

2. Афонин В.В., Никулин В.В. Методы моделирования и оптимизации м примерами на языке C/C++ и MATLAB. Ч. II. Методы безусловной оптимизации. Саранск, Издатель Афанасьев В.С., 2017. 232 с.

3. GNU Scientific Library [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.gnu.org/software/gsl/doc/html/multimin.html.

4. Ceres Solver [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://ceres-solver.org.

5. Global function search [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://dlib.net/optimization.html#global_function_search.

MSC2010 35K05 80A20 80A23 90C30 65K05

Dimensionality reduction in inverse diffusion problem by means of numerical optimization methods

A.O. Syromyasov[1], D.V. Galkin[1], A.S. Shurshina[2]

National Research Ogarev Mordovia State University[1], Bashkir State University[2]

Abstract: Article discusses the problem of determination of variable diffusion coefficient when the average concentration of admixture in organic film is measured and known in some moments of time. The problem is hard to solve for two reasons. First, the diffusion coefficient depends on large amount of parameters. Second, the dependence of average concentration on these parameters is complicated. The hypothesis is proposed that allows to find some of the parameters independently from others. Results of corresponding numerical experiment are stated.

Keywords: inverse diffusion problem, least squares method, numerical optimization.

References

1. Syromyasov A.O., Shurshina A.S., Galkin D.V. Model of diffusion of medicine that is bonded inside an organic film // VIII International Scientific Youth School-Seminar "Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software complexes" named after E.V. Voskresensky (Saransk, July 16–20, 2018). Saransk, 2018. P. 150–155 (in Russian).

2. Afonin V.V., Nikulin V.V. Metody modelirovaniya i optimizacii m primerami na yazyke C/C++ i MATLAB. CH. II. Metody bezuslovnoj optimizacii. Saransk, Afanasiev V.S. Publishers, 2017. 232 p.

3. GNU Scientific Library. http://www.gnu.org/software/gsl/doc/html/multimin.html.

4. Ceres Solver. http://ceres-solver.org.

5. Global function search. http://dlib.net/optimization.html#global_function_search.

УДК 517, 531.01

Интегрируемые системы с диссипацией со многими степенями свободы*

Шамолин М.В.[1]

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова[1]

Аннотация: В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к многомерному многообразию. При этом силовые поля обладают переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, переменная диссипация, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

Введение

В задачах динамики изучаются системы со многими степенями свободы с диссипацией (с пространством положений — многомерным многообразием). Их фазовыми пространствами становятся касательные расслоения к данным многообразиям. Например, изучение n-мерного обобщенного сферического маятника в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий [1,2]. В данном случае динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных (в смысле комплексного анализа) функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Выделим также класс задач о движении точки по многомерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего пространства. В ряде случаев в системах с диссипацией также удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных функций.

В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к многомерному многообразию (об аналогичных исследованиях на касательных расслоениях к многообразиям размерностей 2 и 3 см. [1,2]). При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные [3, 4].

1. Уравнения геодезических при замене координат и их первые интегралы

Как известно, в случае n-мерного гладкого риманова многообразия M^n с координатами (α, β), $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$, и аффинной связностью $\Gamma^i_{jk}(x)$ уравнения геодезических линий на касательном расслоении $T_*M^n\{\dot\alpha, \dot\beta_1, \ldots, \dot\beta_{n-1}; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$, $\alpha = x^1$, $\beta_1 = x^2$, ..., $\beta_{n-1} = x^n$, $x = (x^1, \ldots, x^n)$, имеют следующий вид (дифференцирование берется по натуральному

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (Грант № 19-01-00016 «Динамические эффекты в процессах деформирования и течения тонких твёрдых тел»)

параметру):

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^i_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k = 0,\ i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Изучим структуру уравнений (1) при изменении координат на касательном расслоении T_*M^n. Рассмотрим замену координат касательного пространства, зависящую от точки x многообразия:

