УДК 517.9

Непрерывная модель загрузки данных

Д.В. Пашуткин [1]

ООО Центр разработки и исследований[1]

1. Введение

Рассмотрим одну из типичных задач, встречающихся в области информационных технологий. Пусть на удаленном компьютере выполняется приложение, работающее с локальной базой данных (далее - БД). Данные в локальной БД со временем устаревают и требуют регулярного обновления, что обеспечивается сеансами загрузки актуальных значений из централизованного источника. При этом объем передаваемых данных часто является значительным.

В качестве примера здесь может выступать кассовое программное обеспечение, установленное в магазинах, офисах продаж, торговых киосках и т.п. Требование высокой скорости обслуживания и бесперебойной работы независимо от работоспособности средств коммуникации приводит к необходимости использования локальных баз данных, размещенных непосредственно в точках обслуживания. Обновление информации выполняется путем загрузки данных из внешних систем. Технологически эта задача может решаться различными способами, но главным остается вопрос: будет ли приложение справляться с существующей интенсивностью потока получаемых данных и успевать обновлять данные в своей локальной базе?

Предположим, объемы данных для обмена велики настолько, что измеряющие их дискретные величины можно считать непрерывными. Такой процесс обмена моделируется при помощи обыкновенного дифференциального уравнения. На основе построенной модели можно сделать выводы о качественном поведении системы.

2. Построение модели

Как было отмечено в введении, величины, описывающие состояние обмена данными, считаются непрерывными. Тогда задача формализуется следующим образом. Обозначим $x(t)$ - объем данных в некоторых условных единицах, подлежащих загрузке в локальную БД, а скорость поступления новых данных из внешней системы $f(t)$, где t - время, $t \geq 0$. Будем далее считать f непрерывной функцией. Так как данные поступают только извне, $f(t) \geq 0$ при всех t.

На практике типичный алгоритм работы механизма загрузки работает следующим образом. Через заданные интервалы времени $a_0 > 0$ происходит опрос наличия новых данных для загрузки. Если новые данные обнаружены, то выполняются действия по инициализации системы обновления данных. Далее все имеющиеся на этот момент момент времени данные для загрузки в объеме $x(t)$ записываются в локальную БД. Затем выполняются технологические операции, завершающие обмен. Суммарное время выполнения операций по инициализации и деинициализации обмена обозначим a_1. Время записи одной единицы объема данных в локальную БД обозначим a_2. Эта величина, как и время инициализации и деинициализации цикла обмена, зависит от текущей загруженности компьютера, получающего данные, поэтому в общем случае a_2 и a_1 являются функциями времени. Будем считать их также непрерывными. Очевидно, что $a_0, a_1, a_2 > 0$.

На загрузку данных объёмом $x(t)$ будет затрачено время, равное $a_2(t)x(t) + a_1(t) + a_0$.

Тогда скорость загрузки этого блока данных равна:

$$\frac{x(t)}{a_2(t)x(t)+a_1(t)+a_0}.$$

И, с учетом потока поступающих новых данных, $x(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{x}{a_2(t)x+a_1(t)+a_0}+f(t). \tag{1}$$

Неограниченный рост решения уравнения означает, что при соответствующем режиме данные не успевают загружаться. Поэтому важнейшей задачей для уравнения (1) является поиск необходимых и достаточных условий ограниченности решений.

Часто можно предположить, что процессы ежедневно (или еженедельно) протекают по схожей схеме. В этом случае естественно считать функции a_1, a_0 и f периодическими, и тогда становится актуальной задача существования периодического решения, его устойчивости и притяжения.

В следующем разделе получено достаточное условие равномерной ограниченности решений, существования периодического решения уравнения (1) и его асимптотической устойчивости.

3. Качественный анализ решений

Контекст модели не предполагает малости $f(t)$ в уравнении (1), и решения заведомо сильно отклоняются от нуля, поэтому использование метода малых возмущений с линейным уравнением первого приближения здесь невозможно. Для исследования поведения решений воспользуемся методом, базирующимся на идеях работы [1], где в качестве уравнения первого приближения используется нелинейное уравнение.

Введем обозначения. Решения уравнения (1) с начальными данными x_0, t_0 будем обозначать $x(t:x_0,t_0)$. Банахово пространство непрерывных на промежутке $[a,b])$ функций с равномерной нормой обозначим $C([a,b])$.

