

УДК 519.6

О периодических данных полярных 2-диффеоморфизмов с одной седловой орбитой*

Е.В. Ноздринова¹, О.В. Починка¹

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»¹

Аннотация: В настоящей работе рассматриваются полярные диффеоморфизмы поверхности, то есть диффеоморфизмы, имеющие единственную стоковую и единственную источниковую периодические орбиты. Классическим примером такого диффеоморфизма является диффеоморфизм "источник-сток", который не имеет седловых точек и существует только на двумерной сфере. Однако, добавление даже одной седловой орбиты значительно расширяет класс полярных диффеоморфизмов на поверхностях. В частности в этой работе авторами доказано, что полярные диффеоморфизмы в точности с одной седловой орбитой существуют на поверхностях любого рода и седловая орбита всегда имеет отрицательный тип ориентации. Кроме того установлены все возможные типы периодических данных для таких полярных диффеоморфизмов.

Ключевые слова: периодические данные, полярный диффеоморфизм, поверхность

1. Введение и формулировка результатов

Пусть S_g — замкнутая ориентируемая поверхность рода g с метрикой d и $f : S_g \rightarrow S_g$ — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм с конечным гиперболическим неблуждающим множеством Ω_f . Из конечности неблуждающего множества следует, что любая точка $p \in \Omega_f$ является периодической, обозначим через $per(p) \in \mathbb{N}$ её период.

Напомним, что неподвижная точка p ($per(p) = 1$) является *гиперболической* тогда и только тогда, когда среди собственных чисел матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)|_p$ нет чисел, по модулю равных 1. Если при этом все собственные числа матрицы Якоби по модулю меньше 1, то p называется *стоковой точкой*; если все собственные числа по модулю больше 1, то p называется *источниковой точкой*. Притягивающая или отталкивающая точка называется *узловой*. Гиперболическая неподвижная точка не являющаяся *узловой*, называется *седловой точкой или седлом*.

Если точка p — периодическая точка f с периодом $per(p) > 1$, то, применяя предыдущую конструкцию к диффеоморфизму $f^{per(p)}$, получаем классификацию *гиперболических периодических точек*, аналогичную классификации неподвижных гиперболических точек.

Гиперболическая структура периодической точки p приводит к существованию у нее *устойчивого* W_p^s и *неустойчивого* W_p^u многообразий, которые определяются следующим образом:

$$W_p^s = \{x \in S_g : \lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^{k \cdot per(p)}(x), p) = 0\}, W_p^u = \{x \in S_g : \lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^{-k \cdot per(p)}(x), p) = 0\}.$$

Для гиперболической неподвижной или периодической точки p устойчивое или неустойчивое многообразие называется *инвариантным многообразием* этой точки, компонента связности множества $W_p^u \setminus p$ ($W_p^s \setminus p$) называется неустойчивой (устойчивой) *сепаратрисой*.

Каждой периодической орбите $\mathcal{O}_p$ периодической точки p диффеоморфизма f соответствует тройка чисел (m_p, q_p, ν_p) — *периодические данные орбиты* $\mathcal{O}_p$, где m_p — период точки p , $q_p = \dim W_p^u$, а ν_p — тип ориентации точки p (равный $+1(-1)$, если $f^{m_p}|_{W_p^u}$ сохраняет (меняет) ориентацию).

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (Грант № 17-11-01041) и в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ (проект 90) в 2017 году.

Диффеоморфизм $f : S_g \rightarrow S_g$ называется *полярным*, если его неблуждающее множество содержит в точности одну стоковую и в точности одну источниковую орбиту. В настоящей работе мы рассмотрим класс P полярных диффеоморфизмов $f : S_g \rightarrow S_g$, имеющих единственную седловую периодическую орбиту. Таким образом, неблуждающее множество диффеоморфизма $f \in P$ состоит в точности из трех орбит: стоковой $\mathcal{O}_\omega$, седловой $\mathcal{O}_\sigma$ и источниковой $\mathcal{O}_\alpha$.

Лемма 1. Для любого диффеоморфизма $f \in P$ тип ориентации ν_σ равен -1 .

Теорема 1. Любой диффеоморфизм $f \in P$ имеет один из следующих наборов периодических данных:

1. $\mathcal{O}_\sigma(2g, 1, -1)$, $\mathcal{O}_\omega(1, 0, +1)$, $\mathcal{O}_\alpha(1, 2, +1)$, $g > 0$;
2. $\mathcal{O}_\sigma(1 + 2g, 1, -1)$, $\mathcal{O}_\omega(1, 0, +1)$, $\mathcal{O}_\alpha(2, 2, +1)$, $g \geq 0$;
3. $\mathcal{O}_\sigma(2k - 1, 1, -1)$, $\mathcal{O}_\omega(2, 0, +1)$, $\mathcal{O}_\alpha(1, 2k - 1, +1)$, $k \in \mathbb{N}$, $g = 0$.

2. Иллюстрации к Теореме 1

1. На Рисунке 1 изображен восьмиугольник. Отождествляя пары его сторон с одинаково обозначенными точками в их серединах, мы получим диффеоморфизм f на поверхности рода два S_2 с периодическими данными первого типа для $g = 2$.

