УДК 539.3:517.95

Об устойчивости колебаний трубопровода

П.А. Вельмисов [1], И.А. Дегтярев [1], О.С. Язовцева [2]

Ульяновский государственный технический университет[1], Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва[2]

Аннотация: В статье рассматриваются задачи аэрогидроупругости о колебаниях трубопровода, возникающих при протекании через него жидкости. Получены условия устойчивости на основе функционала типа Ляпунова. Предлагаются методы исследования динамики и устойчивости в случае запаздывания по времени реакции и демпфирования внешних воздействий

Ключевые слова: трубопровод, динамика, колебания устойчивость, аэрогидроупругость, дифференциальные уравнения с частными производными.

Рассматривается задача аэрогидроупругости о колебаниях, возникающих при протекании жидкости через трубопровод. Ранее задачи о динамике и устойчивости трубопровода рассматривались в работах [1] - [15]

Пусть на плоскости xOy трубопроводу соответствует на оси Ox отрезок $[0,l]$. Скорость жидкости равна U и имеет направление, совпадающее с направлением оси Ox.

Исследование устойчивости на основе функционалов Ляпунова. В линейном приближении колебания вязкоупругого стержня, связанного с упругим основанием, описываются модельным уравнением для прогиба $w(x,t)$

$$Dw'''' + (m_0 + m_*)\ddot{w} + \left(N + m_* U^2\right) w'' + 2Um_*\dot{w}' + \xi\dot{w} + \theta w + \psi\dot{w}'''' - \varphi\ddot{w}'' = 0 \qquad (1)$$

Коэффициенты m_0, m_*,D вычисляются по формулам:

$$m_0 = \rho_0\pi\left(R_*^2 - R_0^2\right), m_* = \rho_*\pi R_0^2, D = \frac{\pi E}{4}\left(R_*^4 - R_0^4\right), R_* = R_0 + h_0$$

Здесь $w(x,t)$ – деформация (прогиб) в сечении x в момент времени t; D –изгибная жесткость трубы; E – модуль упругости, U,m_*,ρ_* – скорость, масса жидкости (газа) на единицу длины и плотность жидкости (газа); l – длина трубы между шарнирными опорами; R_*, R_0, h_0 – внешний и внутренний радиусы трубопровода и толщина, θ – коэффициент жесткости основания; m_0,ρ_0 – масса металла на единицу длины трубы и его плотность; N – сжимающая (растягивающая) сила; ξ, ψ – коэффициенты внешнего и внутреннего демпфирования соответственно; коэффициент φ учитывает инерцию вращения сечений. Все коэффициенты, входящие в уравнение, постоянные, точка сверху обозначает производную по времени t, а штрих – производную по координате x.

Введем в рассмотрение функционал:

$$J(t) = \frac{1}{2}\int_0^l [D(w'')^2 + (m_0 + m_*)\dot{w}^2 - \left(N + m_* U^2\right)\left(w'\right)^2 + \varphi(\dot{w}')^2 + \theta w^2]dx$$

Найдем производную $\dfrac{dJ}{dt}$

$$\frac{dJ}{dt} = -\int_0^l [D(\dot{w}w'''' - \dot{w}'w'') + (N + m_* U^2)\dot{w}w' + Um_*\dot{w}^2 +$$
$$+\psi(\dot{w}w'''' - \dot{w}'\dot{w}'') - \varphi\dot{w}\ddot{w}']dx - \xi\dot{w}^2 - \psi(\dot{w}'')^2$$

Рассмотрим некоторые виды закрепления концов трубопровода:

- шарнирное закрепление концов трубопровода

$$w(0,t) = w(l,t) = 0, w''(0,t) = w''(l,t) = 0$$

- жесткое закрепление концов трубопровода

$$w(0,t) = w(l,t) = 0, w'(0,t) = w'(l,t) = 0$$

- один конец (любой) закреплен шарнирно, другой – жестко.

