

УДК 539.3:533.6:517.9

Об управлении динамикой деформируемого элемента конструкции при сверхзвуковом обтекании*

А.В. Гладун¹, П.А. Вельмисов²

Ульяновский институт гражданской авиации имени Главного маршала авиации
Б.П. Бугаева¹, Ульяновский государственный технический университет²

Аннотация: Рассмотрена задача построения стабилизирующего управления в случае неустойчивости деформируемого элемента конструкции при сверхзвуковом обтекании. Исходное уравнение, описывающее динамику элемента, с помощью метода Галеркина приводится к системе линейных уравнений, для которой строится управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость нулевого решения. Приведены результаты численного моделирования поведения функции прогиба элемента конструкции при заданных параметрах под действием построенного управления.

Ключевые слова: деформируемый элемент, сверхзвуковое обтекание, динамика, управляемость, стабилизация, уравнения с частными производными, метод Галеркина.

1. Введение

При проектировании конструкций, обтекаемых потоком газа или жидкости, важное значение имеет устойчивость деформируемых элементов. Воздействие потока на составные части конструкций может приводить к возникновению неустойчивых колебаний и, тем самым, к их разрушению или нарушению требуемых функциональных свойств. В работах [1], [2] были получены достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости упругого элемента конструкции при обтекании его сверхзвуковым потоком газа. Чтобы не допустить разрушения конструкции в случае неустойчивых колебаний, можно рассмотреть задачу о погашении колебаний с помощью некоторого управляющего воздействия. Таким образом можно предотвратить разрушение конструкции, обеспечить надежность ее эксплуатации и поддержание требуемых функциональных свойств.

2. Постановка задачи

Рассматривается задача управления динамикой упругого элемента конструкции в виде пластины-полосы при одностороннем обтекании ее сверхзвуковым потоком идеального газа в случае ее шарнирного закрепления на обоих концах. Динамика упругого элемента в сверхзвуковом потоке газа описывается дифференциальным уравнением с частными производными

$$m\ddot{w} + Dw'''' + Nw'' + \alpha\dot{w}'''' - \beta\ddot{w}'' + \gamma(\dot{w} + Vw') + u(t) = 0, \quad (1)$$

где $w(x, t)$ – прогиб пластины; x – продольная координата, $x \in [0, l]$, l – длина пластины; t – время; $u(t)$ – некоторое управляющее воздействие; V – скорость потока; m, D, N, α, β – некоторые постоянные; $\gamma = \alpha_0\rho_0a_0$, ρ_0 – плотность потока, a_0 – скорость звука в однородном потоке; штрих обозначает производную по координате x , точка – производную по времени t . Постоянная $\alpha_0 = 1$ для одностороннего и $\alpha_0 = 2$ для двустороннего обтекания пластины.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Ульяновской области, проект № 18-41-730015.

Введем безразмерные координату \bar{x} , время \bar{t} и функцию прогиба \bar{w} :

$$\bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \bar{t} = \frac{V}{l} t, \quad \bar{w} = \frac{w}{l}. \quad (2)$$

Делая замену переменных (2) в уравнении (1) и оставляя за безразмерными переменными такие же обозначения, какие были у исходных переменных, получаем

$$\frac{mV}{K} \ddot{w} + \frac{D}{KVL^2} w'''' + \frac{N}{KV} w'' + \frac{\alpha}{Kl^3} \dot{w}'''' - \frac{\beta V}{Kl^2} \ddot{w}'' + \dot{w} + w' + u(t) = 0, \quad (3)$$

где $K = \gamma V$, $x \in [0, 1]$.

Рассмотрим задачу построения управления $u(t)$, обеспечивающего гашение возникающих колебаний пластины в случае, когда значениям исходных параметров уравнения соответствует состояние динамической неустойчивости [3].

Задача. Найти для случая динамической неустойчивости уравнения (3) непрерывное (далее допустимое) управление $u(t)$, такое, что соответствующее ему нулевое решение уравнения $w(x, t) = 0$ будет асимптотически устойчивым.