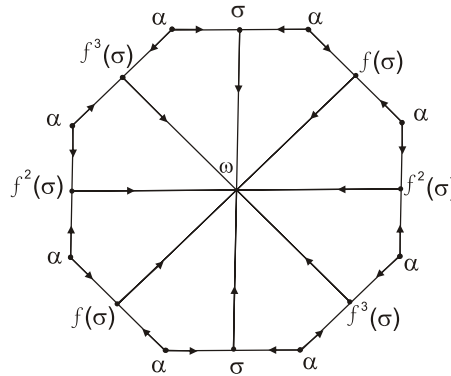


Рис. 1. $g = 2$

2. На Рисунке 2 изображен шестиугольник. Отождествляя пары его сторон с одинаково обозначенными точками в их серединах, мы получим диффеоморфизм f на торе S_1 с периодическими данными второго типа для $g = 1$.
3. На Рисунке 3 изображены два пятиугольника. Отождествляя пары его сторон с одинаково обозначенными точками в их серединах, мы получим диффеоморфизм f на поверхности рода два S_2 с периодическими данными третьего типа для $g = 2$.

3. Структура неблуждающего множества

В этом разделе мы докажем Лемму 1. Подробные доказательства, приведенных в этом разделе вспомогательных утверждений, можно найти в книге [4].

Пусть ω — стоковая точка периода m_ω диффеоморфизма f . Согласно теореме 5.5 книги [6], f^{m_ω} локально сопряжен в точке ω линейному диффеоморфизму пространства $\mathbb{R}^2$, заданному формулой $L(x, y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$.

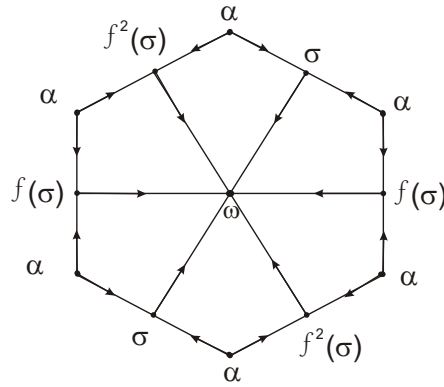


Рис. 2. $g = 1$

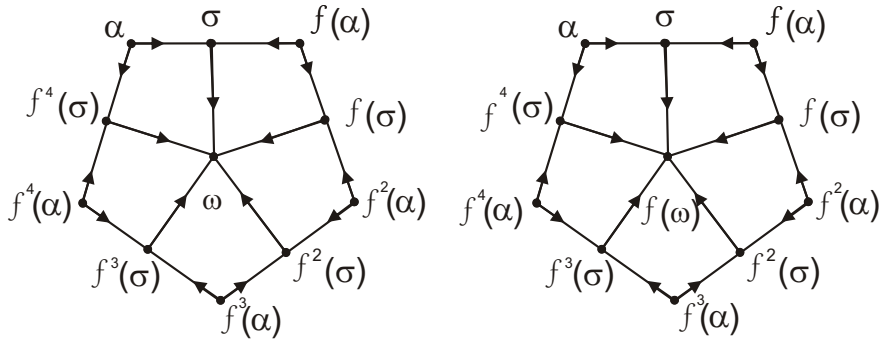


Рис. 3. $g = 2$

Обозначим через $\mathcal{O}_\omega$ орбиту точки ω . Положим $V_\omega = W_{\mathcal{O}_\omega}^s \setminus \mathcal{O}_\omega$. Обозначим через $\hat{V}_\omega = V_\omega / f$ пространство орбит действия группы $F = \{f^k, k \in \mathbb{Z}\}$ на V_ω и через $p_\omega : V_\omega \rightarrow \hat{V}_\omega$ естественную проекцию.

Утверждение 1. Пространство $\hat{V}_\omega$ диффеоморфно двумерному тору, естественная проекция $p_\omega : V_\omega \rightarrow \hat{V}_\omega$ является накрытием¹, индуцирующим эпиморфизм $\eta_\omega : \pi_1(\hat{V}_\omega) \rightarrow m_\omega \mathbb{Z}$ (здесь $m_\omega \mathbb{Z}$ — группа целых чисел кратных m_ω), действующий по следующему правилу. Пусть $[\hat{c}] \in \pi_1(\hat{V}_\omega)$. Любое поднятие² с петли $\hat{c}$ соединяет некоторую точку $x \in V_\omega$ с точкой $f^n(x)$, где $n \in \mathbb{Z}$ не зависит от выбора поднятия. Тогда $\eta_\omega([\hat{c}]) = n$.

Обозначим через $a_{\nu_\sigma} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ диффеоморфизм, заданный формулой $a_{\nu_\sigma}(x, y) = (\nu_\sigma \cdot \frac{1}{2}x, \nu_\sigma \cdot 2y)$.

Диффеоморфизм $a_{\nu_\sigma} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеет единственную неподвижную седловую точку в начале координат O с устойчивым многообразием $W_O^s = Ox_1$ и неустойчивым многообразием $W_O^u = Ox_2$. Диффеоморфизм f^{m_σ} в некоторой окрестности точки σ топологически сопряжен диффеоморфизму a_{ν_σ} в окрестности точки O (см., например, Теорему 5.5 книги [6]).

¹**Определение.** Непрерывное отображение $p : \bar{X} \rightarrow X$ топологических пространств называется накрытием (накрывающим отображением), если

1) p — сюръективно;

2) для любой точки $x \in X$ существует окрестность U такая, что $p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} \bar{U}_j$ для некоторого

семейства $\{\bar{U}_j, j \in J\}$ подмножеств $\bar{X}$, удовлетворяющих условиям $\bar{U}_j \cap \bar{U}_k = \emptyset$ для $j \neq k$ и $p|_{\bar{U}_j} : \bar{U}_j \rightarrow U$ — гомеоморфизм для всех $j \in J$.