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} R^{ij}(x)z_j, \tag{2}$$

которую почти всюду можно обратить: $z_j = \sum_{i=1}^{n} T_{ji}(x)\dot{x}^i$, при этом $R^{ij}, T_{ji}, i, j = 1, \ldots, n,$ — функции от $x^1, \ldots, x^n$, а также $RT = E$, где $R = (R^{ij}),\ T = (T_{ji})$. Назовем также уравнения (2) новыми кинематическими соотношениями, т. е. соотношениями на касательном расслоении T_*M^n. Справедливы тождества:

$$\dot{z}_j = \sum_{i=1}^{n} \dot{T}_{ji}\dot{x}^i + \sum_{i=1}^{n} T_{ji}\ddot{x}^i,\ \dot{T}_{ji} = \sum_{k=1}^{n} T_{ji,k}\dot{x}^k, \tag{3}$$

где $T_{ji,k} = \partial T_{ji}/\partial x^k,\ j, i, k = 1, \ldots, n$. Подставляя в (3) уравнения (1), имеем:

$$\dot{z}_i = \sum_{j,k=1}^{n} T_{ij,k}\dot{x}^j\dot{x}^k - \sum_{j,p,q=1}^{n} T_{ij}\Gamma^j_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q, \tag{4}$$

при этом в последней системе вместо $\dot{x}^i,\ i = 1, \ldots, n$, надо подставить формулы (2).

Другими словами, равенство (4) можно переписать в виде

$$\dot{z}_i + \sum_{j,k=1}^{n} Q_{ijk}\dot{x}^j\dot{x}^k|_{(2)} = 0,\ Q_{ijk}(x) = \sum_{s=1}^{n} T_{is}(x)\Gamma^s_{jk}(x) - T_{ij,k}(x).$$

Непосредственно из формул (4) следует следующее утверждение.

Предложение 1. *Система (1) в той области, где* $\det R(x) \neq 0$, *эквивалентна составной системе (2), (4).*

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (1) к эквивалентной системе уравнений (2), (4) зависит как от замены переменных (2) касательного пространства (т. е. вводимых новых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma^i_{jk}(x)$.

2. Важный частный случай

Рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\begin{gathered}\dot{\alpha} = -z_n,\ \dot{\beta}_1 = z_{n-1}f_1(\alpha),\ \dot{\beta}_2 = z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1),\ \dot{\beta}_3 = z_{n-3}f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2),\ \ldots, \\ \dot{\beta}_{n-1} = z_1 f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2}),\end{gathered} \tag{5}$$

где $f_k(\alpha)$, $k = 1, \ldots, n-1$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \ldots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \ldots, n-3$, $\ldots$, $i_1(\beta_{n-2})$ — гладкие на своей области определения функции. Такие координаты $z_1, \ldots, z_n$ в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие классы уравнений геодезических [3, 5, 6] (в частности, на многомерных поверхностях вращения) с $n(n-1)$ ненулевыми коэффициентами связности:

$$
\begin{gathered}
\ddot{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + \ldots + \Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,\\
\ddot{\beta}_1 + 2\Gamma^{1}_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \ldots + \Gamma^{1}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,\\
\ddot{\beta}_2 + 2\Gamma^{2}_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^{2}_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma^{2}_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 + \ldots + \Gamma^{2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,\\
\ddot{\beta}_3 + 2\Gamma^{3}_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma^{3}_{13}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma^{3}_{23}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 +\\
+\Gamma^{3}_{44}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_4^2 + \ldots + \Gamma^{3}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ddot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-2} + \ldots\\
\ldots + 2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-3}\dot{\beta}_{n-2} + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,\\
\ddot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} + \ldots\\
\ldots + 2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} = 0,
\end{gathered}
\tag{6}
$$

т. е. остальные коэффициенты связности равны нулю.