В начальный момент времени $t = 0$ деформация и скорость точек пластины задаются равенствами:

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= \sqrt{2} c_1 \sin(\pi x) + \sqrt{2} c_2 \sin(2\pi x), \quad x \in [0, 1], \\ \dot{w}(x, 0) &= \sqrt{2} c_3 \sin(\pi x) + \sqrt{2} c_4 \sin(2\pi x), \quad x \in [0, 1], \end{aligned} \quad (4)$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 – некоторые заданные постоянные.

3. Построение решений

Для построения решений уравнения (3) методом Галеркина будем задавать функцию $w(x, t)$ в виде [4]

$$w_M(x, t) = \sum_{k=1}^M v_k(t) g_k(x),$$

где $\{g_k(x)\}_1^\infty$ – полная на $[0, 1]$ система нормированных базисных функций, соответствующих случаю шарнирного закрепления концов пластины

$$w(0, t) = w(1, t) = w''(0, t) = w''(1, t) = 0.$$

Выберем $g_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x)$ и ограничимся случаем $M = 2$, тогда функция $w(x, t)$ запишется следующим образом:

$$w(x, t) = \sqrt{2} v_1(t) \sin(\pi x) + \sqrt{2} v_2(t) \sin(2\pi x). \quad (5)$$

В результате применения процедуры метода Галеркина получаем систему из двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $v_1(t)$ и $v_2(t)$

$$\begin{aligned} \left(\frac{V\pi^2\beta}{Kl^2} + \frac{Vm}{K} \right) \ddot{v}_1(t) + \left(\frac{\pi^4\alpha}{Kl^3} + 1 \right) \dot{v}_1(t) + \left(\frac{\pi^4 R}{KVL^2} - \frac{\pi^2 N}{KV} \right) v_1(t) - \\ - \frac{8}{3} v_2(t) + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} u(t) = 0, \\ \left(\frac{4V\pi^2\beta}{Kl^2} + \frac{Vm}{K} \right) \ddot{v}_2(t) + \left(\frac{16\pi^4\alpha}{Kl^3} + 1 \right) \dot{v}_2(t) + \left(\frac{16\pi^4 R}{KVL^2} - \frac{4\pi^2 N}{KV} \right) v_2(t) + \\ + \frac{8}{3} v_1(t) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Начальные условия (4) при этом принимают вид:

$$v_1(0) = c_1, v_2(0) = c_2, \dot{v}_1(0) = c_3, \dot{v}_2(0) = c_4. \quad (7)$$

Система уравнений (6) с начальными условиями (7) представляет собой задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами и может быть решена методом Лапласа. Метод позволяет найти функции $v_1(t)$, $v_2(t)$ и затем явно записать функцию прогиба пластины $w(x, t)$, что значительно облегчает проверку точности решения. Вычисляя производные от функции $w(x, t)$ и подставляя их в уравнение (3), получаем невязку $E(x, t)$, по величине которой оцениваем погрешность найденного решения.

4. Исследование управляемости

Для изучения управляемости системы (6) приведем ее к нормальному виду и воспользуемся достаточным условием управляемости линейных систем. Введем новые переменные

$$y_1 = v_1(t), \quad y_2 = v_2(t), \quad y_3 = \dot{v}_1(t), \quad y_4 = \dot{v}_2(t),$$

и перепишем систему (6) в виде

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_3, \\ \dot{y}_2 &= y_4, \\ \dot{y}_3 &= \frac{Kl^2}{V(\pi^2\beta + ml^2)} \left(\frac{\pi^2(Nl^2 - \pi^2R)}{KVl^2} y_1 + \frac{8}{3} y_2 - \left(\frac{\pi^4\alpha}{Kl^3} + 1 \right) y_3 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} u(t) \right), \\ \dot{y}_4 &= \frac{Kl^2}{V(4\pi^2\beta + ml^2)} \left(-\frac{8}{3} y_1 + \frac{4\pi^2(Nl^2 - 4\pi^2R)}{KVl^2} y_2 - \left(\frac{16\pi^4\alpha}{Kl^3} + 1 \right) y_4 \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}u \quad (9)$$