²**Определение.** Если $p : \bar{X} \rightarrow X$ — накрытие и $h : Y \rightarrow X$ — непрерывное отображение, то поднятием отображения h называется непрерывное отображение $\tilde{h} : Y \rightarrow \bar{X}$, для которого $p\tilde{h} = h$.

Под поднятием петли $\hat{c}$ понимается поднятие непрерывного отображения $H_{\hat{c}} : [0, 1] \rightarrow \hat{V}_\omega$ такого, что $H_{\hat{c}}([0, 1]) = \hat{c}$.

Для седловой сепаратрисы ℓ обозначим через m_ℓ её период, то есть наименьшее из натуральных чисел μ таких, что $f^\mu(\ell) = \ell$. Неустойчивая сепаратриса ℓ^u содержит сток ω в своём замыкании. Положим $\hat{\ell}^u = p_\omega(\ell^u)$ и обозначим через $j_{\hat{\ell}^u} : \hat{\ell}^u \rightarrow \hat{V}_\omega$ отображение включения.

Утверждение 2. Множество $\hat{\ell}^u$ является окружностью, гладко вложенной в $\hat{V}_\omega$ и такой, что $\eta_\omega(j_{\hat{\ell}^u*}(\pi_1(\hat{\ell}^u))) = m_\ell \mathbb{Z}$.

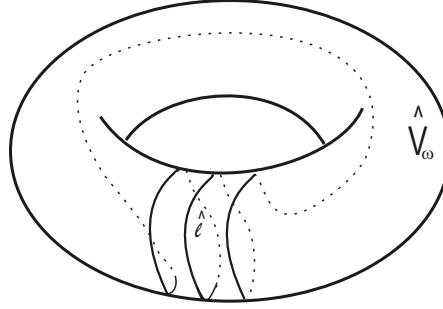


Рис. 4. Проекция седловой сепаратрисы в пространство орбит бассейна стока, гомеоморфное тору

На Рисунке 4 изображен тор $\hat{V}_\omega$ с проекцией $\hat{\ell}$ сепаратрисы ℓ такой, что $\frac{m_\ell}{m_\omega} = 3$.

Для $t \in (0, 1]$ положим $\mathcal{N}^t = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 x_2| \leq t\}$ и $\mathcal{N}^1 = \mathcal{N}$ и заметим, что множество $\mathcal{N}^t$ является инвариантным относительно диффеоморфизма a_{ν_σ} . Окрестность N_σ точки σ назовем *линеаризующей*, если существует гомеоморфизм $\mu_\sigma : N_\sigma \rightarrow \mathcal{N}$, сопрягающий диффеоморфизм $f^{m_\sigma}|_{N_\sigma}$ с каноническим диффеоморфизмом $a_{\nu_\sigma}|_{\mathcal{N}}$.

Окрестность $N_{\mathcal{O}_\sigma} = \bigcup_{j=0}^{m_\sigma-1} f^j(N_\sigma)$ орбиты $\mathcal{O}_\sigma = \bigcup_{j=0}^{m_\sigma-1} f^j(\sigma)$, оснащенную отображением $\mu_{\mathcal{O}_\sigma}$, составленным из гомеоморфизмов $\mu_\sigma f^{-j} : f^j(N_\sigma) \rightarrow \mathcal{N}$, $j = 0, \dots, m_\sigma - 1$, будем называть линеаризующей окрестностью орбиты $\mathcal{O}_\sigma$.

Утверждение 3. Седловая точка (орбита) диффеоморфизма f обладает линеаризующей окрестностью.

Положим $\mathcal{N}^u = \mathcal{N} \setminus \mathcal{O}x_1$ и через $\hat{\mathcal{N}}_{\nu_\sigma}^u = \mathcal{N}^u / a_{\nu_\sigma}$ обозначим пространство орбит действия группы $\{a_{\nu_\sigma}^n, n \in \mathbb{Z}\}$ на $\mathcal{N}^u$. Обозначим далее через $p_{\hat{\mathcal{N}}_{\nu_\sigma}^u} : \mathcal{N}^u \rightarrow \hat{\mathcal{N}}_{\nu_\sigma}^u$ естественную проекцию и через $\eta_{\hat{\mathcal{N}}_{\nu_\sigma}^u}$ отображение, составленное из нетривиальных гомоморфизмов из фундаментальных групп компонент связности пространства $\hat{\mathcal{N}}_{\nu_\sigma}^u$ в группу $\mathbb{Z}$. Фундаментальная область¹ действия группы $\{a_{\nu_\sigma}^n, n \in \mathbb{Z}\}$ на $\mathcal{N}^u$ в случае $\nu_\sigma = +1$ состоит из двух непесекающихся криволинейных трапеций, каждая из которых имеет эквивалентные точки, принадлежащие горизонтальным отрезкам границы, а в случае $\nu_\sigma = -1$ фундаментальную область можно выбрать в виде одной криволинейной трапеции (с эквивалентными точками на горизонтальных отрезках границы). На рисунке 5 эти трапеции закрашены и показано, как из них, отождествлением границ в силу диффеоморфизма a_{ν_σ} , получается многообразие $\hat{\mathcal{N}}_{\nu_\sigma}^u$ в зависимости от выбора ν_σ . Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4. Многообразие $\hat{\mathcal{N}}_{\nu_\sigma}^u$ имеет следующий топологический тип в зависимости от ν_σ :

¹ Фундаментальной областью действия группы G на топологическом пространстве X называется замкнутое множество $D_G \subset X$ такое, что существует множество $\tilde{D}_G$ со следующими свойствами:

- 1) $cl(\tilde{D}_G) = D_G$;
- 2) $g(\tilde{D}_G) \cap \tilde{D}_G = \emptyset$ для всех $g \in G$, отличных от нейтрального элемента группы G ;
- 3) $\bigcup_{g \in G} g(\tilde{D}_G) = X$.