В случае (5) уравнения (4) примут вид

$$
\begin{gathered}
\dot{z}_1 = \left[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha)\right] z_1 z_n - \left[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)\right] f_1(\alpha) z_1 z_{n-1} -\\
- \left[2\Gamma^{n-1}_{2,n-1}(\alpha,\beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)\right] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) z_1 z_{n-2} - \ldots\\
\ldots - \left[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})\right] f_{n-2}(\alpha) g_{n-3}(\beta_1) h_{n-4}(\beta_2) \ldots r_1(\beta_{n-3}) z_1 z_2,\\
\dot{z}_2 = \left[2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta) + Df_{n-2}(\alpha)\right] z_2 z_n - \left[2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)\right] f_1(\alpha) z_2 z_{n-1} - \ldots\\
\ldots - \left[2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta) + Dr_1(\beta_{n-3})\right] f_{n-3}(\alpha) g_{n-4}(\beta_1) h_{n-5}(\beta_2) \ldots s_1(\beta_{n-4}) z_2 z_3 -\\
-\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)} \frac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)} \frac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)} \ldots \frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})} i_1^2(\beta_{n-2}) z_1^2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dot{z}_{n-1} = \left[2\Gamma^{1}_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\right] z_{n-1} z_n - \Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta) \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) z_{n-2}^2 - \ldots\\
\ldots - \Gamma^{1}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \ldots i_1^2(\beta_{n-2}) z_1^2,\\
\dot{z}_n = \Gamma^{\alpha}_{11} f_1^2(\alpha) z_{n-1}^2 + \Gamma^{\alpha}_{22} f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) z_2^2 + \ldots\\
\ldots + \Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1} f_{n-1}^2(\alpha) g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \ldots i_1^2(\beta_{n-2}) z_1^2,
\end{gathered}
\tag{7}
$$

здесь $DQ(q) = d\ln|Q(q)|/dq$, и уравнения (6) почти всюду эквивалентны составной системе (5), (7) на касательном расслоении $T_*M^n\{z_n,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$.

Для полного интегрирования системы (5), (7) необходимо знать, вообще говоря, $(2n-1)$ независимых первых интегралов. В нашем случае их нужно знать меньше, что будет показано ниже.

Предложение 2. *Если всюду на своей области определения справедлива система* $\dfrac{n(n-1)}{2}$ *равенств*

$$
\begin{gathered}
2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) f_1^2(\alpha) \equiv 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha) + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f_{n-1}^2(\alpha) g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2)\dots i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0,\\
\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + Dg_1(\beta_1)\right] f_1^2(\alpha) + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \equiv 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\left[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)\right] f_1^2(\alpha) +\\
+\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f_{n-1}^2(\alpha) g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2)\dots i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\left[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})\right] f_{n-2}^2(\alpha) g_{n-3}^2(\beta_1) h_{n-4}^2(\beta_2)\dots r_1^2(\beta_{n-3}) +\\
+\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f_{n-1}^2(\alpha) g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2)\dots i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0,
\end{gathered}
\tag{8}
$$

то система (5), (7) имеет аналитический первый интеграл вида

$$
\Phi_1(z_n,\dots,z_1) = z_1^2 + \dots + z_n^2 = C_1^2 = const. \tag{9}
$$

На первый взгляд вопрос наличия первого интеграла достаточно простого вида (9) не «заслуживает» решения такой достаточно сложной системы квазилинейных уравнений (8) (которая содержит, вообще говоря, уравнения в частных производных). Можно даже доказывать отдельную теорему существования решения $f_k(\alpha)$, $k = 1,\dots,n-1$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1,\dots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1,\dots,n-3$, $\dots$, $i_1(\beta_{n-2})$ системы (8) квазилинейных уравнений для наличия аналитического первого интеграла (9) для системы (5), (7) уравнений геодезических (6). Но в дальнейшем при изучении динамических систем с диссипацией полная группа условий (8) нам не потребуется. Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (5) выполнение условий

$$
f_1(\alpha) = \dots = f_{n-1}(\alpha) = f(\alpha), \tag{10}
$$

при этом функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1,\dots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1,\dots,n-3$, $\dots$, $i_1(\beta_{n-2})$ должны удовлетворять преобразованным уравнениям из (8):

$$
\begin{gathered}
2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + Dg_1(\beta_1) + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) g_1^2(\beta_1) \equiv 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1) + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2)\dots i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2}) g_{n-3}^2(\beta_1) h_{n-4}^2(\beta_2)\dots r_1^2(\beta_{n-3}) +\\
+\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2)\dots i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0.
\end{gathered}
\tag{11}
$$

Таким образом, функции $g_l(\beta_1)$, $l=1,\ldots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\ldots,n-3$, $\ldots$, $i_1(\beta_{n-2})$ зависят от коэффициентов связности через систему (11), а ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут даны ниже.

