УДК 517.968

Об одной математической модели одновременного восстановления параметров источника магнитной аномалии в обратной задаче магниторазведки*

И.В. Бойков[1], В.А. Рязанцев[1]

Пензенский государственный университет[1]

Магниторазведка представляет собой совокупность методов исследования земных недр, а также поиска и изучения залежей полезных ископаемых [1]. Наряду с гравиразведкой, сейсморазведкой и электроразведкой, магниторазведка составляет основу современной промысловой геофизики. Магниторазведка базируется на поиске и интерпретации магнитных аномалий земной коры, обусловленных аномальным распределением намагничивания внутри неё и существенными различиями в магнитных свойствах горных пород.

Источники магнитного поля характеризуется вектором намагниченности $\boldsymbol{I}$, связанным с величиной напряжённости магнитного поля $\boldsymbol{H}$ формулой

$$\boldsymbol{I} = \chi \boldsymbol{H},$$

где χ обозначает магнитную восприимчивость. Поскольку величина магнитной восприимчивости определяется свойствами конкретного источника аномалии, то вычисление восприимчивости позволяет судить о свойствах исследуемых магнитных материалов.

Введём в трёхмерном пространстве декартову систему координат с осью Oz, направленной вниз. Известно [1], что внешнее по отношению к источнику магнитное поле описывается формулой

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \nabla \left\{ \iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{\chi(\boldsymbol{r}')} \boldsymbol{I}(\boldsymbol{r}') \nabla' \left[\frac{1}{|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|} \right] \right\} d\boldsymbol{r}', \tag{1}$$

где Ω — объём, занимаемый источником аномалии, $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ и $\boldsymbol{r}' = (\xi, \eta, \zeta)$ — радиус-векторы точек (x, y, z) и (ξ, η, ζ), ∇ и ∇' — операторы Гамильтона. Здесь предполагается, что магнитная восприимчивость тела отлична от нуля.

Обозначим $\boldsymbol{I} = (I_x, I_y, I_z)$, $\boldsymbol{H} = (H_x, H_y, H_z)$. Тогда (1) можно переписать в следующей координатной форме:

$$\begin{gathered} H_x(x,y,z) = \iiint\limits_{\Omega} \left[\frac{3I_x(\xi,\eta,\zeta)(\xi-x)^2}{\left((\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right)^{5/2}} + \right. \\ + \frac{3I_y(\xi,\eta,\zeta)(\xi-x)(\eta-y)}{\left((\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right)^{5/2}} + \frac{3I_z(\xi,\eta,\zeta)(\xi-x)(\zeta-z)}{\left((\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right)^{5/2}} - \\ \left. - \frac{I_x(\xi,\eta,\zeta)}{\left((\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right)^{3/2}} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \right] \end{gathered} \tag{2}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ. Грант 16-01-00594.

$$\begin{gathered}
H_y(x,y,z) = \iiint\limits_{\Omega} \left[\frac{3I_x(\xi,\eta,\zeta)(\xi-x)(\eta-y)}{\left((\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right)^{5/2}} + \right. \\
+ \frac{3I_y(\xi,\eta,\zeta)(\eta-y)^2}{\left((\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right)^{5/2}} + \frac{3I_z(\xi,\eta,\zeta)(\eta-y)(\zeta-z)}{\left((\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right)^{5/2}} - \\
\left. - \frac{I_y(\xi,\eta,\zeta)}{\left((\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right)^{3/2}}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \right].
\end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered}
H_z(x,y,z) = \iiint\limits_{\Omega} \left[\frac{3I_x(\xi,\eta,\zeta)(\xi-x)(\zeta-z)}{\left((\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right)^{5/2}} + \right. \\
+ \frac{3I_y(\xi,\eta,\zeta)(\eta-y)(\zeta-z)}{\left((\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right)^{5/2}} + \frac{3I_z(\xi,\eta,\zeta)(\zeta-z)^2}{\left((\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right)^{5/2}} - \\
\left. - \frac{I_z(\xi,\eta,\zeta)}{\left((\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right)^{3/2}} \right] d\xi\, d\eta\, d\zeta.
\end{gathered} \tag{4}$$

Пусть тело, создающее аномалию магнитного поля, залегает на глубине $z = T$ ниже поверхности Земли и расположено между поверхностями $z = T - \varphi(\xi,\eta)$ и $z = T$, где неизвестная функция $\varphi(\xi,\eta)$ при всех ξ, η удовлетворяют условию $\max\limits_{(\xi,\eta)\in S} \varphi(\xi,\eta) < T$. Предположим дополнительно, что вектор намагниченности не зависит от переменной ζ, так что $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}(\xi,\eta)$. Тогда проинтегрировав (4) по переменной ζ в пределах от $T - \varphi(\xi,\eta)$ до T, получаем:

$$\begin{gathered}
H_z(x,y,z) = \\
= \iint\limits_{S} \frac{1}{\chi(\xi,\eta)} \left(\frac{I_x(\xi,\eta)(x-\eta) + I_y(\xi,\eta)(y-\eta) + I_z(\xi,\eta)(z-\zeta)}{\left((\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right)^{3/2}} \right)\Bigg|_{T-\varphi(\xi,\eta)}^{T} d\xi\, d\eta + \\
+ 2 \iint\limits_{S} \frac{1}{\chi(\xi,\eta)} \left(I_z(\xi,\eta) \frac{\frac{z-\zeta}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}{\left((\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right)^{1/2}} \right)\Bigg|_{T-\varphi(\xi,\eta)}^{T} d\xi\, d\eta.
\end{gathered} \tag{5}$$

