

УДК 539.3: 532.542

Динамическая устойчивость деформируемых элементов аэроупругих конструкций*

П.А. Вельмисов, А.В. Анкилов, Ю.В. Покладова

Ульяновский государственный технический университет

Аннотация: В работе исследуется устойчивость решений начально-краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений с частными производными, описывающих динамику деформируемых элементов различных конструкций, находящихся во взаимодействии с газожидкостной средой (обтекаемых потоком жидкости или газа). Принятые в работе определения устойчивости деформируемого (вязкоупругого, упругого) тела соответствуют концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Изучается устойчивость элементов летательных аппаратов, трубопроводных систем, вибрационных устройств при различных способах закрепления элементов при дозвуковом или сверхзвуковом режимах обтекания сжимаемой или несжимаемой средой. Воздействие газа или жидкости (в модели идеальной среды) определяется из асимптотических линейных уравнений аэрогидромеханики. Для описания динамики упругих элементов используется как линейная, так и нелинейная теории твердого деформируемого тела.

Ключевые слова: аэрогидроупругость, математическое моделирование, динамическая устойчивость, упругая пластина, дозвуковой поток газа, дифференциальные уравнения в частных производных, функционал.

1. Введение

При проектировании и эксплуатации конструкций, приборов, устройств, установок различного назначения, взаимодействующих с потоком газа или жидкости, важной проблемой является обеспечение надежности их функционирования и увеличение сроков службы. Подобные проблемы присущи многим отраслям техники. В частности, такого рода задачи возникают в авиаракетостроении, приборостроении, при проектировании антенных установок, высоких наземных сооружений и т. д.

Устойчивости упругих тел, взаимодействующих с потоком газа, посвящено большое количество теоретических и экспериментальных исследований, проведенных в последние десятилетия. Среди последних исследований по динамике и устойчивости деформируемых тел, обтекаемых потоком жидкости или газа, следует отметить работы [1–6] и многие другие. Среди работ авторов данной статьи по исследованию динамики и устойчивости упругих тел, в том числе взаимодействующих с потоком жидкости или газа, отметим монографии и статьи [7–11].

Исследуется устойчивость решений начально-краевых задач для связанных систем интегро-дифференциальных уравнений с частными производными, описывающих динамику деформируемых элементов различных конструкций, находящихся во взаимодействии с газожидкостной средой (обтекаемых потоком жидкости или газа). Исследование устойчивости проводится на основе построения положительно определенных функционалов (прямой метод Ляпунова) для этих систем. Принятые в работе определения устойчивости деформируемого (вязкоупругого, упругого) тела соответствуют концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Проблема может быть сформулирована так: при каких значениях параметров, характеризующих систему «жидкость–тело» (основными параметрами являются

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Ульяновской области, проект № 18-41-730015.

скорость потока, прочностные и инерционные характеристики тела, сжимающие или растягивающие усилия, силы трения), малым деформациям тел в начальный момент времени $t = 0$ (т.е. малым начальным отклонениям от положения равновесия) будут соответствовать малые деформации и в любой момент времени $t > 0$.

Изучается устойчивость элементов летательных аппаратов, трубопроводных систем, вибрационных устройств, датчиков измерения параметров газожидкостных сред при различных способах закрепления элементов при дозвуковом или сверхзвуковом режимах обтекания сжимаемой или несжимаемой средой. Воздействие газа или жидкости (в модели идеальной среды) определяется из асимптотических уравнений аэрогидромеханики. Для описания динамики упругих элементов используется как линейная, так и нелинейная теории твердого деформируемого тела.

В качестве примера приведем результаты исследования динамической устойчивости деформируемых элементов вибрационных устройств. Основной частью широкого класса этих устройств является проточный канал, внутри которого расположены деформируемые элементы. Работа таких устройств основана на вибрации деформируемых элементов при протекании внутри каналов жидкости.

2. Динамическая устойчивость деформируемых элементов вибрационного устройства, расположенных последовательно

Рассмотрим плоское течение в вибрационном устройстве, моделируемом прямолинейным каналом $G = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < x_0, 0 < y < H\}$, в котором последовательно расположены два упругих элемента. Скорость невозмущенного однородного потока на входе в канал равна V и направлена вдоль оси Ox . Упругими элементами являются пластины $J_i = \{(x, y) \in R^2 : y = y_0 \in (0, H), x \in [b_i, c_i]\}$, $i = 1, 2$ (рис. 1).