система (8), записанная в матричном виде, где $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^*$, * – знак транспонирования,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\pi^2(Nl^2 - \pi^2R)}{V^2(\pi^2\beta + ml^2)} & \frac{8}{3} \frac{Kl^2}{V(\pi^2\beta + ml^2)} & -\frac{\pi^4\alpha + Kl^3}{Vl(\pi^2\beta + ml^2)} & 0 \\ \frac{(-8)Kl^2}{3V(4\pi^2\beta + ml^2)} & \frac{4\pi^2(Nl^2 - 4\pi^2R)}{V^2(4\pi^2\beta + ml^2)} & 0 & -\frac{16\pi^4\alpha + Kl^3}{Vl(4\pi^2\beta + ml^2)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(-2)\sqrt{2}Kl^2}{\pi V(\pi^2\beta + ml^2)} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как при $l \neq 0$

$$\det\{b, Ab, A^2b, A^3b\} = \frac{(-4096) K^6 l^{12}}{9\pi^4 V^6 (\pi^2\beta + l^2 m)^4 (4\pi^2\beta + l^2 m)^2} \neq 0,$$

то $\text{rank}\{b, Ab, A^2b, A^3b\} = 4$ при $l \neq 0$ и линейная система (9) управляема, что также означает для линейной системы возможность построения стабилизирующего управления.

Будем в дальнейшем полагать, что постоянные в системах уравнений (6), (8), (9) заданы следующим образом

$$V = 400\text{м/с}, l = 20\text{м}, m = 117.75\text{кг}, \gamma = 420.175, R = 64086.91, N = 1000, \alpha = 0.2, \beta = 0.1.$$

При заданных значениях параметров и $u(t) = 0$ среди характеристических чисел матрицы A имеются характеристические числа с положительной действительной частью: $\lambda_{1,2} = 0.39965 \pm 0.4865722i$, следовательно решения линейной системы (9) неустойчивые. Это влечет за собой, после подстановки найденных функций $v_1(t) = y_1$, $v_2(t) = y_2$ в равенство (5) для прогиба пластины, динамическую неустойчивость уравнения (3).

5. Стабилизация нулевого прогиба пластины

Рассмотрим систему линейных уравнений (9). Будем искать управление $u(t)$ в виде сложной функции $u(\mathbf{y}(t))$, зависящей от переменных y_1, y_2, y_3, y_4 , которые в свою очередь зависят от безразмерного времени t . Тогда линейная система уравнений (9) после подстановки управления $u(\mathbf{y}) = \mathbf{e}^* \mathbf{y}$ примет вид:

$$\dot{\mathbf{y}} = (A + b \mathbf{e}^*) \mathbf{y}, \quad (10)$$

где $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4)^*$ – некоторый постоянный вектор. Используя подходящий вектор \mathbf{e} , можно изменить значения характеристических чисел матрицы системы. Если в результате подстановки управления $u(\mathbf{y})$ действительные части всех характеристических чисел матрицы $(A + b \mathbf{e}^*)$ станут отрицательными, то решения линейной системы (9) будут асимптотически устойчивые, что приведет к асимптотической устойчивости нулевого решения $w(x, t) = 0$ уравнения (3).

Таким образом, задачу стабилизации нулевого прогиба пластины $w(x, t) = 0$ для полученной после преобразования Галеркина системы (9) можно переформулировать следующим образом.

Задача*. Найти для системы (9) допустимое управление $u(\mathbf{y})$, такое, что соответствующее ему решение системы $y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0, y_4 = 0$ будет асимптотически устойчивым.

