УДК 517.95

Исследование системы Франкля с секвестрированными коэффициентами

Т.А. Шемякина[1]

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого[1]

Основным объектом исследования рассматриваем систему Франкля [1]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - P(x,y,u(x,y),v(x,y))\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \pm Q(x,y,u(x,y),v(x,y))\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $u(x,y), v(x,y)$ – неизвестные функции;
$P(x,y,u(x,y),v(x,y)) \geq p_0 > 0; Q(x,y,u(x,y),v(x,y)) \geq q_0 > 0;$
p_0, q_0 – константы.

Эта система дифференциальных уравнений с частными производными относится к системам смешанного типа: со знаком плюс – она эллиптического типа, со знаком минус – гиперболического типа. Известный физик Ф.И. Франкль в работе [1] впервые привлек внимание к системе дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка (1) смешанного типа, соединив исследование её при определенных условиях с изучением задач стационарного процесса трансзвуковой газовой динамики. Библиография по уравнениям смешанного типа содержится во многих монографиях.

Известные ученые С.А. Чаплыгин, М.А. Лаврентьев, С.В. Фалькович, А.В. Бицадзе, Ф. Трикоми, Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко и др. изучали задачи для систем уравнений смешанного типа (чаще всего в виде дифференциального уравнения второго порядка). При этом, коэффициенты дифференциальных уравнений либо являются константами, либо независимыми переменными. Метод исследования заключался, как правило, с помощью новых переменных в преобразовании нелинейных уравнений к линейным. Но возврат к исходным переменным в общем случае представляет собой более трудоемкую задачу, чем исходная задача. В итоге разработанные методы наряду с преимуществами имеют существенные недостатки. Например, применение метода характеристик для таких систем уравнений в соответствующем интегральном уравнении вносит суперпозицию неизвестных функций. В применении большинства методов условием разрешимости исходной задачи является условие существования обратной функции. Новая задача во многих случаях оказывается настолько сложной, что ее не решают, а принимают допустимость обратного преобразования переменных в качестве условия.

Для преодоления таких трудностей сначала исследуем задачу для достаточно общего вида системы Франкля в гиперболическом случае методом дополнительного аргумента. Академик РАН М.И. Иманалиев и профессор С.Н. Алексеенко в работах [2] - [4] впервые предложили метод дополнительного аргумента. Метод дополнительного аргумента позволяет во многих случаях более эффективно через начальные данные определить условия разрешимости системы дифференциальных уравнений и интервал её разрешимости.

Рассмотрим систему Франкля в случае, когда при определенных предположениях она описывает движение идеального газа при сверхзвуковых скоростях. Коэффициенты системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка (1) принимают следующий вид:

$$P(v(x,y)) \geq p_0 > 0; Q(v(x,y)) \geq q_0 > 0.$$

Учитывая свойства физического процесса, мы преобразуем коэффициент системы уравнений Q. После преобразований мы получаем коэффициент уравнения в следующем виде:

$$Q(v(x,y)) = \frac{k_0}{v^2 \cdot P(v^2)},$$

где k_0 – константа.

В этом случае мы называем коэффициенты системы Франкля секвестрированными.

Для системы Франкля определим начальные условия:

$$u(x,0) = \varphi(x); v(x,0) = \psi(x); x \in (-\infty;\infty); \varphi(x), \psi(x) \in \overline{C}^2(R^1) \qquad (2)$$

Задача рассматривается в области:

$$\Omega_Y = \{(x,y) : x \in (-\infty,\infty); y \in [0,Y], Y > 0\}.$$

В статьях [5] - [15] авторами разработан принципиально новый подход исследования разрешимости системы Франкля методом дополнительного аргумента. В работах [5] - [8] были сформулированы условия локальной разрешимости системы Франкля, определен интервал разрешимости через начальные данные. При этом получили, что гладкость решений не ниже гладкости начальных условий. В системах интегральных уравнений было уменьшено количество суперпозиций неизвестных функций, что упростило исследование задачи.

Численные эксперименты проводились для модельных примеров и для частных случаев системы Франкля, когда она имела физическое или экологическое содержание [10] - [15]. В работах [10] - [11] построены примеры некоторых вариантов системы Франкля для гиперболического и эллиптического типов, в которых решение было найдено в явном аналитическом виде через W–функцию Ламберта.

В работе [9] с помощью метода дополнительного аргумента определены условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка в характеристической форме. Мы нашли глобальные оценки, которые гарантируют существование глобального классического решения, продолженного конечным числом шагов из локального решения. Однако для системы Франкля, с произвольно заданными начальными данными, условия существования глобального решения, установленные в работе [9], не выполняются.