Для указанных типов закреплений

$$\frac{dJ}{dt} = -\xi \dot{w}^2 - \psi(\dot{w}'')^2 < 0$$

Тогда $J(t) < J(0)$, то есть

$$\begin{gathered} \int_0^l [D(w'')^2 + (m_0 + m_*)\,\dot{w}^2 - \left(N + m_* U^2\right)\left(w'\right)^2 + \varphi(\dot{w}')^2 + \theta w^2]_{t=t} dx \leq \\ \leq \int_0^l [D(w'')^2 + (m_0 + m_*)\,\dot{w}^2 - \left(N + m_* U^2\right)\left(w'\right)^2 + \varphi(\dot{w}')^2 + \theta w^2]_{t=0} dx \end{gathered} \tag{2}$$

Имеет место неравенство Релея

$$\int_0^l (w'')^2 dx \geq \lambda_1 \int_0^l (w')^2 dx$$

где λ_1 – наименьшее собственное значение соответствующей краевой задачи для уравнения $\psi'''' - \lambda\psi = 0$ Например, для закрепления концов типа «шарнир-шарнир» краевая задача имеет вид

$$\psi'''' - \lambda\psi = 0, \psi(0) = \psi(l) = 0, \psi''(0) = \psi''(l) = 0$$

Общее решение дифференциального уравнения определяется выражением $\psi(x) = c_1 e^{\nu x} + c_2 e^{-\nu x} + c_3 sin\nu x + c_4 cos\nu x, \lambda = \nu^4$. Удовлетворяя граничным условиям, получим $c_1 = c_2 = c_4 = 0, \psi(x) = c_3 sin\nu_n x, \nu_n = \dfrac{n\pi}{l}$,где $\lambda_n = \nu_n^4$ – собственные значения, а $sin\nu_n x$ – собственные функции, при этом $\min\limits_n(\lambda_n) = \lambda_1 = \left(\dfrac{\pi}{l}\right)^4$.

С учетом неравенства Релея согласно (2) получаем:

$$\begin{gathered} \int_0^l [(D\lambda_1 - N - m_* U^2)(w')^2 + (m_0 + m_*)\dot{w}^2 + \varphi(\dot{w}')^2 + \theta w^2]_{t=t} dx \leq \\ \leq \int_0^l [D(w'')^2 + (m_0 + m_*)\dot{w}^2 - (N + m_* U^2)(w')^2 + \varphi(\dot{w}')^2 + \theta w^2]_{t=0} dx \end{gathered} \tag{3}$$

Из последнего неравенства следует теорема.

Теорема. Если $N < D\lambda_1 - m_* U^2$, то малым значениям начальных данных $w(x,0)$, $\dot{w}(x,0)$, $w'(x,0)$, $w''(x,0)$, $\dot{w}'(x,0)$ (прогиба, скорости, угла поворота, кривизны, угловой скорости) будут соответствовать малые (в среднем, в интегральном смысле) $w(x,t)$, $\dot{w}(x,t)$, $w'(x,t)$, $\dot{w}'(x,t)$ в любой момент времени $t > 0$.

Замечание. Имеет место неравенство, являющееся следствием неравенства Коши-Буняковского:

$$w^2(x,t) \leq l \int_0^l w'^2(x,t) dx$$

Тогда согласно (3) получим

$$\frac{1}{l}(D\lambda_1 - N - m_* U^2) w^2(x,t) + \int_0^l [(m_0 + m*)\dot{w}^2 + \varphi(\dot{w}')^2 + \theta w^2]_{t=t} dx \leq$$
$$\leq \int_0^l [D(w'')^2 + (m_0 + m_*)\dot{w}^2 - (N + m_* U^2)(w')^2 + \varphi(\dot{w}')^2 + \theta w^2]_{t=0} dx$$

Из этого неравенства следует равномерная устойчивость для $w(x,t)$ для $\forall x \in [0,l]$. А именно малым значениям начальных данных $w(x,0)$, $\dot{w}(x,0)$, $w'(x,0)$, $w''(x,0)$, $\dot{w}'(x,0)$ будут соответствовать малые значения $w(x,t)$ для $\forall x \in [0,l]$.

Аналогичным образом исследовалась устойчивость колебаний трубопровода на основе нелинейной модели, которая описывается уравнением

$$(m_0 + m_*)\ddot{w} + \xi\dot{w} + \psi\dot{w}'''' + 2Um_*\dot{w}' + Dw'''' + Nw'' + \theta w + m_* U^2 w'' -$$
$$-\frac{1}{2}w''\left[k\int_0^l (w')^2 dx - \alpha\left(\int_0^l (w')^2 dx\right)^{\bullet}\right] = 0 \tag{4}$$

