

УДК 517.938.5

## Реализация оснащённого двудольного графа Омега-устойчивым потоком на поверхности\*

В.Е. Круглов<sup>1,2</sup>, О.В. Починка<sup>1</sup>

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»<sup>1</sup>,  
Национальный исследовательский университет «Нижегородский государственный  
университет им. Н. И. Лобачевского»<sup>2</sup>

*Аннотация:* Разного рода графы (направленные, многоцветные, двудольные и др.) неоднократно использовались для описания и реализации систем с регулярной динамикой на поверхностях. Например потоки Морса-Смейла полностью описываются направленным графом, оснащённым системой подграфов. Кроме того, их динамика допускает описание трехцветными графами. Четырехцветными графами можно описать динамику некоторых негрубых векторных полей, а направленный двудольный граф, оснащённый дополнительной информацией, является полным топологическим инвариантом для  $\Omega$ -устойчивых потоков. В настоящей работе для каждого ориентированного оснащённого двудольного графа строится стандартный  $\Omega$ -устойчивый поток на замкнутой поверхности.

*Ключевые слова:* реализация,  $\Omega$ -устойчивый поток, оснащённый граф

### 1. Введение

Разного рода графы (направленные, многоцветные, двудольные и др.) неоднократно использовались для описания и реализации систем с регулярной динамикой на поверхностях. Такой подход восходит к пионерским работам А.А. Андропова и Л.С. Понтрягина [1] 1937 года и Е.А. Леонтович-Андроновой и А.Г. Майера [2], [3]. В 1971 в работе [4] М. Пейшото обобщил схему Леонтович-Майера для структурно устойчивых потоков на произвольных поверхностях и получил топологическую классификацию таких потоков, введя комбинаторный инвариант – *направленный граф*. В 1998 году А.А. Ошемков и В.В. Шарко [5] ввели новый инвариант для потоков Морса на поверхностях – *трёхцветный граф*. В той же работе они получили полную топологическую классификацию потоков Морса-Смейла на поверхностях в терминах атомов и молекул, введённых в работе А.Т. Фоменко [6]. В.Е. Круглов, Д.С. Малышев, О.В. Починка [7] доказали, что динамика  $\Omega$ -устойчивых потоков без периодических траекторий на поверхностях описывается на языке *четырёхцветных графов* и привели эффективный алгоритм различения таких графов. Во всех упомянутых работах решалась проблема реализации, то есть описывалось множество допустимых графов и по каждому такому графу восстанавливалась динамическая система.

В настоящей работе мы рассматриваем оснащённые двудольные графы и для каждого такого графа строим стандартный  $\Omega$ -устойчивый поток на замкнутой поверхности.

\*Результаты были получены в рамках проекта ЦФИ в 2017 году, при поддержке РНФ (проект № 17-11-01041). Авторы благодарны участникам семинара "Топологические методы в динамике" за плодотворные обсуждения.

## 2. Необходимые сведения и формулировка результатов

### 2.1. Допустимый четырёхцветный мультиграф

Напомним, что конечным *графом*  $\Gamma$  называется упорядоченная пара  $(B, E)$ , из которых  $B$  – множество *вершин*, а  $E$  – множество пар вершин, называемых *рёбрами*. При этом говорят, что ребро  $(a, b)$  *соединяет* вершины  $a$  и  $b$ , а вершины  $a$  и  $b$  называют *инцидентными* ребру  $(a, b)$ .

В случае если каждое ребро представляет собой ориентированную пару вершин, граф называется *направленным*. В случае если  $B$  – мультимножество, т.е. обобщение понятия множества, допускающее включение одного и того же элемента по нескольку раз,  $\Gamma$  называется *мультиграфом*. В случае, если множество  $B$  можно разбить на два подмножества таким образом, что не существует ребра, соединяющего вершины из одного и того же подмножества, граф  $\Gamma$  называется *двудольным* графом.

*Путём* в графе называют конечную последовательность его вершин и рёбер вида

$$b_0, (b_0, b_1), b_1, \dots, b_{i-1}, (b_{i-1}, b_i), b_i, \dots, b_{k-1}, (b_{k-1}, b_k), b_k, \quad k \geq 1.$$

Число  $k$  называется *длиной пути*, оно равно числу входящих в путь рёбер.

Граф называют *связным*, если любые две его вершины можно соединить путём.

*Циклом* длины  $k \in \mathbb{N}$  в графе называют конечное подмножество его вершин и рёбер вида

$$\{b_0, (b_0, b_1), b_1, \dots, b_{i-1}, (b_{i-1}, b_i), b_i, \dots, b_{k-1}, (b_{k-1}, b_0), b_0\}.$$

*Простым циклом* называют цикл, у которого все вершины и рёбра попарно различны.