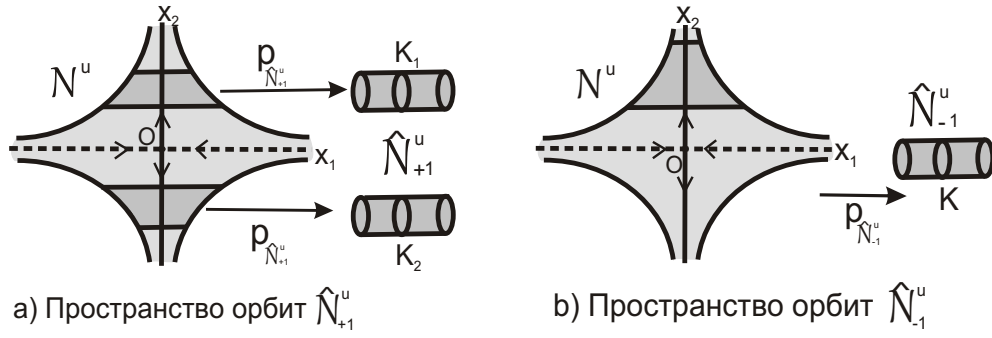


Рис. 5. Пространства орбит $\hat{N}^u$

- пространство $\hat{N}_{+1}^u$ гомеоморфно паре двумерных колец K_1, K_2 и $\eta_{\hat{N}_{+1}^u}(K_1) = \eta_{\hat{N}_{+1}^u}(K_2) = \mathbb{Z}$;
- пространство $\hat{N}_{-1}^u$ гомеоморфно одному двумерному кольцу K и $\eta_{\hat{N}_{-1}^u}(K) = 2\mathbb{Z}$.

Положим $N_\sigma^u = N_\sigma \setminus W_\sigma^s$, $N_\sigma^s = N_\sigma \setminus W_\sigma^u$. Для неустойчивой сепаратрисы ℓ^u обозначим через N_{ℓ^u} компоненту связности множества N_σ^u , содержащую ℓ^u . Положим $\hat{N}_{\ell^u} = p_\omega(N_{\ell^u})$ и обозначим через $j_{N_{\ell^u}} : N_{\ell^u} \rightarrow \hat{V}_\omega$ отображение включения.

Утверждение 5. Множество $\hat{N}_{\ell^u}$ является кольцом, гладко вложенным в $\hat{V}_\omega$ и таким, что $\eta_\omega(j_{N_{\ell^u}*}(\pi_1(\hat{N}_{\ell^u}))) = m_{\ell^u}\mathbb{Z}$.

Положим $N_{\mathcal{O}_\sigma}^u = N_{\mathcal{O}_\sigma} \setminus W_{\mathcal{O}_\sigma}^s$, $N_{\mathcal{O}_\sigma}^s = N_{\mathcal{O}_\sigma} \setminus W_{\mathcal{O}_\sigma}^u$, $\hat{N}_{\mathcal{O}_\sigma}^u = p_\omega(N_{\mathcal{O}_\sigma}^u)$.

Утверждение 6. Множество $\hat{N}_{\mathcal{O}_\sigma}^u$ является кольцом (парой колец), гладко вложенным (вложенными) в $\hat{V}_\omega$ для $\nu_\sigma = -1$ ($\nu_\sigma = +1$).

Аналогичные утверждения можно сформулировать для источниковой точки α и для устойчивой сепаратрисы ℓ^s седловой точки σ такой, что $\ell^s \subset W_\alpha^u$.

Доказательство Леммы 1

Обозначим через A объединение источниковых точек диффеоморфизма f . Положим $V_A = W_A^u \setminus A$, $\hat{V}_A = V_A/f$ и обозначим через $p_A : V_A \rightarrow \hat{V}_A$ естественную проекцию. Аналогично стоку, пространство орбит в бассейне источника гомеоморфно тору, откуда следует, что каждая компонента связности множества $\hat{V}_A$ гомеоморфна двумерному тору, а число компонент связности совпадает с числом источниковых орбит. С другой стороны из равенства $V_A = V_\omega \setminus N_{\mathcal{O}_\sigma}^u \cup N_{\mathcal{O}_\sigma}^s$ следует, что

$$\hat{V}_A = \hat{V}_\omega \setminus \hat{N}_{\mathcal{O}_\sigma}^u \cup \hat{N}_{\mathcal{O}_\sigma}^s.$$

Таким образом, чтобы получить пространство $\hat{V}_A$ мы должны вырезать из тора $\hat{V}_\omega$ множество $\hat{N}_{\mathcal{O}_\sigma}^u$ и к границе полученного множества приклеить множество $\hat{N}_{\mathcal{O}_\sigma}^s$.

Если $\nu_\sigma = -1$, то каждое из множеств $\hat{N}_{\mathcal{O}_\sigma}^u$, $\hat{N}_{\mathcal{O}_\sigma}^s$ состоит из одного кольца. При этом кольцо $\hat{N}_{\mathcal{O}_\sigma}^u$ гомотопически нетривиально вложено в тор $\hat{V}_\omega$. Тогда $\hat{V}_\omega \setminus \hat{N}_{\mathcal{O}_\sigma}^u$ является кольцом и приклеивание к его границе кольца $\hat{N}_{\mathcal{O}_\sigma}^s$ вновь дает один двумерный тор. Это означает наличие в точности одной источниковой орбиты у диффеоморфизма f , то есть $A = \mathcal{O}_\alpha$ для некоторого периодического источника α .