О методах исследования динамики и устойчивости с учетом запаздывания. Рассмотрим уравнение колебаний трубопровода вида

$$Dw'''' + (m_0 + m_*)\ddot{w} + (N + m_* U^2)w'' + 2Um_*\dot{w}' + \psi\dot{w}'''' - \phi\ddot{w}'' +$$
$$+ m_* a w' + \sum_{k=1}^{n} \theta_k \dot{w}(x, t - \tau_k) + \sum_{k=1}^{m} \xi_k w(x, t - \beta_k) = 0 \tag{5}$$

Здесь a – ускорение жидкости в трубопроводе

Решение уравнения (5) при $a = 0$ и постоянных N, U можно искать в виде $w(x,t) = g(x)e^{\omega x}$, тогда для $g(x)$ получим однородное дифференциальное уравнение

$$(D + \psi\omega)g'''' + (N + m_* U^2 - \varphi\omega^2)g'' + 2Um_*\omega g' +$$
$$+\left[(m_0 + m_*)\omega^2 + \omega\sum_{k=1}^{n}\theta_k e^{-\omega\tau_k} + \sum_{k=1}^{m}\xi_k e^{-\omega\beta_k}\right] g = 0 \tag{6}$$

Добавляя граничные условия для функции $g(x)$, получим задачу на собственные значения. Например, при шарнирном закреплении левого конца $x = 0$ и жестко защемленном правом конце $x = l$ условия имеют вид

$$g(0) = g''(0) = 0, \quad g(l) = g'(l) = 0 \tag{7}$$

Один из способов решения задачи может состоять в отыскании решения уравнения (6) в виде $g(x) = e^{\lambda x}$, для λ получим алгебраическое уравнение четвертого порядка. Восстановив по найденным значениям λ фундаментальную систему решений $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$, $g_4(x)$, общее решение уравнения (6) запишем в виде

$$g(x) = \sum_{k=1}^{4} c_k g_k(x) \tag{8}$$

Удовлетворяя четырем однородным граничным условиям, получим систему уравнений для произвольных постоянных c_1, c_2, c_3, c_4. При этом в процессе решения должны определиться возможные собственные значения ω (из условия равенства нулю определителя однородной СЛАУ для c_1, c_2, c_3, c_4). По знаку действительных частей ω делается вывод об устойчивости или неустойчивости колебаний.

Другой способ основан на методе Галеркина. В этом случае решение краевых задач для уравнения (6), например, краевой задачи (6),(7), отыскивается в виде

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x) \tag{9}$$

где $\{f_k(x)\}_l^{\infty}$ – полная на отрезке $[0, l]$ система базисных функций, удовлетворяющая граничным условиям, например (7).

Третий способ состоит в применении метода Галеркина непосредственно к уравнению (5)

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{n} w_k(t) f_k(x) \tag{10}$$

Тогда для $w_k(t)$ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями аргумента t, решение которой можно находить аналитическими или численными методами. В этом случае N, U, a могут быть функциями времени t

Таким образом, рассмотрена задача аэрогидроупругости о колебаниях, возникающих при протекании жидкости в трубопроводе. Приведены возможные типы граничных условий в зависимости от типа закрепления концов трубопровода. На основе функционала типа Ляпунова проведен анализ устойчивости решений дифференциального уравнения, описывающего колебания, сформулирована теорема об устойчивости и получены аналитические условия устойчивости для параметров механической системы. Обсуждаются методы исследования динамики и устойчивости в случае запаздывания реакции и демпфирования внешних воздействий.

Литература

1. Анкилов, А. В. О динамической устойчивости трубопровода / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов // Математические методы и модели в науке, технике, естествознании и экономике: Труды международной «Конференции по логике, информатике, науковедению – КЛИН-2007» (Ульяновск, 17-18 мая 2007 г.). – Ульяновск : УлГТУ, 2007. – Т. 4. – С. 10–14.

2. Болотин, В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / В. В. Болотин. – М. : Физматгиз, 1961. – 35 с.

3. Вельмисов, П. А. Исследование устойчивости трубопровода / П. А. Вельмисов, Б. В. Логинов, С. Д. Милушева // Приложение на математиката в техниката: Сб. доклади и научни съобщения. XXI национальная школа. – Болгария, Варна, 1995. – С. 299–304.

4. Вельмисов, П. А. Исследование динамики трубопровода с учетом запаздывания внешних воздействий / П. А. Вельмисов, Ю. В. Покладова // Вестник Ульяновского государственного технического университета. – Ульяновск : УлГТУ. – 2004. – № 4. – С. 26–29.