**Определение 1.** *Мультиграф мы называем  $n$ -цветным графом, если множество его рёбер есть несвязное объединение  $n$  непересекающихся подмножеств, каждое из которых состоит из рёбер одного цвета.*

Пусть  $\Gamma$  – простой связный четырёхцветный граф, рёбра которого раскрашены в четыре цвета –  $s, u, t, c$ , и каждая вершина которого инцидентна в точности одному ребру каждого из цветов  $s, u, t$ . При этом  $c$ -ребер, инцидентных одной вершине  $b$ , может быть любое конечное (нулевое в частности) число  $n_b$ , и они упорядочены  $c_1^b, \dots, c_{n_b}^b$  в случае  $n_b > 1$ . Назовем  $u$ -ребро и  $s$ -ребро, выходящие из вершины  $b$ , *условными  $c$ -ребрами* и присвоим им номера  $c_0^b$  и  $c_{n_b+1}^b$  соответственно. Простой цикл  $b_1, (b_1, b_2), b_2, \dots, b_{2k}, (b_{2k}, b_{2k+1}), b_{2k+1} = b_1$  для  $k \in \mathbb{N}$  назовём  $c^*$ -циклом, если

$$(b_{2i-1}, b_{2i}) = c_m^{b_{2i}}, \quad (b_{2i}, b_{2i+1}) = c_{m+1}^{b_{2i}} = c_l^{b_{2i+1}}, \quad (b_{2i+1}, b_{2i+2}) = c_{l-1}^{b_{2i+1}}.$$

**Определение 2.** *Граф  $\Gamma$  назовем допустимым четырёхцветным графом, если он содержит  $c^*$ -циклы и каждый такой цикл имеет длину 4.*

Простой цикл графа  $\Gamma$  назовем *tu-циклом* (*st-циклом*), если все его ребра имеют цвет  $t$  или  $u$  ( $t$  или  $s$ ).

**Лемма 1** ([7]). *Каждому допустимому четырёхцветному графу  $\Gamma$  соответствует замкнутая поверхность  $M$  и  $\Omega$ -устойчивый поток  $f^t: M \rightarrow M$  без предельных циклов со следующими свойствами:*

(1) *Эйлера характеристика поверхности  $M$  может быть вычислена по формуле*

$$\chi(M) = \nu_0 - \nu_1 + \nu_2, \tag{1}$$

где  $\nu_0, \nu_1, \nu_2$  количества всех  $tu$ -,  $c^*$ - и  $st$ -циклов графа  $\Gamma$  соответственно;

(2) *Поверхность  $M$  неориентируема тогда и только тогда, когда граф  $\Gamma$  имеет хотя бы один цикл нечётной длины.*

## 2.2. Оснащенный двудольный граф

Рассмотрим направленный граф  $\Upsilon$ , обладающий следующими свойствами.

Вершины этого графа являются вершинами четырёх типов:  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{E}$ , при этом

(1) каждая  $\mathcal{M}$ -вершина может быть соединена только с  $\mathcal{L}$ -вершинами, причём единственным ребром с каждой из этих вершин;

(2) каждая  $\mathcal{E}$ -вершина может быть инцидентна только ровно двум рёбрам, соединяющим эту вершину с двумя различными  $\mathcal{L}$ -вершинами, причём одно из этих рёбер направлено к  $\mathcal{E}$ -вершине, другое – от неё;

(3) каждая  $\mathcal{A}$ -вершина может быть соединена только с единственной  $\mathcal{L}$ -вершиной, причём единственным ребром;

(4) ни одна пара  $\mathcal{L}$ -вершин не соединяется ребром и каждая  $\mathcal{L}$ -вершина имеет степень (число инцидентных ей рёбер) 1 или 2, и если эта степень равна 2, тогда эти рёбра либо оба направлены к этой вершине, либо оба направлены от неё.

Поскольку ни одна пара  $\mathcal{L}$ -вершин не соединяется ребром, а вершины остальных типов соединяются только рёбрами с  $\mathcal{L}$ -вершинами, граф  $\Upsilon$  является двудольным.

Дадим определение оснащённого графа  $\Upsilon^*$ , снабдив граф  $\Upsilon$  дополнительной информацией.

**Определение 3.** Назовём граф  $\Upsilon^*$  допустимым оснащённым графом, если это связный ориентированный двудольный граф  $\Upsilon$  с  $\mathcal{A}$ -,  $\mathcal{L}$ -,  $\mathcal{E}$ - и  $\mathcal{M}$ -вершинами, удовлетворяющий условиям (1)–(4) выше, со следующим оснащением:

- каждая  $\mathcal{M}$ -вершина оснащена допустимым четырёхцветным графом  $\Gamma_{\mathcal{M}}$ ;
- каждое ребро, входящее в некоторую  $\mathcal{M}$ -вершину (выходящее из некоторой  $\mathcal{M}$ -вершины), оснащено ориентированным  $st$ -циклом ( $ut$ -циклом) четырёхцветного графа  $\Gamma_{\mathcal{M}}$ ;
- каждая  $\mathcal{E}$ -вершина оснащена весом "+" или "-".

Для каждой  $\mathcal{M}$ -вершины допустимого оснащённого графа  $\Upsilon^*$  обозначим через  $X_{\mathcal{M}}$  результат применения формулы (1) к соответствующему допустимому четырёхцветному графу  $\Gamma_{\mathcal{M}}$ . Обозначим через  $Y_{\mathcal{M}}$  количество рёбер, инцидентных  $\mathcal{M}$ -вершине и обозначим через  $N_{\mathcal{A}}$  количество  $\mathcal{A}$ -вершин графа  $\Upsilon^*$ .