Если $\nu_\sigma = +1$, то каждое из множеств $\hat{N}_{\mathcal{O}_\sigma}^u$, $\hat{N}_{\mathcal{O}_\sigma}^s$ состоит из двух колец. При этом кольца $\hat{N}_{\mathcal{O}_\sigma}^u$ гомотопически нетривиально вложено в тор $\hat{V}_\omega$. Тогда $\hat{V}_\omega \setminus \hat{N}_{\mathcal{O}_\sigma}^u$ также состоит из двух колец и приклеивание к их границам колец $\hat{N}_{\mathcal{O}_\sigma}^s$ дает два двумерных тора (см. рисунок 6, где

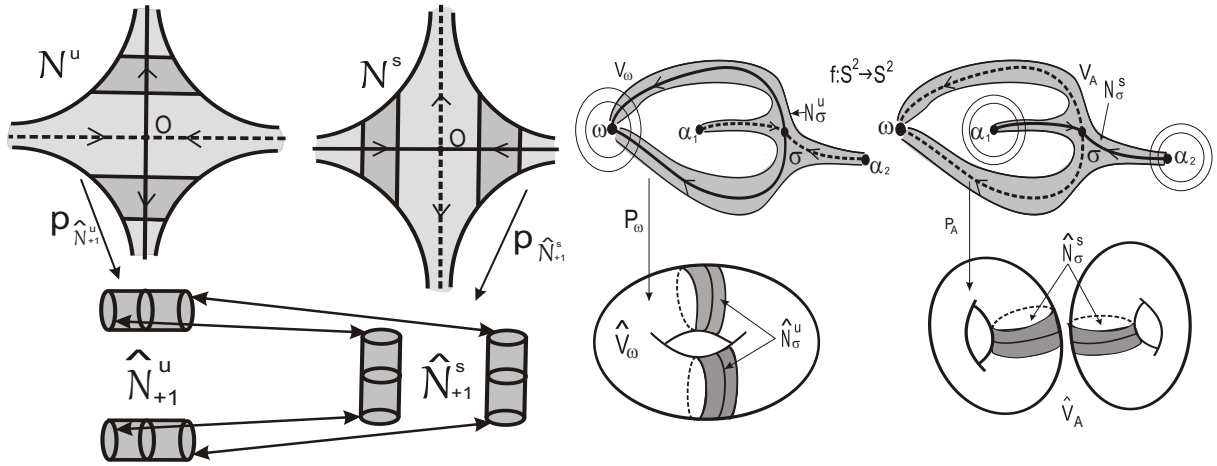


Рис. 6. Перестройка двумерного тора вдоль пары колец

переход из бассейна стока в бассейны источников проиллюстрирован на примере диффеоморфизма сферы, для удобства в вышеупомянутых бассейнах выделены фундаментальные области, отождествлением граничных окружностей которых получают соответствующие торы в факторпространствах). Это означает наличие в точности двух источниковых орбит у диффеоморфизма f , то есть $A = \mathcal{O}_{\alpha_1} \cup \mathcal{O}_{\alpha_2}$ для некоторых периодических источников α_1, α_2 .

4. Периодические данные

В этом разделе мы докажем Теорему 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим последовательно все возможные случаи.

Случай $\nu_\sigma = -1$, $m_\omega = 1$. В этом случае все неустойчивые седловые сепаратрисы лежат в бассейне W_ω^s и их число равно $2m_\sigma$. Положим $V = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^+$ и для $\beta \in \mathbb{N}$ положим $L_\beta = \bigcup_{j=0}^{\beta-1} e^{i\frac{2\pi j}{\beta}} \times \mathbb{R}^+$. Если $\beta = 1$, то положим $\mu = 0$, иначе $\mu \in \{1, \dots, \lfloor \frac{\beta}{2} \rfloor\}$ такое, что $\text{НОД}(\beta, \mu) = 1$ обозначим через $\phi_{\beta, \mu} : V \rightarrow V$ диффеоморфизм, заданный формулой

$$\phi_{\beta, \mu}(z, r) = \left(e^{\frac{2\pi\mu}{\beta}i} z, \frac{r}{2} \right).$$

Положим $\hat{V}_{\beta, \mu} = V / \phi_{\beta, \mu}$ и обозначим через $p_{\beta, \mu} : V \rightarrow \hat{V}_{\beta, \mu}$ естественную проекцию. По построению множество $\hat{V}_{\beta, \mu}$ является двумерным тором. Тогда существует натуральное число μ такое, что $\text{НОД}(2m_\sigma, \mu) = 1$ и диффеоморфизм $\hat{h}_\omega : \hat{V}_\omega \rightarrow \hat{V}_{m_\sigma, \mu}$, переводящий окружность $\hat{\ell}_\sigma^u$ в окружность $p_{2m_\sigma, \mu}(L_{2m_\sigma})$. Тогда существует поднятие $h_\omega : V_\omega \rightarrow V$ диффеоморфизма $\hat{h}_\omega$, переводящее сепаратрисы $W_{\mathcal{O}_\sigma}^u \setminus \mathcal{O}_\sigma$ в набор прямых L_{2m_σ} и сопрягающее диффеоморфизм $f|_{V_\omega}$ с диффеоморфизмом $\phi_{2m_\sigma, \mu}$ (см., например, [4], [5]). Таким образом, везде далее мы можем отождествлять сопряженные объекты.