Рассуждая аналогичным образом для $H_x(x,y,z)$, $H_y(x,y,z)$, получим:

$$\begin{gathered}
H_x(x,y,z) = \iint\limits_{S} {}_{\xi}I(\xi,\eta) \frac{1}{\chi(\xi,\eta)} \left(\frac{2\frac{z-\zeta}{\left((\xi-x)^2+(\eta-y)^2\right)^2}}{\left((\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right)^{1/2}} + \right. \\
\left. + \frac{\frac{z-\zeta}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}{\left((\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right)^{3/2}} \right)\Bigg|_{T-\varphi(\xi,\eta)}^{T} d\xi\, d\eta + \\
+ \iint\limits_{S} \frac{1}{\chi(\xi,\eta)} \left(\frac{I_z(\xi,\eta)(x-\xi)}{\left((\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right)^{3/2}} \right)\Bigg|_{T-\varphi(\xi,\eta)}^{T} d\xi\, d\eta + \\
+ \iint\limits_{S} \frac{1}{\chi(\xi,\eta)} \left(I_x(\xi,\eta) \frac{\frac{z-\zeta}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}{\left((\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right)^{1/2}} \right)\Bigg|_{T-\varphi(\xi,\eta)}^{T} d\xi\, d\eta,
\end{gathered} \tag{6}$$

$$H_y(x,y,z) = \iint\limits_S {}_\eta I(\xi,\eta)\frac{1}{\chi(\xi,\eta)}\left(\frac{2\frac{z-\zeta}{\left((\xi-x)^2+(\eta-y)^2\right)^2}}{\left((\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right)^{1/2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{z-\zeta}{\left((\xi-x)^2+(\eta-y)^2\right)^2}}{\left((\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right)^{3/2}}\right)\Bigg|_{T-\varphi(\xi,\eta)}^{T} d\xi\, d\eta +$$

$$+ \iint\limits_S \frac{1}{\chi(\xi,\eta)}\left(\frac{I_z(\xi.\eta)(y-\eta)}{\left((\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right)^{3/2}}\right)\Bigg|_{T-\varphi(\xi,\eta)}^{T} d\xi\, d\eta +$$

$$+ \iint\limits_S \frac{1}{\chi(\xi,\eta)}\left(I_y(\xi,\eta)\frac{\frac{z-\zeta}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2)^2}}{\left((\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right)^{1/2}}\right)\Bigg|_{T-\varphi(\xi,\eta)}^{T} d\xi\, d\eta. \quad (7)$$

где

$${}_\xi I = \left[I_x(\xi,\eta)(\xi-x)^2 + I_y(\xi,\eta)(\xi-x)(\eta-y)\right],$$

$${}_\eta I = \left[I_x(\xi,\eta)(\xi-x)(\eta-y) + I_y(\xi,\eta)(\eta-y)^2\right].$$

Уравнения (5)-(7) является основой для построения математических моделей, описывающих одновременное восстановление параметров источника магнитной аномалии.

Для восстановления магнитного поля необходимо определить его пять характеристик: T, $z(\xi,\eta)$, $\boldsymbol{I} = \left(I_x, I_y, I_z\right)$.

Поэтому, наряду с данными $H_z(x,y)$, $H_x(x,y)$, $H_y(x,y)$ необходимо располагать данными о магнитном поле на некоторой поверхности $z = -H$.

В работе исследуются аналитические и численные методы решения системы уравнений (5)-(7) при различных условиях.

Рассматриваются модификации системы уравнений (5)-(7).

Рассматриваются модели, объединяющие уравнения ньютоновского потенциала и уравнения магниторазведки.

Приведены модельные примеры, иллюстрирующие эффективность предложенных алгоритмов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ. Грант 16-01-005594.

Литература

1. Бойков И. В., Бойкова А. И. Приближённые методы решения прямых и обратных задач гравиразведки. Пенза: изд-во Пенз. гос. ун-та, 2013. 515 с.

2. Жданов М. С. Теория обратных задач и регуляризации в геофизике. М.: Научный мир, 2007. 712 с.

3. Бойков И. В., Рязанцев В. А. Приближённые методы одновременного восстановления формы тела и его плотности в обратной задаче теории потенциала // Журнал Средневолжского математического общества. 2014. Т. 16, № 3. С. 21-31.

4. Бойков И. В., Рязанцев В. А. Численный метод решения двухмерной обратной задачи гравиразведки в конечных областях // Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем: сб. ст. IX Междунар. науч.-тех. конф. Пенза, 2014. С. 65-71.

MSC 45Q05

On the mathematical model of simultaneous recovery of parameters of the magnetic anomaly source in the magnetic inversion problem

I.V. Boikov[1], V.A. Ryazantsev[1]
Penza State University [1]