Основным результатом настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

**Теорема 1.** Каждому допустимому оснащённому графу  $\Upsilon^*$  соответствует замкнутая поверхность  $S$  и  $\Omega$ -устойчивый поток  $\phi^t: S \rightarrow S$  со следующими свойствами:

(1) Эйлерова характеристика поверхности  $S$  вычисляется по формуле

$$\chi(S) = \sum_{\mathcal{M}} (X_{\mathcal{M}} - Y_{\mathcal{M}}) + N_{\mathcal{A}}; \quad (2)$$

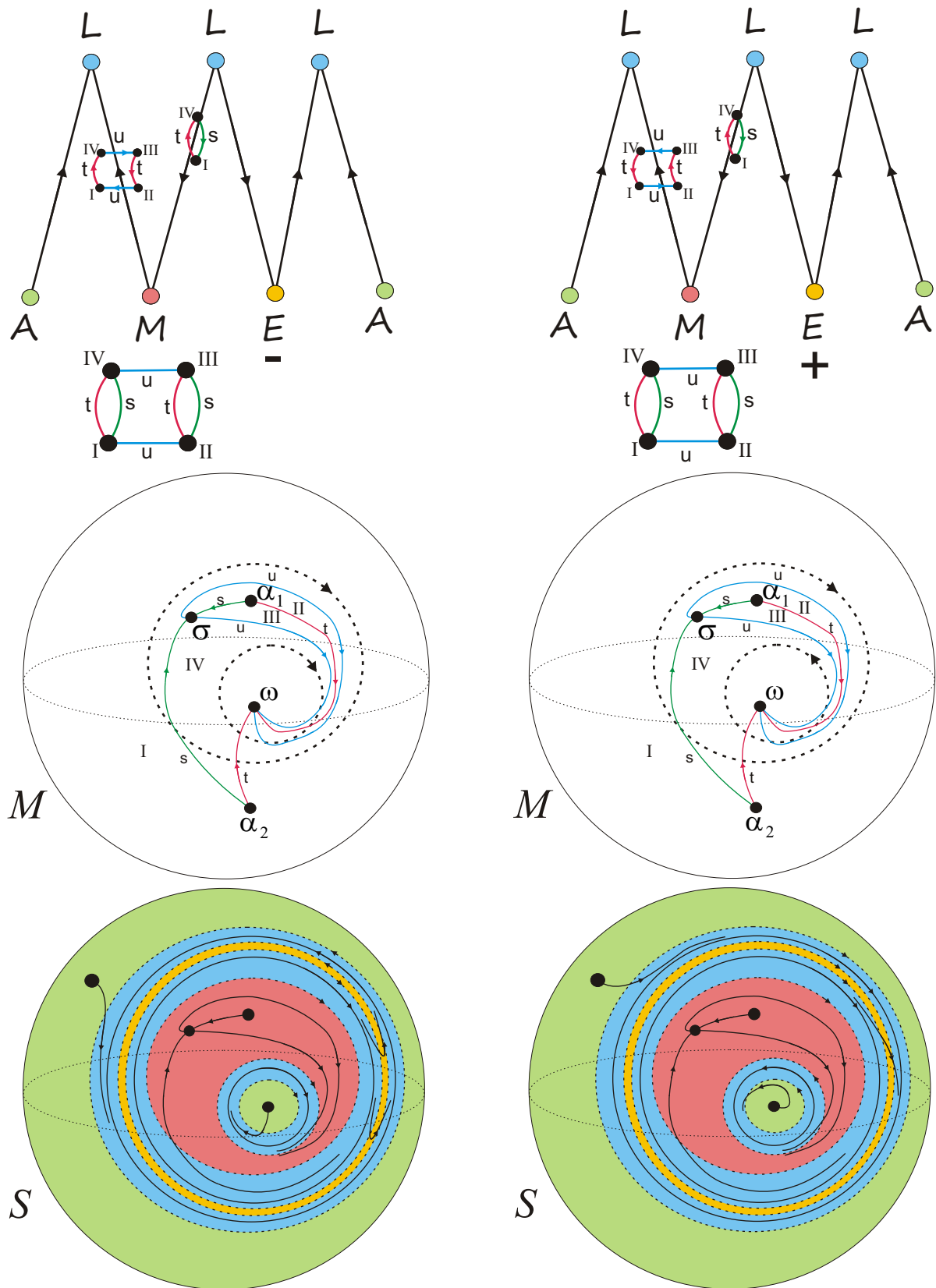
(2)  $S$  ориентируема тогда и только тогда, когда каждый четырёхцветный граф, оснащающий граф  $\Upsilon^*$ , не имеет циклов нечётной длины и каждая  $\mathcal{L}$ -вершина инцидентна ровно двум рёбрам.