Поскольку период седловой точки равен m_σ , а отображение $\phi_{2m_\sigma, \mu}$ осуществляет поворот на угол $\frac{\pi\mu}{m_\sigma}$, то сепаратрисы одной и той же седловой точки диффеоморфизма f диаметрально противоположны. Кроме того, в замыкании W_ω^s лежат устойчивые седловые многообразия и источники, а несущая поверхность S_g получается из $2m_\sigma$ -угольника Π , отождествлением диаметрально противоположных сторон (см. рисунки 7 и 8), а диффеоморфизм $f : S_g \rightarrow S_g$ индуцируется диффеоморфизмом $\phi_{2m_\sigma, \mu}$. Согласно Лемме 1, диффеоморфизм f имеет единственную источниковую орбиту $\mathcal{O}_\alpha$. Чтобы установить её период, мы поставим в соответствие диффеоморфизму f трехцветный граф следующим образом (см. для деталей статьи [2] и [3]).

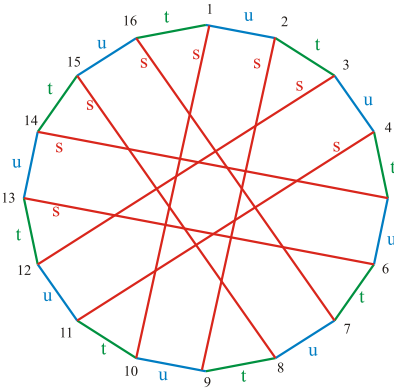
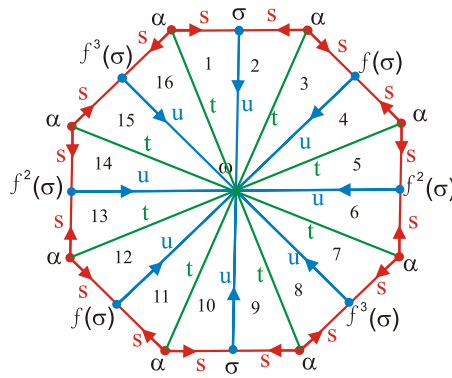


Рис. 7. Восьмиугольник Π и построенный по нему трехцветный граф

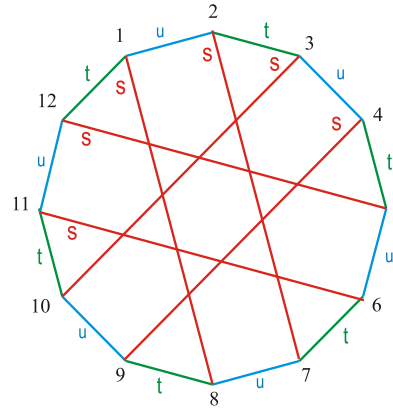
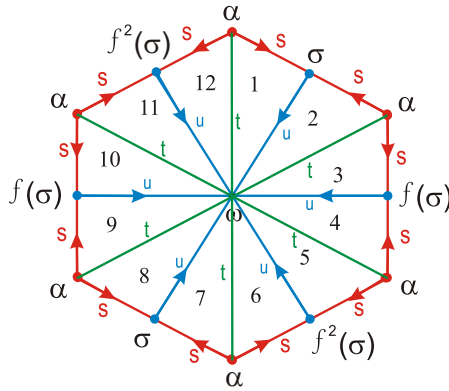


Рис. 8. Шестиугольник Π и построенный по нему трехцветный граф

Устойчивые (неустойчивые) сепаратрисы назовем s (u)–сторонами, и отрезки, соединяющие вершины многоугольника с его серединой назовем t -сторонами. Таким образом, цветные стороны разбивают многоугольник Π на однотипные треугольники, которые мы пронумеруем против хода часовой стрелки. Построим трехцветный граф T_f , соответствующий диффеоморфизму f следующим образом:

- 1) вершины графа T_f взаимно-однозначно соответствуют треугольным областям множества;
- 2) две вершины графа инцидентны ребру цвета s , t или u , если соответствующие этим вершинам треугольные области имеют общую s , t или u сторону.

Обозначим через B_f множество вершин графа T_f и через Δ_f множество треугольников в разбиении многоугольника Π . Обозначим через $\pi_f : \Delta_f \rightarrow B_f$ взаимно-однозначное отображение множества треугольных областей диффеоморфизма f на множество вершин графа T_f . Диффеоморфизм f индуцирует на множестве вершин и ребер графа T_f автоморфизм $P_f = \pi_f f \pi_f^{-1}$. Кроме того,

- множество стоковых точек диффеоморфизма f находится во взаимно однозначном соответствии с множеством tu -циклов графа T_f ;
- множество седловых точек диффеоморфизма f находится во взаимно однозначном соответствии с множеством su -циклов графа T_f ;
- множество источников точек диффеоморфизма f находится во взаимно однозначном соответствии с множеством ts -циклов графа T_f .