Предложение 3. *Если выполнены свойства (10), (11) и при этом справедливы равенства*

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)=\ldots=\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)=\Gamma_1(\alpha), \tag{12}$$

то система (5), (7) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_2(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha)=\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2}\,\Phi_0(\alpha)=C_2=const, \tag{13}$$

$$\Phi_0(\alpha)=f(\alpha)\exp\left\{2\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}.$$

Предложение 4. *Если выполнены условия предложения 3, а также*

$$g_1(\beta_1)=\ldots=g_{n-2}(\beta_1)=g(\beta_1), \tag{14}$$

и при этом справедливы равенства

$$\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)=\ldots=\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)=\Gamma_2(\beta_1), \tag{15}$$

то система (5), (7) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_3(z_{n-2},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1)=\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)=C_3=const, \tag{16}$$

$$\Psi_1(\beta_1)=g(\beta_1)\exp\left\{2\int_{\beta_{10}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}.$$

Далее применяем по индукции вышеизложенные рассуждения и приходим к следующему утверждению.

Предложение 5. *Если выполнены условия предложений 3, 4, …, и при этом справедливо равенство*

$$\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)=\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}), \tag{17}$$

то система (5), (7) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_n(z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})=z_1\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\ldots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})=C_n=const, \tag{18}$$

$$\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})=i(\beta_{n-2})\exp\left\{2\int_{\beta_{20}}^{\beta_2}\Gamma_3(b)db\right\},\ i(\beta_{n-2})=i_1(\beta_{n-2}).$$

Предложение 6. *Если выполнены условия предложений 3, 4, …, 5, то система (5), (7) имеет первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_{n+1}(z_{n-2},\ldots,z_1;\alpha,\beta)=\beta_{n-1}\pm\int_{\beta_{n-20}}^{\beta_{n-2}}\frac{C_n i(b)}{\sqrt{C^2_{n-1}\Phi^2_{n-2}(b)-C_n^2}}\,db=C_{n+1}=const. \tag{19}$$

Набор первых интегралов (9), (13), (16), …, (18), (19) является полным набором независимых первых интегралов системы (5), (7) при вышеперечисленных условиях (то, что полный набор состоит из $(n+1)$, а не из $(2n-1)$ первых интегралов, будет показано ниже).

Вопрос о гладкости первого интеграла (19) не так прост. В принципе, он может выражаться через конечную комбинацию элементарных функций и даже являться функцией рациональной. Но поскольку в рассматриваемой динамической системе отсутствуют асимптотические предельные множества, то функция (19) не может быть трансцендентной с точки зрения комплексного анализа. Действительно, у нее отсутствуют существенно особые точки. Но с точки зрения теории элементарных функций она может быть трансцендентной.

3. Уравнения движения в потенциальном силовом поле и их первые интегралы

Несколько модифицируем систему (5), (7) при условиях (10)–(12), (14), (15), ..., (17), получив систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует достаточно гладкий коэффициент $F(\alpha)$ во втором уравнении системы (20). Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^n\{z_n, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$ примет вид

$$
\begin{gathered}
\dot{\alpha} = -z_n, \\
\dot{z}_n = F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) z^2_{n-1} + \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) g^2(\beta_1) z_2^2 + \ldots \\
\ldots + \Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \ldots i^2(\beta_{n-2}) z_1^2, \\
\dot{z}_{n-1} = [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]\, z_{n-1} z_n - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) z^2_{n-2} - \ldots \\
\ldots - \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \ldots i^2(\beta_{n-2}) z_1^2, \ \ldots, \\
\dot{z}_2 = [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]\, z_2 z_n - [2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)]\, f(\alpha) z_2 z_{n-1} - \ldots \\
\ldots - [2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + Dr(\beta_{n-3})]\, f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) \ldots s(\beta_{n-4}) z_2 z_3 - \\
-\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) \ldots r(\beta_{n-3}) i^2(\beta_{n-2}) z_1^2, \\
\dot{z}_1 = [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]\, z_1 z_n - [2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)]\, f_1(\alpha) z_1 z_{n-1} - \\
- [2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)]\, f(\alpha) g(\beta_1) z_1 z_{n-2} - \ldots \\
\ldots - [2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2})]\, f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) \ldots r(\beta_{n-3}) z_1 z_2, \\
\dot{\beta}_1 = z_{n-1} f(\alpha), \ \dot{\beta}_2 = z_{n-2} f(\alpha) g(\beta_1), \ \dot{\beta}_3 = z_{n-3} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2), \ \ldots, \\
\dot{\beta}_{n-1} = z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) \ldots i(\beta_{n-2}),
\end{gathered}
\tag{20}
$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$
\begin{gathered}
\ddot{\alpha} + F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + \ldots + \Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}^2_{n-1} = 0, \\
\ddot{\beta}_1 + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \ldots + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}^2_{n-1} = 0, \\
\ddot{\beta}_2 + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 + \ldots + \Gamma^2_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}^2_{n-1} = 0, \\
\ddot{\beta}_3 + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_3(\beta_2)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 + \\
+\Gamma^3_{44}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_4^2 + \ldots + \Gamma^3_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}^2_{n-1} = 0, \ \ldots, \\
\ddot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-2} + \ldots \\
\ldots + 2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3})\dot{\beta}_{n-3}\dot{\beta}_{n-2} + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}^2_{n-1} = 0, \\
\ddot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} + \ldots + 2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2})\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} = 0.
\end{gathered}
$$

