УДК 517.9

Численный метод решения систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра I рода с разрывными ядрами

А.Н. Тында[1], Д.Н. Сидоров[2], И.Р. Муфтахов[3]

Пензенский государственный университет[1], Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН[2], Главный вычислительный центр ОАО «РЖД»[3]

1. Введение

Функциональные уравнения (дифференциальные, интегральные и интегро-дифференциальные уравнения) с различного рода отклоняющимися аргументами (задержками) являются универсальным средством моделирования динамических систем в ряде областей физики, техники, медицины, экономики и в других областях, см., например, [1], [2]. При этом основанные на них модели обеспечивают наиболее реалистичное отражение свойств наблюдаемых процессов, являясь зачастую единственным математическим аппаратом для их описания. Интегральными динамическими моделями с запаздываниями можно описывать большое многообразие процессов. Такие модели учитывают эффект памяти динамических систем, когда прошлые состояния системы воздействуют на развитие в будущем. Интегральные уравнения с отклоняющимися аргументами (задержками) являются удобным аппаратом моделирования динамических систем в ряде областей физики, техники, экономики и т.д.. Точные решения таких уравнений в большинстве нетривиальных случаев не могут быть найдены аналитически, поэтому актуальной является разработка эффективных численных методов их решения.

Одним из классов функциональных уравнений с задержками являются интегральные уравнения Вольтерра и их системы, ядра которых терпят конечные разрывы вдоль семейства гладких кривых. В цикле работ авторов [2] - [5] предлагается ряд численных методов решения линейных и нелинейных интегральных уравнений с переменными в пределах интегрирования, играющими роль временных задержек. В данной работе итерационный численный метод обобщается и распространяется на системы уравнений такого типа.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему нелинейных уравнений Вольтерра I рода [2], [4]

$$\begin{cases} \int\limits_0^t h_1(t,s,x_1(s),x_2(s),...,x_n(s))ds - f_1(t) = 0, \\ \int\limits_0^t h_2(t,s,x_1(s),x_2(s),...,x_n(s))ds - f_2(t) = 0, \\ \vdots \\ \int\limits_0^t h_n(t,s,x_1(s),x_2(s),...,x_n(s))ds - f_n(t) = 0. \end{cases}, \qquad (1)$$

где $t \in [0, T]$, а ядра $h_i(t, s, x_1(s), x_2(s), ..., x_n(s))$, терпящие конечные разрывы на линиях $\alpha_j(t)$, $j = \overline{1, n-1}$, имеют вид

$$h_i(t, s, x_1(s), x_2(s), ..., x_n(s)) = \begin{cases} K_{i1}(t, s)G_{i1}(s, x_1(s)), \ (t, s) \in m_1, \\ K_{i2}(t, s)G_{i2}(s, x_2(s)), \ (t, s) \in m_2, \\ \vdots \\ K_{in}(t, s)G_{in}(s, x_n(s)), \ (t, s) \in m_n. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $m_j = \{(t, s) | \ \alpha_{j-1}(t) < s \leq \alpha_j(t)\}$, $\alpha_0(t) = 0$, $\alpha_n(t) = t$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$. Функции $K_{ij}(t, s)$, $f_i(t)$ и $\alpha_j(t)$ имеют непрерывные производные относительно t при $(t, s) \in \overline{m}_j$, $K_{in}(t, t) \neq 0$, $0 < \alpha_1(t) < \alpha_2(t) < ... < \alpha_{n-1}(t) < t$. Функции $\alpha_1(t), ..., \alpha_{n-1}(t)$ являются неубывающими при $t \in [0, T]$. Вопрос существования и единственности решения такого класса нелинейных систем изучался в работе [4].

В данной работе предлагается итерационный метод решения такого рода систем, основанный на линеаризации интегрального вектор-оператора. Для решения возникающих в итерационном процессе систем линейных уравнений с разрывными ядрами используется обобщение алгоритма прямой дискретизации, предложенного в работах [3], [5]. Метод основан на кусочно-постоянной аппроксимации точных решений и имеет первый порядок точности.

Литература

1. Hritonenko N., Yatsenko Yu. Mathematical Modeling in Economics, Ecology, and the Environment. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 1999.

2. Sidorov D. Integral Dynamical Models: Singularities, Signals and Control. In: L.O. Chua, ed. "World Scientific Series on Nonlinear Sciences Series A". Singapore: World Scientific Press. 300 p.

3. Сидоров Д.Н., Тында А.Н., Муфтахов И.Р. Численное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода с кусочно-непрерывными ядрами // Вестник Южноуральского Государственного Университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». 2014. Т. 7, № 3. С. 107-115.

4. Muftahov I., Sidorov D. Solvability and numerical solutions of systems of nonlinear Volterra integral equations of the first kind with piecewise continuous kernels // Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2016. Vol. 9, 1. pp. 130-136.

5. Muftahov I., Tynda A., Sidorov D. Numeric solution of Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2017. Vol. 313, No. 15. pp. 119-128.

6. Kantorovich L.V., Akilov G.P. Functional Analysis. 2nd edition. Oxford : Pergamon Press. 1982. 604 p.

MSC 65R20

Numerical method for systems of nonlinear Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels

A.N. Tynda[1], D.N. Sidorov[2], I.R. Muftahov[3]

Penza State University[1], Energy Systems Institute Russian Academy of Sciences[2], Main Computing Center of Joint Stock Company «Russian Railways»[3]