В системе уравнений (9) сделаем замену переменных:

$$\mathbf{z} = T \mathbf{y}, \text{ где } T = \{b, Ab, A^2b, A^3b\}, \mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)^*.$$

Получаем:

$$\dot{\mathbf{z}} = P \mathbf{z} + d u,$$

где $P = T^{-1} A T$, $d = T^{-1} b$, $d = (1, 0, 0, 0, 0)^*$. Или более подробно:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.2263482168 \\ 1 & 0 & 0 & -0.002045010222 \\ 0 & 1 & 0 & -0.04329204038 \\ 0 & 0 & 1 & -0.3568187049 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u. \quad (11)$$

Стабилизирующее управление для системы (9) будем строить [5] по формуле $u(\mathbf{y}) = \mathbf{e}^* \mathbf{y}$,

$$\mathbf{e} = T^{(-1)*} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_4 & p_3 & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{h}), \quad (12)$$

где $\mathbf{p} = (-0.3568187049, -0.04329204038, -0.002045010222, -0.2263482168)^*$ – последний столбец матрицы P в системе (11), а \mathbf{h} – вектор коэффициентов характеристического уравнения

$$\lambda^4 + h_1 \lambda^3 + h_2 \lambda^2 + h_3 \lambda + h_4 = 0$$

для системы (10).

Для асимптотической устойчивости возьмем в качестве корней характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = -0.5 \pm 0i$, $\lambda_{3,4} = -0.5 \pm 0i$, тогда вектор $\mathbf{h} = (2, 1.5, 0.5, 0.0625)^*$. Вычисляя по формуле (12) получим стабилизирующее управление:

$$u(\mathbf{y}) = 7.243735419 y_1 + 2.313986880 y_2 + 10.22963563 y_3 - 3.559850802 y_4.$$

Возвращаясь к функциям $v_1(t)$, $v_2(t)$ имеем:

$$u(t) = 7.243735419 v_1(t) + 2.313986880 v_2(t) + 10.22963563 \dot{v}_1(t) - 3.559850802 \dot{v}_2(t). \quad (13)$$

Подставляя найденное управление (13) в систему (6) и решая ее методом Лапласа, находим функции $v_1(t)$, $v_2(t)$. Затем из равенств (5) и (13) получаем прогиб пластины $w(x, t)$ и управляющее воздействие $u(t)$.

На рис. 1 – рис. 3. приведены результаты численного моделирования применения построенного управления

$$u(t) = e^{-0.498159t} 10^7 \left(1.051384 \cos(0.001848t) - 1.0399297 \sin(0.001848t) \right) - e^{-0.501841t} 10^7 \left(1.051384 \cos(0.0018336t) + 1.063017 \sin(0.0018336t) \right),$$

для случая, когда в начальный момент времени $t = 0$ деформация и скорость точек пластины задаются равенствами (4) с константами

$$c_1 = 0.2, c_2 = -0.1, c_3 = 0.15, c_4 = 0.1.$$

На рис. 1 и рис. 2 изображены графики функции $w(x, t)$ при $x = l/2 = 10\text{м}$ и при $x = l/5 = 4\text{м}$ соответственно.

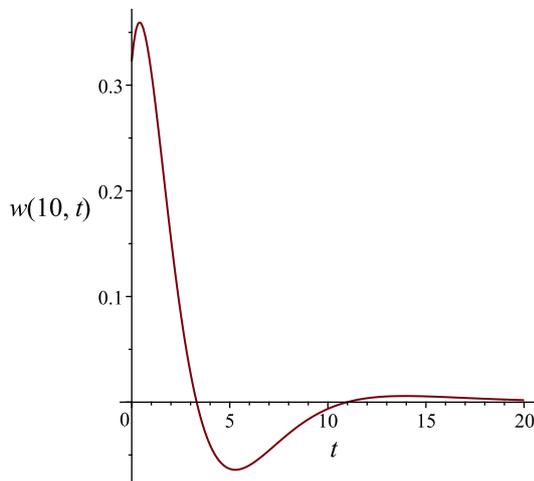


Рис. 1. Колебание точки $x = 10$.