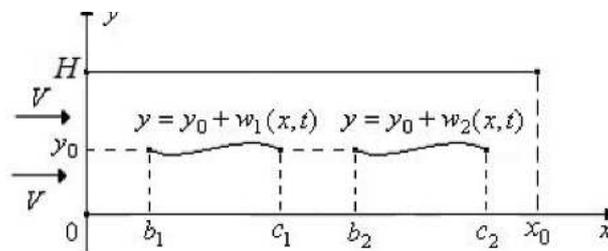


Рис. 1. Канал, внутри которого расположены последовательно деформируемые элементы.

Введем обозначения: $u_i(x, t)$, $w_i(x, t)$, $i = 1, 2$ – функции, определяющие продольные и поперечные составляющие деформации элементов в направлении осей Ox и Oy соответственно, $\varphi(x, y, t)$ – функция, определяющая потенциал скорости возмущенного потока газожидкостной среды, где $t \geq 0$ – время.

Тогда математическая постановка задачи имеет вид:

$$\varphi_{tt} + 2V\varphi_{xt} + V^2\varphi_{xx} = a^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}), \quad (x, y) \in G \setminus J, \quad J = \bigcup_{i=1}^2 J_i, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = \dot{w}_i(x, t) + Vw'_i(x, t), \quad x \in (b_i, c_i), \quad i = 1, 2, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$\varphi_y(x, H, t) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad t \geq 0, \quad (4)$$

$$\varphi(0, y, t) = 0, \quad \varphi(x_0, y, t) = 0, \quad y \in (0, y_0), \quad t \geq 0. \quad (5)$$

Аэрогидродинамическое воздействие потока на элементы, согласно интегралу Лагранжа-Коши, определяется выражением

$$P_i(x, t) = \rho(\varphi_t^+(x, y_0, t) - \varphi_t^-(x, y_0, t)) + \rho V(\varphi_x^+(x, y_0, t) - \varphi_x^-(x, y_0, t)), \quad x \in (b_i, c_i), \quad i = 1, 2, \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Индексы x, y, t снизу обозначают частные производные по x, y, t ; штрих и точка – частные производные по x и t соответственно; ρ – плотность потока; a – скорость звука в невозмущенном потоке газожидкостной среды ($a > V$); $\varphi_t^\pm(x, y_0, t) = \lim_{y \rightarrow y_0 \pm 0} \varphi_t(x, y, t)$; $\varphi_x^\pm(x, y_0, t) = \lim_{y \rightarrow y_0 \pm 0} \varphi_x(x, y, t)$.

Рассмотрим нелинейную модель колебаний упругого тела с учетом продольных и поперечных составляющих деформаций элементов, моделируемых упругими пластинами, с учетом силового воздействия потока $P_i(x, t)$ на них. Тогда математическую постановку задачи (1)–(6) следует дополнить уравнениями

$$\begin{cases} -E_i F_i \left(u_i'(x, t) + \frac{1}{2} w_i'^2(x, t) \right)' + M_i \ddot{u}_i(x, t) = 0, \\ -E_i F_i \left[w_i'(x, t) \left(u_i'(x, t) + \frac{1}{2} w_i'^2(x, t) \right) \right]' + D_i w_i''''(x, t) + M_i \ddot{w}_i(x, t) + N_i(t) w_i''(x, t) + \\ + \beta_{2i} \dot{w}_i''''(x, t) + \beta_{1i} \dot{w}_i(x, t) + \beta_{0i} w_i(x, t) = P_i(x, t), \quad x \in (b_i, c_i), \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь $D_i = E_i h_i^3 / (12(1 - \nu_i^2))$ – изгибные жесткости элементов; h_i – толщина элементов; $M_i = h_i \rho_i$ – погонные массы элементов; E_i, ρ_i – модули упругости и линейные плотности элементов; $F_i = h_i / (1 - \nu_i)$; $N_i(t)$ – сжимающие ($N_i > 0$) или растягивающие ($N_i < 0$) элементы силы; β_{2i}, β_{1i} – коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования; β_{0i} – коэффициенты жесткости слоя обжатия; ν_i – коэффициенты Пуассона.

Исследована устойчивость в случае шарнирного неподвижного закрепления концов упругих элементов:

$$w_i(b_i, t) = w_i''(b_i, t) = u_i(b_i, t) = w_i(c_i, t) = w_i''(c_i, t) = u_i(c_i, t) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

Получили связанную краевую задачу (1)–(8) для пяти неизвестных функций – деформаций упругих элементов $u_i(x, t), w_i(x, t), i = 1, 2$ и потенциала скорости жидкости (газа) $\varphi(x, y, t)$.