## 3. Иллюстрации к реализации оснащённых двудольных графов $\Omega$ -устойчивыми потоками

В настоящем разделе мы опишем идею реализации двудольных оснащённых графов  $\Omega$ -устойчивыми потоками на нескольких примерах.

### 3.1. Пример 1

Рассмотрим два графа, изображённых на Рисунке 1. Их отличия состоят в весе  $\mathcal{E}$ -вершины и ориентации одного из циклов четырёхцветного (в данном примере трёхцветного)



**Рис. 1.** Реализация графов, различающихся ориентацией одного из циклов четырёхцветного графа и весом  $\mathcal{E}$ -вершины

графа. Других отличий нет, поэтому на первых этапах построение потока в обоих случаях проходит одинаково. Рассмотрим любой из графов.

1. Каждая  $\mathcal{L}$ -вершина графа инцидентна двум рёбрам, а единственный четырёхцветный граф не имеет циклов нечётной длины. Следовательно, поверхность  $S$ , на которой будет построен искомым поток, ориентируема (см. Теорему 1).

2. Четырёхцветный граф имеет два  $st$ -цикла, один  $tu$ -цикл и один  $c^*$ -цикл (в данном примере  $su$ -цикл),  $M$ -вершина инцидентна двум рёбрам, а оснащённый граф имеет 2  $A$ -вершины. Поэтому  $\chi(S) = 2 + 1 - 1 - 2 + 2 = 2$  (см. Теорему 1), т.е.  $S$  – сфера.

3. Рассмотрим поверхность  $M$ , на которой реализуется вспомогательный  $\Omega$ -устойчивый поток без предельных циклов. Заметим, что  $\chi(M) = 2 + 1 - 1 = 2$ , что мы определяем по четырёхцветному графу (см. Теорему 1). Вершина  $M$  инцидентна одному ребру, направленному к ней, и второму ребру, направленному от неё. Поэтому нарисуем на сфере  $M$  два непересекающихся диска, в один из которых поместим источник  $\alpha_2$ , в другой – сток  $\omega$ . Кольцо, являющееся дополнением к этим дискам, соответствует  $M$ -области.

4. Кроме реализованных ориентированных циклов трёхцветный граф содержит один  $ts$ -цикл и один  $su$ -цикл, поэтому поместим источник  $\alpha_1$  и седло  $\sigma$  внутрь  $M$ -области. Реализуем цветные ребра соответствующими цветными кривыми:  $u$ -кривую – неустойчивой сепаратрисой седла, уходящей в сток,  $s$ -кривую – устойчивой, идущей из источника,  $t$ -кривую – некоторой кривой, идущей из источника в сток. Построим кривые ток, чтобы каждая цветная кривая из ориентированного цикла пересекала границу  $M$ -области в точности в одной точке.

5. Построенные цветные кривые разбивают поверхности на треугольники, соответствующие вершинам трёхцветного графа, а на граничных окружностях  $M$ -области индуцируют ориентацию, согласованно с ориентацией циклов.

6. Чтобы получить сферу  $S$ , к границам  $M$ -области надо приклеить два кольца, соответствующие  $\mathcal{L}$ -областям, затем к одной из полученных новых границ – кольцо, соответствующее  $\mathcal{E}$ -области и кольцо, соответствующее  $\mathcal{L}$ -области, а далее два диска, соответствующие  $A$ -областям.

7. Циклы в  $\mathcal{L}$ -областях, примыкающих к  $M$ -области ориентируем согласованно с ориентацией граничных окружностей  $M$ -области. Если  $\mathcal{E}$ -область имеет вес “–”, ориентируем её граничные окружности несогласованно, если “+” – согласованно. Затем ориентируем цикл, ориентация которого ещё неизвестна, согласованно с границей  $\mathcal{E}$ -области. Устойчивость циклов и узловых точек определяется направлением соответствующего ребра, если рёбра направлены к соответствующей вершине, то цикл или узловая точка устойчивы, и неустойчивы иначе.

### 3.2. Пример 2

Рассмотрим два графа, изображённых на Рисунке 2. Этапы построения здесь те же, но нет  $\mathcal{E}$ -вершин,  $M$ -область имеет сепаратрисы, соединяющие седла, поскольку на графе есть несколько  $s$ -кривых. Этапы построения здесь все те же, заметим только, что два примера отличаются лишь ориентацией цикла, что выражено на графе разной ориентацией цикла четырёхцветного графа, но уже это различие делает потоки неэквивалентными.

### 3.3. Пример 3

Рассмотрим два графа на Рисунка 3.

Во-первых, здесь мы имеем дело с тором, а не со сферой, и  $M$ -области отсутствуют. Поэтому в этом случае мы начинаем сразу с финальной поверхности, в которую вкладываем граф. Два примера отличаются только весом двух  $\mathcal{E}$ -областей, что порождает несогласованную ориентацию предельных циклов и разное строение областей между ними.