Предложение 7. *Если выполнены условия предложения 2, то система (20) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:*

$$
\Phi_1(z_n, \ldots, z_1; \alpha) = z_1^2 + \ldots + z_n^2 + F_1(\alpha) = C_1 = const, \ F_1(\alpha) = 2\int_{\alpha_0}^{\alpha} F(b)\,db. \tag{21}
$$

Предложение 8. *Если выполнены условия предложений 3, 4, …, 5, то система (20) имеет гладкие первые интегралы вида (13), (16), …, (18).*

Предложение 9. *Если выполнены условия предложения 6, то система (20) имеет первый интеграл вида (19).*

Набор первых интегралов (21), (13), (16), …, (18), (19) является полным набором независимых первых интегралов системы (20) при вышеперечисленных условиях (то, что полный набор состоит из $(n+1)$, а не из $(2n-1)$ первых интегралов, будет показано ниже).

Вопрос о гладкости первого интеграла (19) по-прежнему не так прост. Поскольку в рассматриваемой динамической системе даже при наличии гладкого консервативного силового поля отсутствуют асимптотические предельные множества, то функция (19) не может быть трансцендентной с точки зрения комплексного анализа (у нее отсутствуют существенно особые точки). Но с точки зрения теории элементарных функций она может быть трансцендентной (см. также [7,8]).

4. Уравнения движения в силовом поле с диссипацией и их первые интегралы

Теперь усложним систему (20) и получим систему с диссипацией. А именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует достаточно гладкий коэффициент $b\delta(\alpha)$ в первом уравнении следующей системы:

$$\begin{gathered}
\dot\alpha = -z_n + b\delta(\alpha),\\
\dot z_n = F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)z_{n-1}^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)g^2(\beta_1)z_2^2 + \ldots\\
\ldots + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2})z_1^2,\\
\dot z_{n-1} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right] z_{n-1}z_n - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)z_{n-2}^2 - \ldots\\
\ldots - \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2})z_1^2,\ \ldots,\\
\dot z_2 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right] z_2z_n - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\right] f(\alpha)z_2z_{n-1} - \ldots\\
\ldots - \left[2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + Dr(\beta_{n-3})\right] f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots s(\beta_{n-4})z_2z_3 -\\
-\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3})i^2(\beta_{n-2})z_1^2,\\
\dot z_1 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right] z_1z_n - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\right] f_1(\alpha)z_1z_{n-1} -\\
- \left[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)\right] f(\alpha)g(\beta_1)z_1z_{n-2} - \ldots\\
\ldots - \left[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2})\right] f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3})z_1z_2,\\
\dot\beta_1 = z_{n-1}f(\alpha),\ \dot\beta_2 = z_{n-2}f(\alpha)g(\beta_1),\ \dot\beta_3 = z_{n-3}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2),\ \ldots\\
\dot\beta_{n-1} = z_1f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}),
\end{gathered} \tag{22}$$

которая почти всюду эквивалентна

$$\ddot{\alpha} - b\dot{\alpha}\delta'(\alpha) + F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + \ldots + \Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,$$

$$\ddot{\beta}_1 - b\dot{\beta}_1\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \ldots + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,$$

$$\ddot{\beta}_2 - b\dot{\beta}_2\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 +$$

$$+\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 + \ldots + \Gamma^2_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,$$

$$\ddot{\beta}_3 - b\dot{\beta}_3\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_3(\beta_2)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 +$$

$$+\Gamma^3_{44}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_4^2 + \ldots + \Gamma^3_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \ \ldots,$$

$$\ddot{\beta}_{n-2} - b\dot{\beta}_{n-2}\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-2} + \ldots$$

$$\ldots + 2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3})\dot{\beta}_{n-3}\dot{\beta}_{n-2} + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,$$

$$\ddot{\beta}_{n-1} - b\dot{\beta}_{n-1}\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} + \ldots$$

$$\ldots + 2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2})\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} = 0,$$

здесь $W(\alpha) = 2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)$.