Таким образом, для определения периода точки α надо вычислить длину любого st -

цикла (все st -циклы имеют одинаковую длину), она будет некоторым четным числом 2λ , из которого m_α вычисляется по формуле

$$m_\alpha = \frac{2m_\sigma}{\lambda}.$$

Поскольку в многоугольнике Π отождествляются диаметрально противоположные стороны, то, рассмотрев st -цикл, начинающийся с s -ребра $(1, 2m_\sigma + 2)$, приходим к равенству

$$(m_\sigma + 1)\lambda = 2\gamma m_\sigma$$

для некоторого натурального γ такого, что $\text{НОД}(\lambda, \gamma) = 1$. Если m_σ четное число, то $m_\sigma + 1$ и $2m_\sigma$ взаимно просты и, следовательно, $\lambda = 2m_\sigma$, а $m_\alpha = 1$. Если m_σ нечетное число, то $\frac{m_\sigma+1}{2}$ и m_σ взаимно просты и, следовательно, $\lambda = m_\sigma$, а $m_\alpha = 2$. Тем самым мы получили следующие периодические данные

- 1) $\mathcal{O}_\sigma(m_\sigma, 1, -1)$, $\mathcal{O}_\omega(1, 0, +1)$, $\mathcal{O}_\alpha(1, 2, +1)$, m_σ — четное;
- 2) $\mathcal{O}_\sigma(m_\sigma, 1, -1)$, $\mathcal{O}_\omega(1, 0, +1)$, $\mathcal{O}_\alpha(2, 2, +1)$, m_σ — нечетное.

Хорошо известно, что эйлерова характеристика для ориентируемой поверхности выражается формулой: $\chi(S_g) = 2 - 2g$, где g — число ручек (см., например, [4], [1]). С другой стороны, в силу [7], многообразие S_g является двумерным клеточным комплексом $S_g = W_\omega^u \cup W_\sigma^u \cup W_\alpha^u \cup$ с числом m_ω , m_σ , m_α двумерных, одномерных, нульмерных клеток, соответственно. Тогда эйлерова характеристика данного комплекса вычисляется по формуле: $\chi(S_g) = m_\omega - m_\sigma + m_\alpha$ (см., например, Теорему 9 книги [8]). Откуда $m_\sigma = 2g$ в случае 1), $m_\sigma = 2g + 1$ в случае 2) и мы получили периодические данные первых двух типов.

Случай $\nu_\sigma = -1$, $m_\omega \neq 1$. В этом случае все неустойчивые седловые сепаратрисы лежат в m_ω бассейнах и их число равно $2m_\sigma$. Если $2m_\sigma = m_\omega$, то в каждом бассейне лежит в точности одна сепаратриса. Поскольку период сепаратрисы равен m_σ , то сепаратрисы одной и той же седловой точки диффеоморфизма f лежат в бассейнах с номерами j и $j + m_\sigma$ для $j = 1, \dots, m_\sigma$. Поскольку поверхность S_g является связной, то $m_\omega = 2$ и мы получаем диффеоморфизм f на сфере с периодическими данными третьего типа.

Теперь рассмотрим случай, когда в каждом бассейне лежит $b > 1$ сепаратрис. Поскольку всего сепаратрис четное число и период седла равен половине числа сепаратрис, то в случае четного β сепаратрисы одной и той же седловой точки диффеоморфизма f лежат в одном и том же бассейне. В силу связности поверхности S_g этот бассейн должен быть единственным, но случай $m_\omega = 1$ был уже исследован выше. Таким образом b — нечетное число.

Для $l > 1$ положим $V^l = V \times \mathbb{Z}_l$ и для $\beta \in \mathbb{N}$ положим $L_\beta^l = L_\beta \times \mathbb{Z}_l$. Если $\beta = 1$, то положим $\mu = 0$, иначе $\mu \in \{1, \dots, \left\lfloor \frac{\beta}{2} \right\rfloor\}$ такое, что $\text{НОД}(\beta l, \mu) = 1$ обозначим через $\Phi_{l,\beta,\mu} : V^l \rightarrow V^l$ диффеоморфизм, заданный формулой

$$\Phi_{l,\beta,\mu}(z, r, j) = (\phi_{\beta,\mu}(z, r), j + 1(\text{mod } l)).$$

Положим $\hat{V}_{\beta,\mu}^l = V^l / \Phi_{l,\beta,\mu}$ и обозначим через $p_{l,\beta,\mu} : V^l \rightarrow \hat{V}_{\beta,\mu}^l$ естественную проекцию. По построению множество $\hat{V}_{\beta,\mu}^l$ является двумерным тором. Тогда существует натуральное число μ такое, что $\text{НОД}(bm_\omega, \mu) = 1$ и диффеоморфизм $\hat{h}_\omega : \hat{V}_\omega \rightarrow \hat{V}_{b,\mu}^{m_\omega}$, переводящий окружность $\hat{\ell}_\sigma^u$ в окружность $p_{m_\omega,b,\mu}(L_b^{m_\omega})$. Тогда существует поднятие $h_\omega : V_\omega \rightarrow V$ диффеоморфизма $\hat{h}_\omega$, переводящее сепаратрисы $W_\sigma^u \setminus \mathcal{O}_\sigma$ в набор прямых $L_b^{m_\omega}$ и сопрягающее диффеоморфизм $f|_{V_\omega}$ с диффеоморфизмом $\Phi_{m_\omega,b,\mu}$ (см., например, [4], [5]). Таким образом, везде далее мы можем отождествлять сопряженные объекты.

Поскольку период седловой точки равен $\frac{bm_\omega}{2}$, а отображение $\Phi_{m_\omega,b,\mu}$ осуществляет поворот на угол $\frac{2\pi\mu}{b}$, то сепаратрисы одной и той же седловой точки диффеоморфизма f лежат

в бассейнах с номерами j и $j + \frac{bm_\omega}{2}$ для $j = 1, \dots, \frac{bm_\omega}{2}$. Поскольку поверхность S_g является связной, то $m_\omega = 2$. Тогда несущая поверхность S_g получается из двух b -угольников Π_1, Π_2 , отождествлением сходственных сторон (см. рисунок 9), а диффеоморфизм $f : S_g \rightarrow S_g$ индуцируется диффеоморфизмом $\Phi_{2,b,\mu}$. Построив по многоугольникам трехцветный граф нетрудно убедиться, что период единственной источниковой орбиты $\mathcal{O}_\alpha$ равен b .