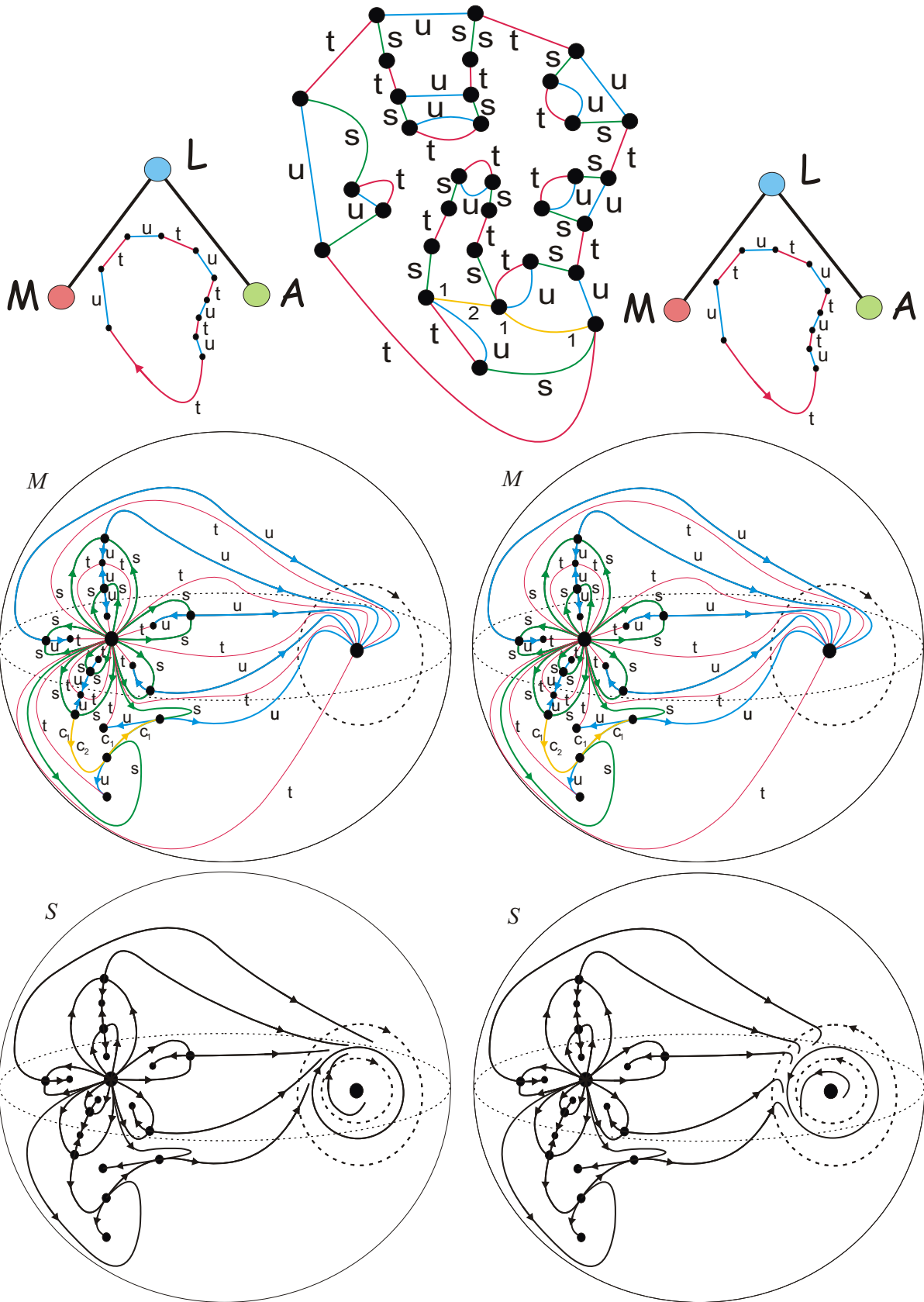


Рис. 2. Реализация графов, различающихся ориентацией единственного ориентированного цикла четырёхцветного графа

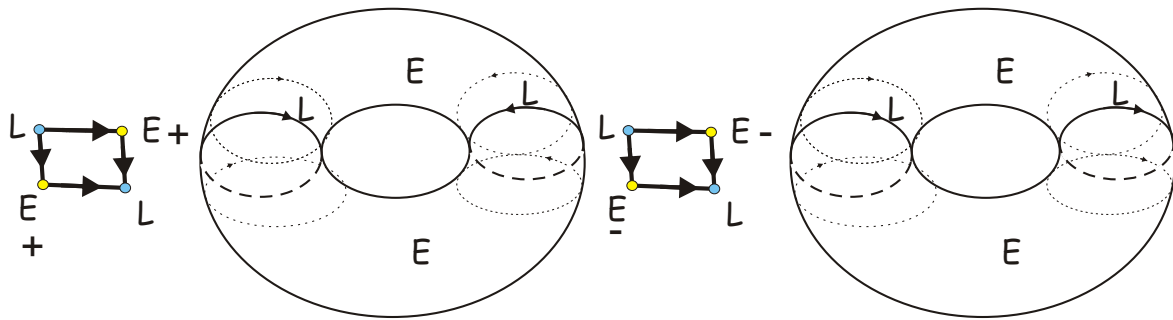


Рис. 3. Реализация графов, различающихся весом  $\mathcal{E}$ -вершин

#### 4. Доказательство Теоремы

Пусть  $\Upsilon^*$  – некоторый допустимый оснащённый граф.