5. Вельмисов, П. А. Математическое моделирование динамики упругих элементов при аэрогидродинамическом воздействии / П. А. Вельмисов, А. А. Васильева, Е. П. Семенова // Труды 7 Международной конференции «Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов (2-5 февраля 2009 г., Ульяновск)». –Ульяновск : УлГУ, 2009. –С. 68–70.

6. Вельмисов, П. А. О некоторых математических моделях механической системы «трубопровод - датчик давления» / П. А. Вельмисов, Ю. В. Покладова // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки. – 2011. – №1(29). – С.137–110.

7. Математическое моделирование механической системы «трубопровод-датчик давления» / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, В. Д. Горбоконенко, Ю. В. Покладова. – Ульяновск : УлГТУ, 2008. – 188 с.

8. Мовчан, А. А. Об одной задаче устойчивости трубы при протекании через нее жидкости / А. А. Мовчан // Прикладная математика и механика. – 1965. – Вып.4. –С.760–762.

9. Светлицкий, В. А. Механика трубопроводов и шлангов: Задачи взаимодействия стержней с потоком жидкости или воздуха / В. А. Светлицкий. – М. : Машиностроение, 1982. – 280 с.

10. Томпсон Дж. М. Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике: Пер. с англ. / Дж. М. Т. Томпсон. – М.: Мир, 1985. – 254 с.

11. Феодосьев, В. И. О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости / В. И. Феодосьев // Инж. сб., Изд-во АН СССР. 1951, Т.10. – С.169-170.

12. Челомей, С. В. О динамике устойчивости упругих систем / С. В. Челомей // Докл. АН СССР, 1980. – Т. 252, №2. – С. 307–310.

13. Paidoussis, M. P. Dymanic stability of piped conveying fluid / M. P. Paidoussis, N. T. Issid // J.Sound and Vibr., 1974., v.33. №3. – pp. 267–294.

14. Velmisov, P. A. Investigation of the asymptotic stability of a pipeline in the presence of delay in time / P. A. Vel'misov, L. V. Garnefska, S. D. Milusheva // Rev. Mat. Estat., São Paulo, 19: 2001. – pp.159–178.

15. Вельмисов, П. А. Математическое моделирование в задачах динамики виброударных и аэроупругих систем / П. А. Вельмисов, В. К. Манжосов. – Ульяновск: УлГТУ, 2014. – 204с.

MSC 35Q74 74H55

On the stability of pipeline oscillations

P.A. Velmisov [1], I.A. Degtyarev [1], O.S. Yazovtseva [2]

Ulyanovsk state technical university [1], National Research Ogarev Mordovia State University [2]

Abstract: The paper deals with the problems of aerohydroelasticity about the oscillations of a pipeline that arise when a liquid flows through it. The stability conditions are obtained on the basis of a Lyapunov-type functional. Proposed methods for studying dynamics and stability in the case of delay in response time and damping of external influences

Keywords: pipeline, dynamics, stability fluctuations, aerohydroelasticity, differential equations using derivatives.

References

1. Ankilov, A.V. O dinamicheskoi ustoichivosti truboprovoda [About dynamic stability of pipeline] / A. V. Ankilov, P. A. Velmisov//Matematicheskie metodi i modeli v nauke, tehnike, estestvoznanii i ekonomike: Trudi mezhdunarodnoi "Konferencii po logike, informatike, naukovedeniu – KLIN-2007" (Ulyanovsk, maya 17-18, 2007) [Mathematical methods and models in science, technics, natural science and economics: Proceedings of the International Conference on Logic, Informatics, and Science – CLIS-2007 (Ulyanovsk, may 17-18, 2007)] – Ulyanovsk: UlSTU, 2007. – V. 4. – P. 10–14.

2. Bolotin, V. V. Nekonservativnie zadachi teorii uprugoi ustoichivosti [Non-conservative problems of the theory of elastic stability]/ V. V. Bolotin. – Moscow. : Fizmatgiz, 1961. – 35 p.

3. Velmisov, P. A. Issledovanie ustoichivosti truboprovoda [Investigation of pipeline stability] / P. A. Velmisov, B. V. Loginov, S. D. Milusheva // Prilozhenie na matematikata v tehnikata: Sb. Dokladi I nauchni syobsheniya. XXI nacionalnaya shkola. [Application of mathematics in the technique:] Приложение на математиката в техниката: Serb. Report and study of the message. XXI National School.] – Bulgaria, Varna, 1995. – P. 299–304.

