XIII Международная научная конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании", Саранск, 12-16 июля 2017.
XIII International scientific conference "Differential equations and their applications in mathematical modeling", Saransk, July 12-16, 2017.

УДК 514.7

О классификации полных аффинных слоений относительно сильной трансверсальной эквивалентности *

Н.И. Жукова

Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"

Аннотация: Исследуются аффинные слоения, то есть слоения, допускающие в качестве трансверсальной структуры аффинную геометрию A^q, где $q \geq 1$. Рассматривается сильная трансверсальная эквивалентность полных аффинных слоений, являющаяся более тонким понятием, чем трансверсальная эквивалентность слоений в смысле Молино. Классификация полных аффинных слоений коразмерности q относительно сильной трансверсальной эквивалентности сведена к классификации с точностью до сопряженности счетных подгрупп аффинной группы $Aff(A^q)$. Показано, что каждый такой класс эквивалентности содержит двумерное надстроечное слоение на многообразии, являющемся пространством Эленберга–Маклейна типа $K(\pi, 1)$.

Ключевые слова: слоение, расслоение Серра, сильная трансверсальная эквивалентность слоений, трансверсально аффинное слоение, глобальная группа голономии

Исследуются аффинные слоения (M, F) произвольной коразмерности $q \geq 1$ на n-мерных многообразиях M, то есть слоения, допускающие в качестве трансверсальной структуры аффинную геометрию $Aff(A^q)$. Решается задача классификации полных аффинных слоений относительно сильной трансверсальной эквивалентности.

Мы приводим строгие определения и представляем основные рещультаты.

Аффинное слоение Через A^q обозначается q-мерное аффинное пространство, а через $Aff(A^q)$ — группа Ли всех его аффинных преобразований. Как известно, $Aff(A^q)$ является полупрямым произведением абелевой нормальной подгруппы $\mathbb{R}^q$ и подгруппы, изоморфной общей линейной группе $GL(q, \mathbb{R})$.

$(Aff(A^q), A^q)$-*коциклом* называется семейство $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in J}$ такое, что:

1) $\{U_i \,|\, i \in J\}$ — открытое покрытие n-мерного многообразия M, $0 < q < n$;

2) $f_i : U_i \to A^q$ — субмерсии со связными слоями в аффинное пространство A^q;

3) если $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, где $i, j \in J$, то существует аффинное преобразование $f \in Aff(A^q)$, сужение которого $\gamma_{ij} := f|_{f_j(U_i \cap U_j)}$ удовлетворяет равенству $f_i = \gamma_{ij} \circ f_j$ на пересечении $U_i \cap U_j$.

Заметим, что из условия 3) вытекает, что, если $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$, где $i, j, k \in J$, то на пересечении $U_i \cap U_j \cap U_k$ выполняется равенство $\gamma_{ik} = \gamma_{ij} \circ \gamma_{jk}$.

Максимальный по включению $(Aff(A^q), A^q)$-коцикл $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in J}$, обладающий указанными выше свойствами, определяет новую топологию Ω на M, базой которой является множество слоев всех субмерсий f_i. Компоненты линейной связности топологического пространства (M, Ω) образуют разбиение многообразия M, которое обозначается через $F = \{L_\alpha | \alpha \in A\}$ и называется *трансверсально аффинным слоением*, которое для краткости называется *аффинным слоением*, заданным $(Aff(A^q), A^q)$-коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in J}$, а L_α, $\alpha \in A$, называются слоями этого слоения.

Любой $(Aff(A^q), A^q)$-коцикл содержится в единственном максимальном $(Aff(A^q), A^q)$-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (Грант № 17-11-01041).

коцикле, поэтому для задания слоения (M, F) достаточно задать какой-либо $(Aff(A^q), A^q)$-коцикл, обладающий свойствами 1) – 3).

Аффинное слоение (M, F) коразмерности q можно рассматривать как картаново слоение типа (G, H), где $G = Aff(A^q)$, $H = GL(q, \mathbb{R})$, имеющее нулевую трансверсальную кривизну [1], [2].

Аффинное слоение называется *полныи*, если оно является полным, рассматриваемое как картаново слоение [2].

Расслоения Серра и сильная трансверсальная эквивалентность слоений

Напомним, что расслоением Серра называется тройка (X, p, B), где $p : X \to B$ — непрерывное сюръективное отображение топологических пространств, обладающее свойством накрывающей гомотопии:

для любого непрерывного отображения $f : K \to X$ конечного полиэдра K и любой гомотопии $h : K \times I \to B$, $I = [0, 1]$, такой, что $p \circ f = h|_{K \times \{0\}}$, существует гомотопия $k : K \times I \to X$, для которой

$$p(k(x,t)) = h(x,t), \quad k(x,0) = f(x) \ \forall x \in K, \forall t \in I.$$

Как известно, для расслоений Серра можно построить точную гомотопическую последовательность расслоения.