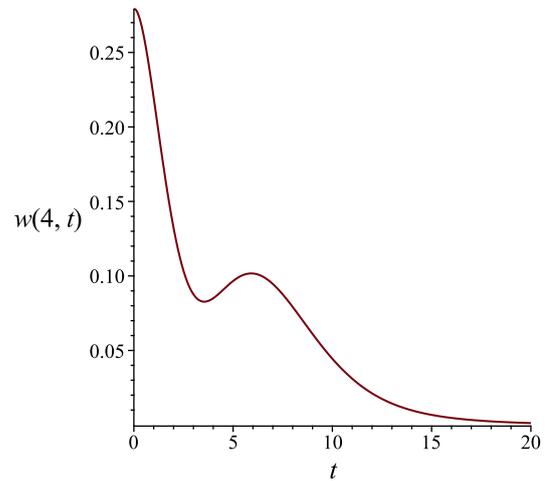
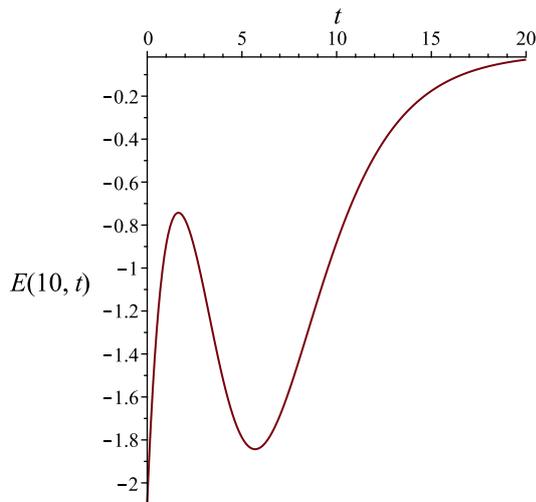
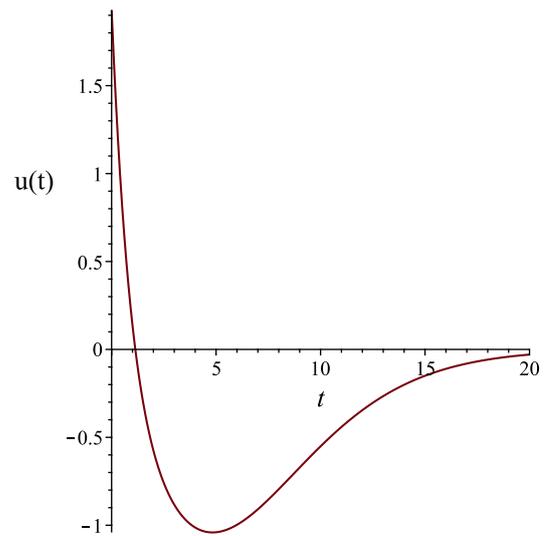


Рис. 2. Колебание точки $x = 4$.

На рис. 3 изображена невязка $E(x, t)$ при $x = 10$, которая получена путем подстановки найденной функции $w(x, t)$ в уравнение (3). График управляющего воздействия $u(t)$ представлен на рис. 4.

Таким образом, в статье показана возможность управления динамикой деформируемого элемента конструкции при сверхзвуковом обтекании. Предложенная методика построения стабилизирующего управления может быть использована и для других модельных уравнений, описывающих динамику деформируемого элемента. В случае нелинейной модели поиск стабилизирующего управления может быть выполнен по линейному приближению [6] при определенных условиях на нелинейные слагаемые из модельного уравнения.

Рис. 3. Погрешность для $x = 10$.Рис. 4. Управление $u(t)$.