Зададим начальные условия:

$$w_i(x, 0) = f_{1i}(x), \quad \dot{w}_i(x, 0) = f_{2i}(x), \quad u_i(x, 0) = f_{3i}(x), \quad \dot{u}_i(x, 0) = f_{4i}(x), \quad i = 1, 2, \quad (9)$$

$$\varphi(x, y, 0) = f_5(x, y), \quad \varphi_t(x, y, 0) = f_6(x, y), \quad (10)$$

которые должны быть согласованы с краевыми условиями.

В монографии [8] доказана лемма.

Лемма 1. Если можно построить функционал $\Phi(t) \equiv \Phi(w_1, \dots, w_n, u_1, \dots, u_n, \varphi)$ полиномиального вида, где $w_i(x, t), u_i(x, t), i = 1, 2, \varphi(x, y, t)$ – решение задачи (1)–(10), такой что $\Phi(t) \geq 0, \dot{\Phi}(t) \leq 0$, то функции $w_i(x, t), u_i(x, t), i = 1, 2$ и (или) $\varphi(x, y, t)$ и (или) их производные, входящие в положительно определенный полином в выражении для $\Phi(t)$ или в положительно определенную нижнюю оценку $\Phi_1(t)$ этого функционала $\Phi(t) (\Phi(t) \geq \Phi_1(t) \geq 0)$, устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных (9), (10).

Введем обозначение: λ_{1i} – наименьшие собственные значения [12] краевых задач для уравнения $\psi'''' = -\lambda \psi''$, $x \in (b_i, c_i), i = 1, 2$ с краевыми условиями $\psi(b_i) = \psi''(b_i) = \psi(c_i) = \psi''(c_i) = 0$, соответствующими условиям (8) для функций $w_i(x, t)$.

На основе исследования функционала

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \iint_{G \setminus J} (\varphi_t^2(x, y, t) + (a^2 - V^2) \varphi_x^2(x, y, t) + a^2 \varphi_y^2(x, y, t)) dx dy + \\ & + 2a^2 V \sum_{i=1}^2 \int_{b_i}^{c_i} (\varphi^+(x, y_0, t) - \varphi^-(x, y_0, t)) w_i'(x, t) dx + \frac{a^2}{\rho} \sum_{i=1}^2 \int_{b_i}^{c_i} \left(E_i F_i \left(u_i'(x, t) + \frac{1}{2} w_i'^2(x, t) \right)^2 + \right. \\ & \left. + M_i (\dot{u}_i^2(x, t) + \dot{w}_i^2(x, t)) + D_i w_i''^2(x, t) + \beta_{0i} w_i^2(x, t) - N_i(t) w_i'^2(x, t) \right) dx \end{aligned}$$

согласно лемме 1 доказана теорема.

Теорема 1. Пусть для любого момента времени $t > 0$ выполняются условия

$$\dot{N}_i(t) \geq 0, \beta_{2i} \geq 0, \beta_{1i} \geq 0, i = 1, 2,$$

$$\min_{i=1,2} (\lambda_{1i} D_i - N_i(t)) > \frac{V^2 \rho H ((a^2 - V^2) \pi^2 (H - y_0) y_0 + 2a^2 x_0^2)}{2(a^2 - V^2) \pi^2 y_0 (H - y_0)}.$$

Тогда решение $w_i(x, t)$, $i = 1, 2$, $\varphi(x, y, t)$ задачи (1)–(10) и производные $\varphi_t(x, y, t)$, $\varphi_x(x, y, t)$, $\varphi_y(x, y, t)$, $w_i'(x, t)$, $\dot{w}_i(x, t)$, $\dot{u}_i(x, t)$, $w_i''(x, t)$, $i = 1, 2$ устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных (9), (10).

3. Динамическая устойчивость деформируемых элементов вибрационного устройства, расположенных параллельно

Рассмотрим плоское течение в вибрационном устройстве, моделируемом прямолинейным каналом $G = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < x_0, 0 < y < y_0\}$ с горизонтальными недеформируемыми стенками. Внутри канала имеются два параллельных деформируемых упругих элемента. Скорость невозмущенного сжимаемого однородного потока равна V и направлена вдоль оси Ox . Рассматривается дозвуковой режим протекания $a > V$, где a – скорость звука в невозмущенном потоке жидкости. Деформируемыми являются пластины при $y = y_1$ и $y = y_2$ при $x \in [b, c]$ (рис. 2). Введем обозначение $J_i = \{(x, y) \in R^2 : y = y_i \in (0, y_0), x \in [b, c]\}$, $i = 1, 2$, $J = J_1 \cup J_2$.