В работах [14] - [15] мы доказываем глобальное существование автомодельного решения системы Франкля при условии согласовании начальных данных. Система Франкля имеет коэффициенты вида $P(u(x,y), v(x,y)), Q(u(x,y), v(x,y))$.

В настоящей работе мы нашли глобальное классическое решение системы Франкля с секвестрированными коэффициентами и при условии согласования начальных данных. Исследование задачи выполнено на основе метода дополнительного аргумента. Результаты сформулированы в виде теоремы.

Теорема.

Пусть функции $P(v(x,y)) \geq p_0 > 0, Q(v(x,y)) \geq q_0 > 0$ дважды непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам;

$\varphi(x), \psi(x) \in \overline{C}^2(R^1)$ - функции с условием согласования начальных данных:

$$\varphi(x) = k_0^{0.5} \ln(\psi(x)) + c, c - const,$$

$$(P(v(x,y)) + v(x,y)\partial_x P(v(x,y)))\psi'(\cdot) \leq 0.$$

Тогда для системы Франкля (1) с секвестрированными коэффициентами и начальными условиями (2), на любом заданном промежутке задача Коши имеет единственное ограниченное решение, определяемое по формулам:

$$u(x,y) = \varphi(x + y \cdot k_0^{-0.5} v(x,y) P(v(x,y))),$$
$$v(x,y) = \psi(x + y \cdot k_0^{-0.5} v(x,y) P(v(x,y))).$$

Замечание. Если неравенство $(P(v(x,y)) + v(x,y)\partial_x P(v(x,y)))\acute{\psi}(\cdot) > 0$ выполнено, то функция $v(x,y)$ обращается в бесконечность на конечном интервале.

Литература

1. Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973. 712 с.
2. Иманалиев М. И. Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными. Бишкек: Илим, 1992. 112 с.
3. Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н. К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема // Доклады АН СССР. 1992. Т. 323. № 3. С. 410-414.
4. Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н. К теории систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема // Доклады АН СССР. 1992. Т. 325. № 6. С. 1111-1115.
5. Алексеенко С. Н., Шемякина Т. А., Круц К. Г. Локальное существование ограниченного решения системы Франкля в гиперболическом случае // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Бишкек: Илим, 2006. Вып. 35. С. 142-147.
6. Алексеенко С. Н., Шемякина Т. А., Чезганов В. Г. Локальное существование ограниченного решения системы Франкля в эллиптическом случае // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Бишкек: Илим, 2006. Вып. 35. С. 148-152.
7. Шемякина Т. А. Условия существования и дифференцируемости решения системы Франкля в гиперболическом случае // Журнал Средневолжского математического общества. 2011. Т.13. № 2. С.127-131.
8. Шемякина Т. А. Теорема существования ограниченного решения задачи Коши для системы Франкля гиперболического типа // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2012. № 2 (146). С. 130-140.
9. Алексеенко С. Н., Шемякина Т. А., Донцова М. В. Условия нелокальной разрешимости систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2013. № 3 (177). С. 190-201.
10. Шемякина Т. А. Примеры решения задачи Коши для некоторых вариантов системы Франкля эллиптического типа // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2011. № 4 (134). С. 191-197.
11. Шемякина Т. А. Примеры решения задачи Коши для некоторых вариантов системы Франкля гиперболического типа // Материалы IX Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ' 2012). М.: МАИ-ПРИНТ, 2012. С. 525-528.
12. Kainov N. U., Tarkhov D. A., Shemyakina T. A. Application of neural network modeling to identification and prediction problems in ecology data analysis for metallurgy welding industry // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. vol. 17. № 1. 2014. P. 57-63.

13. Васильев А. Н., Тархов Д. А., Шемякина Т. А. Нейросетевой подход к задачам математической физики. СПб.: Нестор-История, 2015. 260 с.

14. Shemyakina T. and Alekseenkko S. Methods of construction and study of Frankl system self-similar solutions in the hyperbolic case // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 158 (2016) 012085 http://iopscience.iop.org/1757-899X/158/1/012085.

15. Shemyakina T. Global solutions of Frankl system with sequestered coefficients providing by filling of initial data International conference on mathematical modelling in applied sciences St. Petersburg. Russia (2017). Abstract Book. SPbPU Publication. №11 (131). P.239-140.

MSC 35L50, 35M11, 35Q35, 76B03

A study of the Frankl system with sequestered coefficients

T.A. Shemyakina[1]

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University[1]