**I.** Построим  $\Omega$ -устойчивый поток  $\phi^t$ , соответствующий классу изоморфности графа  $\Upsilon^*$  путём построения поверхности  $S$  и непрерывного векторного поля на ней.

Напомним, что неблуждающее множество  $\Omega$ -устойчивого потока состоит из конечного числа гиперболических неподвижных точек и гиперболических замкнутых траекторий (предельных циклов).

**Шаг 1.** Пусть  $B$  – множество вершин графа  $\Upsilon^*$ , а  $E$  – множество его рёбер. Для каждой вершины  $b \in B$  построим поверхность с краем  $S_b$  и векторное поле  $\vec{V}_b$  на нем, трансверсальное краю. Искомый  $\Omega$ -устойчивый поток на поверхности  $S$  будет склеиваться из кусков динамики с помощью колец, соответствующих рёбрам из множества  $E$ , инцидентным вершинам, соответствующим склеивающимся кускам динамики.

**A-вершина.** Пусть  $b$  это  $\mathcal{A}$ -вершина. Тогда положим  $S_b = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ , и векторное поле на диске  $S_b$  определим вектор-функцией  $\vec{V}_b(x, y) = \{-x, -y\}$  ( $\vec{V}_b(x, y) = \{x, y\}$ ), если рёбра, инцидентные вершине  $b$ , направлены к  $b$  (от  $b$ ).

**E-вершина.** Пусть  $b$  это  $\mathcal{E}$ -вершина. Положим  $W = [0, 1] \times [0, 1]$ . Определим на  $W$  минимальное отношение эквивалентности  $\sim_{\mathcal{E}}$  такое, что  $(x, 0) \sim_{\mathcal{E}} (x, 1)$  для  $x \in [0, 1]$ . Пусть  $S_b = W / \sim_{\mathcal{E}}$ , и  $q_b: W \rightarrow S_b$  – естественная проекция.

Определим на кольце  $S_b$  векторное поле формулой  $\vec{V}_b(x, y) = q_b(\{\frac{1}{2}, 1\})$  ( $\vec{V}_b(x, y) = q_b(\{\sin \frac{2\pi}{3}(x + \frac{1}{4}), \cos \frac{2\pi}{3}(x + \frac{1}{4})\})$ ), если вершина  $\mathcal{E}$  имеет вес  $+$  ( $-$ ).

**L-вершина.** Пусть  $b$  –  $\mathcal{L}$ -вершина. Положим

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \frac{3 - \cos \pi y}{2}, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Тогда  $W$  является криволинейной трапецией с вершинами  $A(-1; 0), B(-2; 1), C(2; 1), D(1; 0)$ . Определим на  $W$  минимальное отношение эквивалентности  $\sim_{\mathcal{L}}$  такое, что  $(x, 0) \sim_{\mathcal{L}} (2x, 1)$  ( $(x, 0) \sim_{\mathcal{L}} (-2x, 1)$ ) для  $x \in AD$  если вершина  $b$  инцидентна двум рёбрам (одному ребру). Положим  $S_b = W / \sim_{\mathcal{L}}$ , и  $q_b: W \rightarrow S_b$  – естественная проекция. Тогда  $S_b$  является кольцом (плёнкой Мёбиуса). Определим на  $S_b$  векторное поле формулой  $\vec{V}_b(x, y) = q_b(\{0, 1\})$  ( $\vec{V}_b(x, y) = q_b(\{0, -1\})$ ) и ориентируем границу  $S_b$  в направлении движения по координате  $y$  от 0 к 1 (от 1 к 0), если рёбра, инцидентные  $b$ , направлены к  $b$  (от  $b$ ).

**M-вершина.** Пусть  $b$  –  $\mathcal{M}$ -вершина. Тогда  $b$  присвоен четырёхцветный граф  $\Gamma_M$ , соответствующий поверхности  $M$  с векторным полем  $\vec{V}_M$ , построенным в доказательстве Леммы 1 в [7]. Пусть  $\omega$  ( $\alpha$ ) – некоторый сток (источник) поля  $\vec{V}_M$  такой, что  $\omega = \pi_{V_M}^{-1}(\tau_{b,\mathcal{L}})$  ( $\alpha = \pi_{V_M}^{-1}(\tau_{\mathcal{L},b})$ ), где  $\pi_{V_M}$  – взаимно однозначное соответствие между элементами поля  $\vec{V}_M$  и элементами четырёхцветного графа  $\Gamma_M$ . Пусть  $u_\omega$  ( $u_\alpha$ ) – некоторая окрестность стока  $\omega$  (источника  $\alpha$ ) без других неподвижных точек внутри с границей, трансверсальной траекториям  $\vec{V}_M$ . Ориентируем  $\partial u_\omega$  ( $\partial u_\alpha$ ) согласованно с ориентацией циклов  $\tau_{b,\mathcal{L}}$  ( $\tau_{\mathcal{L},b}$ ). Тогда

$S_b = M \setminus \bigcup_{\omega=\pi_{V_M}^{-1}(\tau_b, \mathcal{L})} u_\omega \cup \bigcup_{\alpha=\pi_{V_M}^{-1}(\tau_{\mathcal{L}}, b)} u_\alpha$  с полем  $\vec{V}_b = \vec{V}_M|_{S_b}$ . Будем полагать, что каждая

компонента связности  $\partial S_b$  ориентирована в соответствии с ориентацией соответствующего цикла четырёхцветного графа.