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы (22) порядка $2n$ при выполнении равенств

$$\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1) \equiv \ldots \equiv \Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots = \Gamma_n(\alpha). \tag{23}$$

Введем также (по аналогии с (11)) ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять преобразованному первому равенству из (8):

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha) \equiv 0. \tag{24}$$

Для полного интегрирования системы (22) необходимо знать, вообще говоря, $2n-1$ независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных

$$w_n = z_n, \ w_{n-1} = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}, \ w_{n-2} = \frac{z_2}{z_1},$$
$$w_{n-3} = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \ \ldots, \ w_1 = \frac{z_{n-1}}{\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_2^{n-2}}},$$

система (22) распадается следующим образом:

$$\begin{gathered}\dot{\alpha} = -w_n + b\delta(\alpha), \ \dot{w}_n = F(\alpha) + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha)w_{n-1}^2,\\ \dot{w}_{n-1} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]w_{n-1}w_n,\end{gathered} \tag{25}$$

$$\begin{gathered}\dot{w}_s = \pm w_{n-1}\sqrt{1+w_s^2}f(\alpha)\ldots\left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + Dj(\beta_s)\right],\\ \dot{\beta}_s = \pm\frac{w_s w_{n-1}}{\sqrt{1+w_s^2}}f(\alpha)\ldots, \ s = 1,\ldots,n-2,\end{gathered} \tag{26}$$

$$\dot{\beta}_{n-1} = \pm\frac{w_{n-1}}{\sqrt{1+w_{n-2}^2}}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}), \tag{27}$$

где в системе (26) символом «...» показаны одинаковые члены, а функция $j(\beta_s)$ — одна из функций $g, h, \ldots$, зависящая от соответствующего угла β_s.

Видно, что для полной интегрируемости системы (25)–(27) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (25), по одному — для систем (26) (меняя в них независимые переменные; их $(n-2)$ штуки), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (27) (т. е. всего $(n+1)$).

Теорема 1. *Пусть для некоторых $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ выполняются равенства*

$$\Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\delta(\alpha)|, \;\; F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \tag{28}$$

Тогда система (22) при выполнении условий (23), (24) обладает полным набором $(n+1)$ независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.

Для начала сопоставим системе третьего порядка (25) неавтономную систему второго порядка

$$\frac{dw_n}{d\alpha} = \frac{F(\alpha) + \Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha) w_{n-1}^2}{-w_n + b\delta(\alpha)}, \;\; \frac{dw_{n-1}}{d\alpha} = \frac{[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]\, w_{n-1} w_n}{-w_n + b\delta(\alpha)}. \tag{29}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам $w_n = u_n \delta(\alpha)$, $w_{n-1} = u_{n-1}\delta(\alpha)$, приводим систему (29) к следующему виду:

$$\begin{gathered} \delta(\alpha)\frac{du_n}{d\alpha} = \frac{F_3(\alpha) + \Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha)\delta(\alpha) u_{n-1}^2 + \delta'(\alpha) u_n^2 - b\delta'(\alpha) u_n}{-u_n + b}, \\ \delta(\alpha)\frac{du_{n-1}}{d\alpha} = \frac{-\Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha)\delta(\alpha) u_{n-1} u_n + \delta'(\alpha) u_{n-1} u_n - b\delta'(\alpha) u_n}{-u_n + b}, \;\; F_3(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{\delta(\alpha)}. \end{gathered} \tag{30}$$

А после выполнения условий (28) система (30) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_n}{du_{n-1}} = \frac{\lambda + \kappa u_{n-1}^2 + u_n^2 - bu_n}{(1-\kappa) u_{n-1} u_n - bu_n}. \tag{31}$$

Уравнение (31) имеет вид уравнения Абеля. В частности, при $\kappa = -1$ оно имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_n^2 + u_{n-1}^2 - bu_n + \lambda}{u_{n-1}} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{32}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) = G_1\left(\frac{w_n}{\delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\delta(\alpha)}\right) = \frac{w_n^2 + w_{n-1}^2 - bw_n\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)}{w_{n-1}\delta(\alpha)} = C_1 = \mathrm{const}. \tag{33}$$

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (25) при $\kappa = -1$. Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (32) при $u_{n-1} \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_n - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_{n-1} - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - \lambda. \tag{34}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4\lambda \geq 0, \tag{35}$$

и фазовое пространство системы (21) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (34).