Понятие трансверсальной эквивалентности гладких слоений, введено Молино [3]. Мы следующим образом усилили это понятие [4, Определение 1.1].

Определение 1. *Два гладких слоения (M, F) и (M_1, F_1) мы называем сильно трансверсально эквивалентными, если существуют слоение $(\mathbb{M}, \mathbb{F})$ и субмерсии со связными слоями $p : \mathbb{M} \to M$ и $p_1 : \mathbb{M} \to M_1$, образующие расслоения Серра, такие, что:*

$$\mathbb{F} = \{p^{-1}(L) | L \in F\} = \{p_1^{-1}(L_1) | L_1 \in F_1\}$$

Замечание 1. *Определение 1 сильной трансверсальной эквивалентности слоений отличается от определения трансверсальной эквивалентности слоений в смысле Молино [3] дополнительным требованием, чтобы субмерсии со связными слоями $p : \mathbb{M} \to M$ и $p_1 : \mathbb{M} \to M_1$ образовывали расслоения Серра.*

Нами доказано [4, Предложение 1.1], что отношение сильной трансверсальной эквивалентности слоений действительно является отношением эквивалентности.

Напомним, что слоение называется *простым*, если оно образовано слоями некоторой субмерсии. Причина, по которой мы рассматриваем более сильное отношение эквивалентности слоений, чем трансверсальная эквивалентность в смысле Молино, заключается в том, что, как показывают примеры, существуют простые слоения, для которых слоения, поднятые на универсальные накрывающие многообразия, не являются простыми. Нами доказано, что поднятие на накрывающее пространство простого слоения, образованного слоями расслоения Серра, является простым слоением. Этот факт существенно используется при доказательстве Теоремы 3.

Структура аффинных слоений

Далее через $\Gamma(L, x)$ обозначается ростковая группа голономии слоя $L \ni x$ слоения, общепринятая в теории слоений.

Следующая теорема, доказанная с использованием [5, Теорема 2], описывает глобальную структуру полных аффинных слоений.

Теорема 1. *Пусть (M, F) — полное аффинное слоение произвольной коразмерности q на n-мерном многообразии M. Тогда:*

(1) *существует регулярное накрывающее отображение $k : \widehat{M} \to M$ такое, что индуцированное слоение $(\widehat{M}, \widehat{F})$, где $\widehat{F} = k^*F$, образовано слоями тривиального расслоения*

с проекцией $r : \widehat{M} = L_0 \times A^q \to A^q$ на q-мерное аффинное пространство A^q, причем L_0 — многообразие, диффеоморфное любому слою с тривиальной группой голономии слоения (M, F);

(2) *определены подгруппа Ψ аффинной группы $Aff(\mathbb{R}^q)$ и эпиморфизм*

$$\chi : \pi_1(M, x) \to \Psi$$

фундаментальной группы $\pi_1(M, x)$ многообразия M на Ψ, причем группа накрывающих преобразований накрытия $k : \widehat{M} \to M$ изоморфна Ψ;

(3) *группа голономии $\Gamma(L, x)$ произвольного слоя $L = L(x)$ слоения (M, F) изоморфна стационарной подгруппе Ψ_b группы Ψ в точке $b \in r(k^{-1}(x)) \in A^q$.*

Определение 2. *Группа Ψ, удовлетворяющая Теореме 1, называется глобальной группой голономии слоения (M, F) и обозначается $\Psi = \alpha(M, F)$.*

Замечание 2. *Группа накрывающих преобразований регулярного накрытия $k : \widehat{M} \to M$ определена однозначно при фиксированной точке $y \in \widehat{M}$. При переходе к другой точке $y' \in \widehat{M}$, $k(y) = k(y')$, группа накрывающих преобразований отображается на себя внутренним автоморфизмом. Отсюда вытекает, что глобальная группа голономии Ψ слоения (M, F), являющаяся подгруппой аффинной группы $Aff(A^q)$, определена с точностью до сопряженности в группе $Aff(A^q)$.*

Счетные подгруппы аффинной группы $Aff(A^q)$ как глобальные группы голономии полных аффинных слоений

Напомним, что топологическое пространство M называется пространством Эленберга–Маклейна, типа $K(\pi, 1)$, если его фундаментальная группа $\pi_1(M, x)$ изоморфна группе π, а все остальные гомотопические группы равны нулю.

Следующая теорема о реализации доказана нами конструктивным путем.