**Шаг 2.** Пусть  $A = \mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$ , и у нас есть два векторных поля  $\vec{V}^{\rightarrow} = \{v^{\rightarrow}(s), s \in \mathbb{S}^1\}$ ,  $\vec{V}^{\leftarrow} = \{v^{\leftarrow}(s), s \in \mathbb{S}^1\}$  на  $\mathbb{S}^1 \times \{-1\}$ ,  $\mathbb{S}^1 \times \{1\}$  соответственно таких, что они трансверсальны  $\partial A$ ,  $\vec{V}^{\rightarrow}$  направлено внутрь  $A$ ,  $\vec{V}^{\leftarrow}$  направлено от  $A$ . Положим

$$\vec{V}_A = \{\vec{v}(s, t) = \frac{1}{2} \left( (1-t)v^{\rightarrow}(s) + (1+t)v^{\leftarrow}(s) \right), s \in \mathbb{S}^1, t \in [-1, 1]\}.$$

Назовём векторное поле  $\vec{V}_A$  *усреднением границ*.

Для каждого ребра  $e \in E$  обозначим через  $A_e$  пару колец  $A$ . Заметим, что множества  $\partial \left( \bigsqcup_{b \in B} S_b \right)$  и  $\partial \left( \bigsqcup_{e \in E} A_e \right)$  состоят из одинакового числа окружностей. Положим  $h_{\Upsilon^*} :$

$\partial \left( \bigsqcup_{b \in B} S_b \right) \rightarrow \partial \left( \bigsqcup_{e \in E} A_e \right)$  – диффеоморфизм такой, что  $h_{\Upsilon^*}(x) = y$  для  $x \in S_b$ ,  $y \in A_e$  если  $b$  и  $e$  инцидентны, кроме того,  $h_{\Upsilon^*}$  индуцирует согласованную ориентацию на компонентах связности  $\partial A_e$  для ребра  $e$ , инцидентного  $\mathcal{M}$ -вершине и  $\mathcal{L}$ -вершине.

Пусть  $\mathcal{S} = \bigsqcup_{b \in B} S_b \sqcup \bigsqcup_{e \in E} A_e$ . Объявим на  $\mathcal{S}$  минимальное отношение эквивалентности  $\sim_{\Upsilon^*}$  такое, что  $x \sim_{\Upsilon^*} h_{\Upsilon^*}(x)$ . Тогда  $\mathcal{S} / \sim_{\Upsilon^*}$  – замкнутая поверхность, обозначим её через  $S$ , и через  $q_S: \mathcal{S} \rightarrow S$  – естественную проекцию. Тогда искомое векторное поле  $\vec{V}_S$  на  $S$  состоит из  $q_S(\vec{V}_{S_b})$  для каждой  $b \in B$  и из усреднения границ на  $q_S(A_e)$  для каждого  $e \in E$ . Примеры построенного потока изображены на рисунках 1, 2, 3.

**II.** Докажем, что эйлерова характеристика поверхности  $S$  может быть вычислена по формуле (2)  $\chi(S) = \sum_{\mathcal{M}} (X_{\mathcal{M}} - Y_{\mathcal{M}}) + N_{\mathcal{A}}$ , где  $X_{\mathcal{M}}$  – результат применения формулы (1) к четырёхцветному графу  $\Gamma_{\mathcal{M}}$ , соответствующему вершине  $\mathcal{M}$ ,  $Y_{\mathcal{M}}$  – количество рёбер, инцидентных вершине  $\mathcal{M}$ ,  $N_{\mathcal{A}}$  – количество  $\mathcal{A}$ -вершин графа  $\Upsilon^*$ .

Хорошо известно (см., например, [8]), что  $\chi(\Pi_p) = \chi(\Pi) - p$ , где  $\Pi_p$  это поверхность  $\Pi$  с  $p$  дырками, и если  $\Pi$  есть результат отождествления границ  $\Pi_p^1$  и  $\Pi_p^2$ , тогда  $\chi(\Pi) = \chi(\Pi_p^1) + \chi(\Pi_p^2)$ . Поскольку  $S$  – результат отождествления границ  $\bigsqcup_{b \in B} S_b$  и  $\bigsqcup_{e \in E} A_e$ , и  $\chi(A_e) = 0$ , тогда

чтобы вычислить  $\chi(S)$  нам нужно вычислить характеристики её элементарных областей и сложить их. Так как  $\chi(S_b) = 1$  если  $b$  –  $\mathcal{A}$ -вершина,  $\chi(S_b) = 0$  если  $b$  –  $\mathcal{E}$ - или  $\mathcal{L}$ -вершина и  $\chi(S_b) = X_{\mathcal{M}} - Y_{\mathcal{M}}$  если  $b$  –  $\mathcal{M}$ -вершина, получаем нужную формулу.