Таким образом, в силу соотношения (32) первое уравнение системы (30) при $\kappa = -1$ примет вид

$$\frac{\delta(\alpha)}{\delta'(\alpha)}\frac{du_n}{d\alpha} = \frac{2(\lambda - bu_n + u_4^2) - C_1U_1(C_1, u_n)}{-u_n + b},\ U_1(C_1, u_n) = \frac{1}{2}\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_n^2 - bu_n + \lambda)}\},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (35).

Тогда дополнительный первый интеграл для системы (25) имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_n, w_{n-1}; \alpha) = G_2\left(\delta(\alpha), \frac{w_n}{\delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const} \tag{36}$$

и при $\kappa = -1$ он найдется из квадратуры

$$\ln|g(\alpha)| = \int \frac{(b - u_n)du_n}{2(\lambda - bu_n + u_n^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_n^2 - bu_n + \lambda)}\}/2},\ u_n = \frac{w_n}{\delta(\alpha)}.$$

При этом после взятия этого интеграла вместо C_1 можно подставить левую часть равенства (33). Правая часть данного равенства выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая — в зависимости от функции $\delta(\alpha)$. Поэтому выражение первых интегралов (33), (36) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$.

Первые интегралы для систем (26) будут иметь вид

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const},\ s = 1, \ldots, n-2, \tag{37}$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, \ldots, n-2$, см. (16), ..., (18). А дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (27), находится по аналогии с (19):

$$\Theta_{n+1}(w_2, w_1; \alpha, \beta) = \beta_{n-1} \pm \int_{\beta_{n-20}}^{\beta_n-2} \frac{C_n i(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2\Psi_{n-2}^2(b) - C_n^2}}\,db = C_{n+1} = \text{const},$$

при этом после взятия этого интеграла вместо постоянных C_{n-1}, C_n можно подставить соответствующие левые части равенства (37).

5. Замечания о структуре первых интегралов систем с диссипацией

Если α — периодическая координата периода 2π, то система (25) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [1, 2, 8, 9]. При этом при $b = 0$ она превращается в систему консервативную, которая обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (21), (13). В силу (28)

$$\Phi_1(z_n, \ldots, z_1; \alpha) = z_1^2 + \ldots + z_n^2 + 2\int_{\alpha_0}^{\alpha} F(b)db \cong w_n^2 + w_{n-1}^2 + \lambda\delta^2(\alpha), \tag{38}$$

где «$\cong$» означает равенство с точностью до аддитивной постоянной. При этом, в силу (24) и (28)

$$\Phi_2(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}\ f(\alpha)\exp\left\{2\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\} \cong w_{n-1}\delta(\alpha) = \tag{39}$$

$$= C_2 = \mathrm{const},$$

где «$\cong$» означает равенство с точностью уже до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (38) и (39) (или (21) и (13)) также является первым интегралом системы (25) при $b = 0$. Но при $b \neq 0$ каждая из функций

$$w_n^2 + w_{n-1}^2 - bw_n\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha) \tag{40}$$

и (39) по отдельности не является первым интегралом системы (25). Однако отношение функций (40), (39) является первым интегралом системы (25) (при $\kappa = -1$) при любом b.

Вообще же, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств.

Литература

1. Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. Москва: Изд-во "Экзамен", 2007. 352 с.

2. Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14, Вып. 3. С. 3–237.

3. Козлов В.В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. матем. и механ. 2015. Т. 79, № 3. С. 307–316.

4. Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. Т. 16, Вып. 4. С. 3–229.

5. Шамолин М.В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил // Итоги науки и техники. Сер. «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». 2013. Т. 125. С. 5–254.

6. Шамолин М.В. Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения // Фундаментальная и прикладная математика. 2015. Т. 20, Вып. 4. С. 3–231.

7. Шамолин М.В. Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Доклады РАН. 2015. Т. 464, №. 6. С. 688–692.