Заметим, что интерес представляют только решения $x(t:t_0,x_0)$, где $x_0\geq 0$, причем если $x_0\geq 0$, то и $x(t:t_0,x_0)\geq 0$ при всех $t\geq t_0$.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие:*

$$\int_{t_0}^{t}\exp\left(-\int_s^t\frac{d\tau}{a_2(\tau)\alpha+a_1(\tau)+a_0}\right)f(s)ds\leq K\alpha$$

где $K<1$ при всех $t\geq t_0\geq 0$, $\alpha\geq\alpha_0\geq 0$. Тогда решения уравнения (1) равномерно ораничены, т.е. для любого $C_1>0$ существует $C_2>0$ такое, что если $x_0\leq C_1$, то $x(t:t_0,x_0)\leq C_2$ для всех $t\geq t_0\geq 0$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные $T>t_0\geq 0$. Рассмотрим оператор $L: C([t_0,T],\mathbb{R})\to C([t_0,T],\mathbb{R})$:

$$Lx(t)=\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{a_2(s)x(s)+a_1(s)+a_0}\right)x_0+$$
$$+\int_{t_0}^{t}\exp\left(-\int_s^t\frac{d\tau}{a_2(\tau)x(\tau)+a_1(\tau)+a_0}\right)f(s)ds$$

Оператор L отображает в себя выпуклое замкнутое ограниченное множество

$$F=\left\{x\,\middle|\,x\in C([t_0,T]),0\leq x(t)\leq\max\left\{\frac{x_0}{1-K},\alpha_0\right\}\right\},$$

вполне непрерывен и, по теореме Шаудера, имеет неподвижную точку в F.

Дифференцированием проверяется, что неподвижная точка L является решением уравнения (1) с начальными данными (t_0, x_0). В силу единственности решения задачи Коши для (1) она совпадает с $x(t : t_0, x_0)$ на промежутке $[t_0, T]$. Следовательно,

$$x(t : t_0, x_0) \leq \frac{x_0}{1-K} + \alpha_0,$$

и, в силу произвольного выбора T, эта оценка справедлива для всех $t \geq t_0$.

Доказательство завершено.

Пусть a_0, a_2, a_1 не зависят от t, а скорость получения данных имеет вид:

$$f(t) = \phi_0 + \phi(t),$$

где $\left|\int_0^t \phi(s)ds\right| < K_\phi < +\infty$ при всех $t \geq 0$, а $\phi_0 > 0$ - некоторая постоянная, играющая роль среднего значения. Тогда, если значение скорости записи данных выше среднего значения скорости потока поступающих данных: $1/a_2 > \phi_0$, то условия теоремы выполнены и решения уравнения (1) будут равномерно ограничены. Если же $1/a_2 < \phi_0$, то из оценки

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{a_2 x + a_1 + a_0} + f(t) > \frac{-1}{a_2} + \phi_0 + \phi(t),$$

вытекает неограниченность решений. Заметим, что в обоих случаях значения параметров a_1 и a_0 не оказывают влияния на качественное поведение решений.

Предположим теперь, что функции a_2, a_1, f — периодические, с периодом ω.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие:*

$$\int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\int_s^t \frac{d\tau}{a_2(\tau)\alpha + a_1(\tau) + a_0}\right) f(s)ds \leq K\alpha,$$

где $K < 1$ при всех $t \geq t_0 \geq 0$, $\alpha \geq \alpha_0 \geq 0$. Тогда уравнение (1) имеет ω-периодическое решение.

Доказательство. Обозначим C_ω банахово пространство непрерывных ω-периодических функций, определенных на $\mathbb{R}$ и значениями в $\mathbb{R}$ с равномерной нормой.

Рассмотрим оператор $L : C_\omega \to C_\omega$:

$$Lx(t) = \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\int_s^t \frac{d\tau}{a_2(\tau)x(\tau) + a_1(\tau) + a_0}\right) f(s)ds.$$

Оператор L вполне непрерывен и отображает в себя выпуклое замкнутое ограниченное множество:

$$F = \{x \,|x \in C_\omega, 0 \leq x(t) \leq \alpha_0\}.$$

По теореме Шаудера он имеет в F неподвижную точку. Дифференцированием проверяется, что она является решением уравнения (1).

Доказательство завершено.

Рассмотрим уравнение в вариациях для (1):

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{a_1(t) + a_0}{(a_2(t)x(t : t_0, x_0) + a_1(t) + a_0)^2} y.$$

Если для (1) выполнены условия теоремы 1, то в условиях теоремы 2 для α_0 существует C_2 такое, что если $x_0 \leq \alpha_0$, то $|x(t : t_0, x_0)| \leq C_2$ при всех $t \geq t_0 \geq 0$. Но тогда

$$\left|\frac{\partial x(t : t_0, x_0)}{\partial x_0}\right| \leq \exp\left(\int_0^t -\frac{a_1(s) + a_0}{(a_2(s)C_2 + a_1(s) + a_0)^2} ds\right). \qquad (2)$$

Так как правая часть (2) стремится к нулю при $t \to +\infty$, то периодическое решение, существование которого обеспечивают условия теоремы 2, будет асимптотически устойчивым.

4. Заключение

Получены достаточные условия равномерной ограниченности решений и существования периодического решения уравнения модели. Но этим не исчерпываются задачи качественного поведения решений, имеющие прикладное значение. Например, интерес представляет исследование влияния на поведение решений на бесконечном промежутке времени малых изменений (в том или ином смысле) функций a_0, a_1 и f.

Литература

1. Воскресенский Е. В. О периодических решениях возмущенных дифференциальных уравнений // Изв. вузов. 1991. № 1. С. 11-14.

MSC 34C60

Continuos model of data loading

D.V. Pashutkin [1]

Development and research centre Ltd.[1]