**III.** Докажем, что  $S$  ориентируема тогда и только тогда, когда каждый четырёхцветный граф, оснащающий  $\Upsilon^*$ , не имеет циклов нечётной длины, и каждая  $\mathcal{L}$ -вершина инцидентна в точности двум рёбрам.

Заметим, что  $S$  ориентируема тогда и только тогда, когда все её части ориентируемы, т.е. ориентируемы все её элементарные области, что эквивалентно утверждению, что все  $\mathcal{L}$ -области суть кольца и все четырёхцветные графы, оснащающие  $\Upsilon^*$ , не имеют циклов нечётной длины (см. Лемму 1 (2)).

## Литература

1. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // Доклады Академии наук СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 247-250.
2. Леонтович Е.А., Майер А.Г. О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории // Докл. Акад. АН СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 251-257.
3. Леонтович Е.А., Майер А.Г. О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории // Докл. Акад. АН СССР. 1955. Т. 103. № 4. С. 557-560.



4. Peixoto M. On the classification of flows on two manifolds. Dynamical systems Proc. 1971.
5. Ошемков А.А., Шарко В.В. О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях // Математический сборник. 1998. Т. 189, № 8. С. 93-140.
6. Болсинов А.В., Матвеев С.В., Фоменко А.Е. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // УМН. 1990. Т. 45, № 2(272). С. 49-77.
7. Круглов В.Е., Малышев Д.С., Починка О.В. Многоцветный граф как полный топологический инвариант для  $\Omega$ -устойчивых потоков без периодических траекторий на поверхностях // Математический сборник. Принято в печать.
8. Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н. Введение в топологию. М.: Высшая школа. 1980. 296 с.

MSC 37D05

## Realisation of an directed equipped bipartite graph by an Omega-stable flow on a closed surface

V. E. Kruglov<sup>1,2</sup>, O.V. Pochinka<sup>1</sup>

National Research University Higher School of Economics<sup>1</sup>, Lobachevsky State  
University<sup>2</sup>

*Abstract:* A lot of many sorts of graphs (directed, multicolored, bipartite, etc.) were repeatedly used to describe and realize systems with regular dynamics on surfaces. For example, Morse-Smale flows are completely described by a directed graph equipped with a subgraph system. In addition, their dynamics can be described by three-color graphs. Four-color graphs describe the dynamics of some non structurally unstable vector fields, and a directed bipartite graph, equipped with additional information, is a complete topological invariant for  $\Omega$ -stable flows. In this paper, for each oriented equipped bipartite graph, we construct a standard  $\Omega$ -stable flow on a closed surface.

*Keywords:* realisation,  $\Omega$ -stable flow, equipped graph

### References

1. Andronov A.A., Pontryagin L.S. Grubye sistemy [Rough systems] // Doklady Akademii nauk SSSR. 1937. V. 14, No. 5. P. 247-250.
2. Leontovich E.A., Majer A.G. O traektoriah, opredel'ajuših kačestvennuju strukturu razbienia sfery na traektorii [About trajectories determining qualitative structure of sphere partition into trajectories] // Doklady Akademii nauk SSSR. 1937. V. 14, No. 5. P. 251-257.
3. Leontovich E.A., Majer A.G. O sheme, opredel'ajušej topologičeskiju strukturu razbienia na traektorii [About scheme determining topological structure of partition into trajectories] // Doklady Akademii nauk SSSR. 1955. V. 103, No 4. P. 557-560.
4. Peixoto M. On the classification of flows on two manifolds. Dynamical systems Proc. 1971.
5. Oshemkov A.A., Sharko V.V. O klassifikacii potokov Morsa-Smejla na dvumernyh mnogoobrazijah [About classification of Morse-Smale flows on 2-manifolds] // Matematičeskij sbornik. 1998. V. 189, No. 8. P. 93-140.
6. Bolsinov A.V., Matveev C.V., Fomenko A.E. Topologičeskaja klassifikacija integriruemih gamil'tonovyh sistem s dvumja stepenjami svobody. Spisok sistem maloj složnosti [Topological classification of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom. The list of systems of small complexity] // UMN. 1990. V. 45, No. 2(272). P. 49-77.
7. Kruglov V.E., Malyshev D.S., Pochinka O.V. Mnogocvetnyj graf kak polnyj topologičeskij invariant dlja  $\Omega$ -ustoičivyh potokov bez periodičeskikh traektorij na poverhnostjah [Multicolour graph as a complete topological invariant for  $\Omega$ -stable flows without periodic trajectories on surfaces] // Matsbornik. Accepted for printing.
8. Borisovich Ju.G., Bliznjakov N. M., Izrailevich Ja.A., Fomenko T.N. Vvedenie v topologiju [Introduction to topology]. M.: Vysshaja shkola. 1980. 296 p.