4. Velmisov, P. A. Issledovanie dinamiki truboprovoda s uchetom zapazdivania vneshnih vozdeistvi [Investigation of the dynamics of pipelines taking into account the delay of external influences] / P. A. Velmisov, U. V. Pokladova// Vestnik Ulyanovskogo tehnicheskogo universiteta [Journal of Ulyanovsk State Technical University.] – Ulyanovsk: UlSTU. – 2004. – No. 4. – P. 26–29.

5. Velmisov, P. A. Matematicheskoe modelirovanie dinamiki uprugih elementov pri aerogidrodinamicheskom vozdeistvii [Mathematical modeling of elastic elements dynamics under aerohydrodynamic impact] / P. A. Velmisov, A. A. Vasileva, E. P. Semenova // Trudi 7 Mezhdunarodnoi konferencii "Matematicheskoe modelirovanie fizicheskih, economicheskih, tehnicheskih, socialnih system i processov (2-5 fevralya 2009 г., Ulyanovsk)». [Proceedings of the 7th International Conference "Mathematical Modeling of Physical, Economic, Technical, Social Systems and Processes (Ulyanovsk, February 2-5 2009)"] – Ulyanovsk: UlSU, 2009. –P. 68–70.

6. Velmisov, P. A. O nekotorih matematicheskih modelyah mexanicheskoi sistemi "truboprovod – datchik-davleniya" [About some mathematical models of the mechanical

system "pipeline-pressure sensor"]/ P. A. Velmisov, U. V. Pokladova // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta. Seriya: Tehnicheskie nauki. [Journal of the Samara State Technical University. Section: Engineering. – 2011. – No.1(29). – P.137–110.

7. Matematicheskoe modelirovanie mehanicheskoi sistemi "truboprovod – datchik davleniya" Mathematical modeling of the mechanical system "pipeline-pressure sensor"/ A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, V. D. Gorbokonenko, U. V. Pokladova. – Ulyanovsk : UlSTU, 2008. – 188 p.

8. Movchan, A. A. Ob odnoi zadache ustoichivosti trubi pri protekanii cherez nee jidkosti [On a problem of the stability of a tube when a liquid flows through it] / A. A. Movchan // Prikladnaya matematika i mehanika [Applied Mathematics and Mechanics]. – 1965. – Vol.4. –P.760–762.

9. Svetlicky, V. A. Mehanica truboprovodov i shlangov. Zadachi vzaimodeistviya sterzhney s potokom jidkosti ili vozduha. [Mechanics of pipelines and hoses: Problems of interaction of rods with a flow of liquid or air] / V. A. Svetlicky. – Moscow. Mashinostroenie, 1982. – 280 p.

10. THOMPSON J. M. T. Neustoichivosti i katastrofi v nauke i tehnike: Per. s angl. [Instabilities and Catastrophes in Science and Engineering: eng. trans.]: / J. M. T. THOMPSON. – Moscow.: Mir, 1985. – 254 p.

11. Feodosev, V. I. O kolebaniyah i ustoichivosti trubi pri protekanii cherez neyo jidkosti [On the oscillations and stability of a tube when a liquid flows through it] / V. I. Feodosev // Ing. sb., Published by SA USSR. 1951, V.10. – P.169-170.

12. Chelomey, S. V. O dinamice ustoichivosti uprugih system [On the Dynamics of the Stability of Elastic Systems] / S. V. Chelomey // Abst. SA USSR, 1980. – V. 252, No.2. – P. 307–310.

13. Paidoussis, M. P. Dymanic stability of piped conveying fluid / M. P. Paidoussis, N. T. Issid // J.Sound and Vibr., 1974., v.33. №3. – pp. 267–294.

14. Velmisov, P. A. Investigation of the asymptotic stability of a pipeline in the presence of delay in time / P. A. Vel'misov, L. V. Garnefska, S. D. Milusheva // Rev. Mat. Estat., São Paulo, 19: 2001. – pp. 159–178.

15. Velmisov, P. A. Matematicheskoe modelirovanie v zadachah dinamiki vibroudarnih system [Mathematical modeling in the problems of the dynamics of vibro-impact and aeroelastic systems] / P. A. Velmisov, V. K. Manjosov. – Ulyanovsk: UlSTU, 2014. – 204 p.