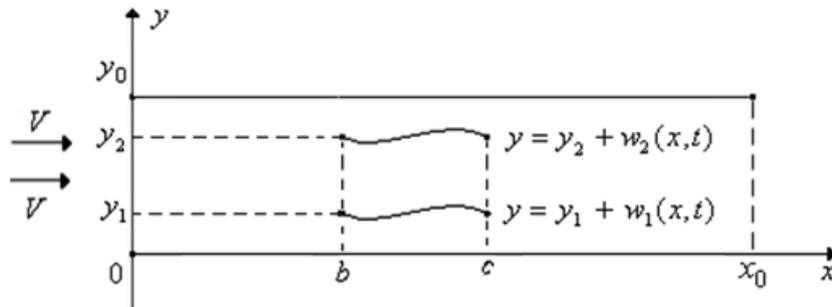


Рис. 2. Канал, внутри которого расположены параллельно деформируемые элементы.

Введем обозначения: $u_i(x, t)$, и $w_i(x, t)$, $i = 1, 2$ – деформации упругих элементов в направлении осей Ox и Oy соответственно, индекс $i = 1$ соответствует элементу при $y = y_1$, $i = 2$ – при $y = y_2$; $\varphi(x, y, t)$ – потенциал скорости возмущенного потока.

Сформулируем математическую постановку задачи:

$$\varphi_{tt} + 2V \varphi_{xt} + V^2 \varphi_{xx} = a^2 (\varphi_{xx} + \varphi_{yy}), \quad (x, y) \in G \setminus J, \quad t \geq 0, \quad (11)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad t \geq 0, \quad (12)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad t \geq 0, \quad (13)$$

$$\varphi_y(x, y_i, t) = \dot{w}_i(x, t) + Vw_i'(x, t), \quad i = 1, 2, \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0, \quad (14)$$

$$\varphi(0, y, t) = 0, \quad \varphi(x_0, y, t) = 0, \quad y \in (0, y_0), \quad (15)$$

$$P_i(x, t) = \rho(\varphi_t^+(x, y_i, t) - \varphi_t^-(x, y_i, t)) + \rho V(\varphi_x^+(x, y_i, t) - \varphi_x^-(x, y_i, t)), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0, \quad (16)$$

$$\begin{cases} -E_i F_i \left(u_i'(x, t) + \frac{1}{2} w_i'^2(x, t) \right)' + M_i \ddot{u}_i(x, t) = 0, \\ -E_i F_i \left[w_i'(x, t) \left(u_i'(x, t) + \frac{1}{2} w_i'^2(x, t) \right) \right]' + D_i w_i''''(x, t) + M_i \ddot{w}_i(x, t) + N_i(t) w_i''(x, t) + \\ + \beta_{2i} \dot{w}_i''''(x, t) + \beta_{1i} \dot{w}_i(x, t) + \beta_{0i} w_i(x, t) = P_i(x, t), \quad x \in (b, c), \quad i = 1, 2, \quad t \geq 0, \end{cases} \quad (17)$$

$$w_i(b, t) = w_i''(b, t) = u_i(b, t) = w_i(c, t) = w_i''(c, t) = u_i(c, t) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (18)$$

Имеем связанную краевую задачу (11)–(18) для пяти неизвестных функций – деформаций упругих элементов стенок канала $u_i(x, t)$, $w_i(x, t)$, $i = 1, 2$ и потенциала скорости жидкости (газа) $\varphi(x, y, t)$.

На основе исследования функционала:

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \iint_{G \setminus J} (\varphi_t^2(x, y, t) + (a^2 - V^2) \varphi_x^2(x, y, t) + a^2 \varphi_y^2(x, y, t)) dx dy + \\ & + 2a^2 V \sum_{i=1}^2 \int_b^c (\varphi^+(x, y_i, t) - \varphi^-(x, y_i, t)) w_i'(x, t) dx + \frac{a^2}{\rho} \sum_{i=1}^2 \int_b^c \left(E_i F_i \left(u_i'(x, t) + \frac{1}{2} w_i'^2(x, t) \right)^2 + \right. \\ & \left. + M (\dot{u}_i^2(x, t) + \dot{w}_i^2(x, t)) + D_i w_i''^2(x, t) + \beta_{0i} w_i^2(x, t) - N_i(t) w_i'^2(x, t) \right) dx \end{aligned}$$

согласно лемме 1 доказана теорема.