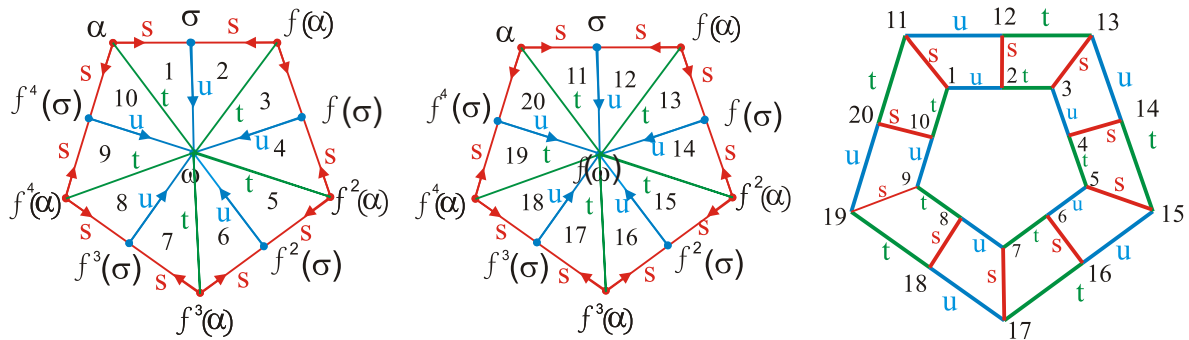


Рис. 9. Пятиугольники Π_1, Π_2 и построенный по ним трехцветный граф

Подсчет эйлеровой характеристики дает $\chi(S_g) = 2 - b + b$. Откуда, с учетом того, что $b = 2k - 1$, мы получили периодические данные третьего типа.

Доказательство завершено.

Литература

1. Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н. Введение в топологию. М.: Высшая школа. 1980. 296 с.
2. Гринес В. З., Капкаева С.Х., Починка О.В. Трехцветный граф как полный топологический инвариант для градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей. Математический сборник. 2014. Т. 205. № 10. С. 19-46.
3. V. Grines, D. Malyshev, O. Pochinka, S. Zinina. Efficient Algorithms for the Recognition of Topologically Conjugate Gradient-like Diffeomorphisms. Regular and Chaotic Dynamics, 2016, Vol. 21, No. 2, pp. 189–203.
4. Grines V., Medvedev T., Pochinka O. Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds. Springer International Publishing Switzerland. —2016. —364 P.
5. Косневски Ч. Начальный курс алгебраической топологии. Москва. Мир. 1983. 304 с.
6. Палис Ж., Ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем: Введение: Пер. с англ. М. Мир. 1986. 301 с.
7. Смейл С. Дифференцируемые динамические системы. УМН. 1970. Т. 25, No. 1(151), 113–185.
8. Понтрягин Л. С. Основы комбинаторной топологии. М. Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1947.

MSC 65M60

Periodic data of polar 2-diffeomorphisms with one saddle orbit

E.V. Nozdrinova¹, O.V. Pochinka¹

National Research University Higher School of Economics

Abstract: In this paper we consider polar diffeomorphisms of a surface, that is, diffeomorphisms having a unique sink and a unique source periodic orbit. A classical example of such a diffeomorphism is the "source-sink" diffeomorphism, which does not have saddle points and exists only on a two-dimensional sphere. However, the addition of even a one saddle orbit will significantly expand the class of the polar diffeomorphisms on surfaces. In particular, in this paper the authors proved that polar diffeomorphisms with exactly one saddle orbit there are on arbitrary surface and the saddle orbit always has a negative orientation type. In addition, all possible types of periodic data for such polar diffeomorphisms are established.

Keywords: periodic data, polar diffeomorphism, surface

References

1. Borisovich Yu. G., Bliznyakov N. M. Izrailevich, Y. A., Fomenko T. N. Vvedenie v topologiyu [Introduction to the topology]. M.: Higher school. 1980. 296 p.
2. Grines V.Z., Kapkaeva S.Kh., Pochinka O.V. Trekhtsvetnyy graf kak polnyy topologicheskiy invariant dlya gradientno-podobnykh diffeomorfizmov poverkhnostey [A three-colour graph as a complete topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of surfaces] // Matematicheskiy sbornik [Sbornik Mathematics]. 2014. Vol. 205. No. 10. P. 19-46.
3. V. Grines, D. Malyshev, O. Pochinka, S. Zinina. Efficient Algorithms for the Recognition of Topologically Conjugate Gradient-like Diffeomorphisms. Regular and Chaotic Dynamics, 2016, Vol. 21, No. 2, pp. 189–203.
4. Grines V., Medvedev T., Pochinka O. Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds. Springer International Publishing Switzerland. 2016. 364 p.
5. Kosnevski H. Nachal'nyy kurs algebraicheskoy topologii [Basic course in algebraic topology]. Moscow. World. 1983. 304 c.
6. Palis J., de Melo W. Geometricheskaya teoriya dinamicheskikh sistem [Geometric Theory of Dynamical Systems]. An Introduction M. World. 1986. 301 c.
7. Smale, S. Differentsirueme dinamicheskie sistem [Differentiable dynamical systems]. (Russian) Uspehi Mat. Nauk. 1970. V. 25. No. 1 (151), 113–185.
8. L. S. Pontryagin. Differentsirueme dinamicheskie sistem [Foundations of combinatorial topology]. M. State publishing house of theoretical technical literature. 1947.