Литература

1. Анкилов А. В, Вельмисов П. А. Исследование динамики и устойчивости упругого элемента конструкции при сверхзвуковом обтекании // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2011. №3(57). Выпуск 1. С. 59–67.
2. Анкилов А. В, Вельмисов П. А, Судаков В. А. Об устойчивости решений начально-краевой задачи о динамике защитного экрана при взаимодействии со сверхзвуковым потоком газа // Вестник Ульяновского государственного технического университета. 2013. №3(63). С. 45–52.
3. Вельмисов П. А., Гладун А. В. Об управлении динамикой трубопровода в случае его динамической неустойчивости // Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании: материалы XIII Международной научной конференции. (Саранск, 12-16 июля 2017 г.). - Саранск: СВМО, 2017. - С. 381-390. Режим доступа: <http://conf.svmo.ru/files/deamm2017/papers/paper54.pdf>.
4. Вельмисов П. А., Гладун А. В. Об управлении динамикой трубопровода // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18. № 4. С. 89-97.
5. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. – 476 с.
6. Гладун А. В. Управление и стабилизация вращательного движения спутника с помощью двух гиродинов // Механика твердого тела. 2013. № 43. С. 151–162.

MSC 74F10

On control of dynamics of a deformable structural element in supersonic flow

A.V. Gladun¹, P.A. Velmisov²

Ulyanovsk Civil Aviation Institute named after Chief Marshal of Aviation B.P. Bugaev¹,
Ulyanovsk State Technical University²

Abstract: The problem of constructing a stabilizing control in the case of instability of a deformable structural element in supersonic flow is considered. The initial equation, describing the dynamics of the element, is reduced to a system of linear equations with the help of the Galerkin method. The control law that provide asymptotic stability of zero solution for the obtained system is constructed. The results of numerical simulation of the behavior of the deformable structural element under the action of the constructed control with given parameters are presented.

Keywords: deformable element, supersonic flow, dynamics, controllability, stabilization, partial differential equations, Galerkin method.

References

1. Ankilov A. V, Velmisov P. A. Issledovanie dinamiki i ustojchivosti uprugogo ehlementa konstrukcii pri sverhzhukovom obtekanii [Investigation of dynamic and stability of elastic element of construction in supersonic flow] // Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta [Vestnik Saratov State Technical University]. Saratov: SSTU, 2011. No 3(57). Issue 1. pp. 59–67.
2. Ankilov A. V, Velmisov P. A., Sudakov V. A. Ob ustojchivosti resheniy nachalno-kraevoy zadachi o dinamike zashchitnogo ehkrana pri vzaimodejstvii so sverhzhukovym potokom gaza [On the solution stability of initial value problem concerning evolution of a protective shield interacting with supersonic gas flow] // Vestnik Ulyanovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta [Bulletin of the Ulyanovsk State Technical University]. Ulyanovsk: 2013. No. 3(63). pp. 45–52.
3. Velmisov P. A., Gladun A. V. Ob upravlenii dinamikoy truboprovoda v sluchae ego dinamicheskoy neustojchivosti [On control of dynamic of a pipeline in the case of its dynamic instability] // Differencialnye uravneniya i ih prilozheniya v matematicheskom modelirovanii: materialy XIII Mezhdunarodnoy nauchnoy konferencii [Proceedings of the XIII International scientific conference "Differential equations and their applications in mathematical modelling"]. (Saransk, July 12-16, 2017). Saransk: Middle-Volga Mathematical Society, 2017. - pp. 381-390. Access mode: <http://conf.svmo.ru/files/deamm2017/papers/paper54.pdf>.
4. Velmisov P. A., Gladun A. V. Ob upravlenii dinamikoy truboprovoda [About control of pipeline dynamics] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Middle-Volga Mathematical Society Journal]. 2016. Vol. 18. No. 4. pp. 89-97.
5. Krasovsky N. N. Teoriya upravleniya dvizheniem. Lineynye sistemy [Theory of Motion Control. Linear Systems]. Moscow: Nauka, 1968. – 476 p.
6. Gladun A. V. Upravlenie i stabilizaciya vrashchatelnogo dvizheniya sputnika s pomoshchyu dvuh girodinov [Control and stabilization of the rotational motion of a satellite by means

of two gyroclines] // Механика твёрдого тела [Rigid body mechanics]. Donetsk: 2013. No 43. pp. 151–162.