Теорема 2. Пусть для любого момента времени $t > 0$ выполняются условия

$$\dot{N}_i(t) \geq 0, \quad \beta_{2i} \geq 0, \quad \beta_{1i} \geq 0, \quad i = 1, 2,$$

$$\begin{aligned} & \frac{y_1 V^2 \rho \left((a^2 - V^2) \pi^2 (y_2 - y_1)^2 + 2a^2 x_0^2 \right)}{(y_2 - y_1) \left(2K_1(t) (a^2 - V^2) \pi^2 y_1 - V^2 \rho \left((a^2 - V^2) \pi^2 y_1^2 + 2a^2 x_0^2 \right) \right)} \in (0, 1); \\ & \frac{(y_0 - y_2) V^2 \rho \left((a^2 - V^2) \pi^2 (y_2 - y_1)^2 + 2a^2 x_0^2 \right)}{(y_2 - y_1) \left(2K_2(t) (y_0 - y_2) (a^2 - V^2) \pi^2 - V^2 \rho \left((a^2 - V^2) \pi^2 (y_0 - y_2)^2 + 2a^2 x_0^2 \right) \right)} \in (0, 1); \\ & + \frac{\frac{y_1}{(2K_1(t) y_1 (a^2 - V^2) \pi^2 - V^2 \rho \left((a^2 - V^2) \pi^2 y_1^2 + 2a^2 x_0^2 \right))} +}{(y_0 - y_2)} < \\ & < \frac{(y_2 - y_1)}{V^2 \rho \left((a^2 - V^2) \pi^2 (y_2 - y_1)^2 + 2a^2 x_0^2 \right)}, \end{aligned}$$

где $K_i(t) = \lambda_{1i} D_i - N_i(t)$. Тогда решение $w_i(x, t)$, $i = 1, 2$, $\varphi(x, y, t)$ задачи (11)–(18), (9), (10) и производные $\varphi_t(x, y, t)$, $\varphi_x(x, y, t)$, $\varphi_y(x, y, t)$, $w_i'(x, t)$, $\dot{w}_i(x, t)$, $\dot{u}_i(x, t)$, $w_i''(x, t)$, $i = 1, 2$ устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных (9), (10).

Литература

1. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А., Христофорова А.В. Математическое моделирование динамики взаимодействия сильновязкой жидкости со стенками канала, установленного на упругом основании // Динамика систем, механизмов и машин. 2016. 3. 1. С. 350–354.
2. Askari E., Jeong K.-H., Amabili M. Hydroelastic vibration of circular plates immersed in a liquid-filled container with free surface // Journal of sound and vibration. 2013. 332. 12. P. 3064–3085. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.01.007>
3. Faal R.T., Derakhshan D. Flow-Induced Vibration of Pipeline on Elastic Support // Procedia Engineering. 2011. 14. P. 2986–2993. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2011.07.376>
4. Gatica G.N., Heuer N., Meddahi S. Coupling of mixed finite element and stabilized boundary element methods for a fluid-solid interaction problem in 3D // Numer. Methods Partial Differ. Equations. 2014. 30. 4. P. 1211–1233. <https://doi.org/10.1002/num.21866>
5. Kontzialis K., Moditis K., Paidoussis M.P. Transient simulations of the fluid-structure interaction response of a partially confined pipe under axial flows in opposite directions // Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME. 2017. 139(3). P. 1–8. <https://doi.org/10.1115/1.4034405>
6. Moditis K., Paidoussis M., Ratigan J. Dynamics of a partially confined, discharging, cantilever pipe with reverse external flow // Journal of Fluids and Structures. 2016. 63. P. 120–139. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2016.03.002>
7. Ankilov A.V., Vel'misov P.A. Stability of solutions to an aerohydroelasticity problem // Journal of Mathematical Sciences, 2016. 219, 1. P. 14–26. <https://doi.org/10.1007/s10958-016-3079-4>
8. Анкилов А.В., Вельмисов П.А. Функционалы Ляпунова в некоторых задачах динамической устойчивости аэроупругих конструкций. Ульяновск, УлГТУ, 2015. 146 с.
9. Анкилов А.В., Вельмисов П.А. Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости деформируемых элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии. Ульяновск, УлГТУ, 2013. 322 с.
10. Анкилов А.В., Вельмисов П.А. Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии. Ульяновск, УлГТУ, 2009. 220 с.
11. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Горбоконеко В.Д., Покладова Ю.В. Математическое моделирование механической системы «трубопровод – датчик давления». Ульяновск, УлГТУ, 2008. 188 с.
12. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М., Наука, 1968. 503 с.