8. Шамолин М.В. Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле при наличии линейного демпфирования // Доклады РАН. 2016. Т. 470, №. 3. С. 288–292.

9. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам // Доклады РАН. 2016. Т. 471, №. 5. С. 547–551.

MSC2010 37C, 37J, 70F

Integrable systems with dissipation and finitely many degrees of freedom

M.V. Shamolin[1]

Lomonosov Moscow State University[1]

Abstract: We establish the integrability for some classes of dynamic systems on the tangent bundles of multidimensional manifolds. We consider the case where the force fields possess variable dissipation. An example of a four-dimensional manifold is discussed in detail.

Keywords: dynamical system, variable dissipation, integrability, transcendental first integral.

References

1. Shamolin M.V. Metody analiza dinamicheskikh sistem s peremennoy dissipatsiey v dinamike tverdogo tela [Methods of analysis of variable dissipation dynamical systems in dynamics of a rigid body]. Moscow, Publishing of "Ekzamen", 2007. 352 p.

2. Shamolin M.V. Dinamicheskie sistemy s peremennoy dissipatsiey: podkhody, metody, prilozheniya [Dynamical systems with variable dissipation: approaches, methods, and applications]. Fundamentalnaya i prikladnaya matematika [Fundamental and applied mathematics]. 2008. V. 14, No. 3. P. 3–237.

3. Kozlov V.V. Ratsional'nie integraly kvaziodorodnykh dynamicheskikh sistem [Rational integrals of quasi-homogeneous dynamical systems]. Prokladnaya matematika i mekhanika [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]. 2015. V. 79, No. 3. P. 307–316.

4. Trofimov V.V., Shamolin M.V. Geometricheskie i dinamicheskie invarianty integriruemykh gamil'tonovykh i dissipativnykh sistem [Geometric and dynamical invariants of integrable Hamiltonian and dissipative systems]. Fundamentalnaya i prikladnaya matematika [Fundamental and applied mathematics]. 2010. V. 16, No. 4. P. 3–229.

5. Shamolin M.V. Mnogoobrazie sluchaev integriruemosti v dinamike malomernogo i mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole sil [Variety of integrable cases in dynamics of low- and multi-dimensional rigid bodies in nonconservative force fields]. Itogi nauki i tekhniki. Ser. "Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory" [Contemporary mathematics and its applications. Thematic surveys]. 2013. V. 125. P. 5–254.

6. Shamolin M.V. Integriruemye sistemy s peremennoy dissipatsiey na kasatel'nom rassloenii k mnogomernoy sfere i prilozheniya [Integrable variable dissipation systems on the tangent bundle of a multi-dimensional sphere and some applications]. Fundamentalnaya i prikladnaya matematika [Fundamental and applied mathematics]. 2015. V. 20, No. 4. P. 3–231.

7. Shamolin M.V. Polniy spisok pervikh integralov uravneniy dvizheniya mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole pri nalichii lineynogo dempfirovaniya [Complete list of the first integrals of dynamic equations of a multidimensional solid in a nonconservative

field under the assumption of linear damping]. Doklady RAN [Doklady physics]. 2015. V. 464, No. 6. P. 688–692.

8. Shamolin M.V. Mnogomerniy mayatnik v nekonservativnom silovom pole pri nalichii lineynogo dempfirovaniya [A multidimensional pendulum in a nonconservative force field under the presence of linear damping]. Doklady RAN [Doklady physics]. 2016. V. 470, No. 3. P. 288–292.

9. Shamolin M.V. Novye slushai integriruemosti sistem s dissipatsyey na kasatel'nykh rassloeniyakh k dvumernoy i trekhmernoy sferam [New cases of integrable systems with dissipation on tangent bundles of two- and three-dimensional spheres]. Doklady RAN [Doklady physics]. 2016. V. 471, No. 5. P. 547–551.

Для заметок

Для заметок

Для заметок

Научное электронное издание

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

МАТЕРИАЛЫ
XIV МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

Саранск
9 – 12 июля 2019 г.

Печатается в авторской редакции

Формат 60×84 1/16

Усл. печ. л. 10,2

Тираж 110 экз.

Подписано в печать 12.07.2019

Средне-Волжское математическое общество

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

430005, г. Саранск, ул. Большевистская, 68

CBMO