MSC 74F10

Dynamic stability of deformable elements of aeroelastic structures

P.A. Velmisov, A.V. Ankilov, Yu.V. Pokladova

Ulyanovsk State Technical University

Abstract: The stability of solutions of initial-boundary value problems for integro-differential partial differential equations describing the dynamics of deformable elements of various structures interacting with a gas-liquid medium (streamlined by a fluid or gas flow) is investigated in this paper. The definitions of the stability of a deformable (viscoelastic, elastic) body adopted in the paper correspond to the concept of stability of dynamical systems by Lyapunov. The stability of the elements of aircraft, pipeline systems, vibrating devices under different ways of fixing elements under subsonic or supersonic flow around a compressible or incompressible medium is studied. The effect of gas or liquid (in the model of an ideal medium) is determined from the asymptotic linear equations of aerohydrodynamics. To describe the dynamics of elastic elements, both linear and nonlinear theories of a solid deformed body are used.

Keywords: aerohydroelasticity, mathematical modeling, dynamic stability, elastic plate, subsonic flow of gas, the differential equations in partial derivatives, functional.

References

1. Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., Hristoforova A.V. Matematicheskoe modelirovanie dinamiki vzaimodeystviya sil'novyazkoy zhidkosti so stenkami kanala, ustanovlennogo na uprugom osnovanii // *Dinamika sistem, mekhanizmov i mashin*. 2016. 3. 1. P. 350–354. (in Russian)
2. Askari E., Jeong K.-H., Amabili M. Hydroelastic vibration of circular plates immersed in a liquid-filled container with free surface // *Journal of sound and vibration*. 2013. 332. 12. P. 3064–3085. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.01.007>
3. Faal R.T., Derakhshan D. Flow-Induced Vibration of Pipeline on Elastic Support // *Procedia Engineering*. 2011. 14. P. 2986–2993. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2011.07.376>
4. Gatica G.N., Heuer N., Meddahi S. Coupling of mixed finite element and stabilized boundary element methods for a fluid-solid interaction problem in 3D // *Numer. Methods Partial Differ. Equations*. 2014. 30. 4. P. 1211–1233. <https://doi.org/10.1002/num.21866>
5. Kontzialis K., Moditis K., Paidoussis M.P. Transient simulations of the fluid-structure interaction response of a partially confined pipe under axial flows in opposite directions // *Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME*. 2017. 139(3). P. 1–8. <https://doi.org/10.1115/1.4034405>
6. Moditis K., Paidoussis M., Ratigan J. Dynamics of a partially confined, discharging, cantilever pipe with reverse external flow // *Journal of Fluids and Structures*. 2016. 63. P. 120–139. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2016.03.002>
7. Ankilov A.V., Vel'misov P.A. Stability of solutions to an aerohydroelasticity problem // *Journal of Mathematical Sciences*, 2016. 219, 1. P. 14–26. <https://doi.org/10.1007/s10958-016-3079-4>

8. Ankilov A.V., Velmisov P.A. Funktsionaly Lyapunova v nekotorykh zadachakh dinamicheskoy ustoychivosti aerouprugikh konstruksiy. Ul'yanovsk, UIGTU, 2015. 146 p. (in Russian)
9. Ankilov A.V., Velmisov P.A. Matematicheskoe modelirovanie v zadachakh dinamicheskoy ustoychivosti deformiruemykh elementov konstruksiy pri aerogidrodinamicheskom vozdeystvii. Ul'yanovsk, UIGTU, 2013. 322 p. (in Russian)
10. Ankilov A.V., Velmisov P.A. Dinamika i ustoychivost' uprugikh plastin pri aerogidrodinamicheskom vozdeystvii. Ul'yanovsk: UIGTU, 2009. 220 p. (in Russian)
11. Ankilov A.V., Velmisov P.A., Gorbokonenko V.D., Pokladova Yu.V. Matematicheskoe modelirovanie mehanicheskoi systemy «truboprovod – datchik davleniya». Ul'yanovsk: UIGTU, 2008. 188 p. (in Russian)
12. Kollatz L. Zadachi na sobstvennye znacheniya. M., Nauka. 1968. 503 p. (in Russian)