Теорема 2. *Любая счетная подгруппа Ψ аффинной группы $Aff(A^q)$, где $q \geq 1$, реализуется в качестве глобальной группы голономии некоторого двумерного полного аффинного надстроечного слоения (M, F) коразмерности q на многообразии M, являющемся пространством Эленберга-Маклейна типа $K(\pi, 1)$.*

Классификационная теорема

Определение 3. *Пусть $k : \widetilde{M} \to M$ — универсальное накрывающее отображение. Слоение (M, F) называется слоением, накрытым расслоением, если индуцированное слоение $\widetilde{F} = k^*F$ на $\widetilde{M}$ образовано слоями некоторого гладкого расслоения в смысле Серра $p : \widetilde{M} \to N$.*

Как известно, любое локально тривиальное расслоение является расслоением в смысле Серра, поэтому из Теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Любое полное аффинное слоение накрыто расслоеним.*

Обозначим через $\mathfrak{F}_{Aff}$ множество всех полных аффинных слоений.

Через $\mathfrak{P}_{Aff}$ обозначим категории $\mathfrak{P}$, объектами которой являются пары (A^q, Ψ), где Ψ — счетная подгруппа группы $Aff(A^q)$, морфизмами $(A^q, \Psi) \mapsto (A^q, \widehat{\Psi})$ в $\mathfrak{P}_{Aff}$ являются такие пары отображений (d, θ), где d — линейное отображение аффинного пространства A^q в себя, а $\theta : \Psi \to \widehat{\Psi}$ — гомоморфизм групп, удовлетворяющий равенству $d \circ \psi = \theta(\psi) \circ d$ для любого $\psi \in \Psi$.

Положим $\widetilde{\mathfrak{F}}_{Aff} := \{[(M, F)] \,|\, (M, F) \in \mathfrak{F}_{Aff}\}$ и $\widetilde{\mathfrak{P}}_{Aff} := \{[(A^q, \Psi)] \,|\, (A^q, \Psi) \in \mathfrak{P}_{Aff}\}$, где $[(M, F)]$ — класс сильной трансверсальной эквивалентности, содержащий $(M, F) \in \mathfrak{F}_{Aff}$, а $[(A^q, \Psi)]$ — класс объектов, изоморфных (A^q, Ψ) в категории $\mathfrak{P}_{Aff}$.

Следующая теорема является основным результатом данной работы. Она доказана с применением результатов автора, полученных в работе [4] для слоений, накрытых расслоениями в смысле Определения 3.

Теорема 3. *Равенство $\beta(M,F) := (A^q, \Psi)$, где $\Psi = \alpha(M,F)$, определяет отображение*

$$\mathcal{B}_{Aff} : \widetilde{\mathfrak{F}}_{Aff} \to \widetilde{\mathfrak{P}}_{Aff} : [(M,F)] \mapsto [\beta(M,F)] \ \ \forall (M,F) \in \mathfrak{F}_{Aff},$$

являющееся биекцией.

Следующее утверждение, в виду важности сформулированное в виде теоремы, вытекет из Теоремы 3.

Теорема 4. *Два полных аффинных слоения (M_1, F_1) и (M_2, F_2) коразмерности q трансверсально эквивалентны тогда и только тогда, когда их глобальные группы голономий Ψ_1 и Ψ_2, являющиеся подгруппами аффинной группы $Aff(A^q)$, сопряжены в $Aff(A^q)$.*

Замечание 3. *Согласно Теореме 4 глобальная группа голономии Ψ полного аффинного слоения (M,F), определенная с точностью до сопряженности в аффинной группе $Aff(A^q)$, является полным инвариантом этого слоения относительно сильной трансверсальной эквивалентности.*

Из Теоремы 4 вытекает, что все объекты и понятия, определяемые глобальной группой голономии Ψ полного аффинного слоения (M,F), являются инвариантами класса сильно трансверсально эквивалентных аффинных слоений. В частности, мы получаем следуюзие два следствия.

Следствие 2. *Пусть Ψ — глобальная группа голономии полного аффинного слоения (M,F). Тогда алгебра Ли группы Ли $\overline{\Psi}$, равной замыканию подгруппы Ψ в группе Ли $Aff(A^q)$ является инвариантом слоения (M,F) относительно сильной трансверсальной эквивалентности.*

Следствие 3. *Пусть Ψ — глобальная группа голономии полного аффинного слоения (M,F). Если существует замкнутая орбита группы Ψ, то все слоения (M',F'), сильно трансверсально эквивалентные (M,F), имеют замкнутый слой.*

Литература

1. Blumenthal R. Cartan submersions and cartan foliations // Illinois J. Math. 1987. V. 31. P. 327–343.
2. Жукова Н.И. Минимальные множества картановых слоений // Тр. МИАН. 2007. Т. 256. С. 115–147.
3. Molino P. Riemannian foliations. Progress in Math., Boston: Birkhauser. 1988. 339 p.
4. Жукова Н.И. Трансверсальная эквивалентность полных конформных слоений // Проблемы математического анализа. 2015. Выпуск 79. С. 105–118.
5. Жукова Н.И. Глобальные аттракторы полных конформных слоений // Матем. сб. 2012. Т. 203, № 3. С. 79–106.

MSC 53C12

On the classification of complete affine foliations respectively the strong transversal equivalence

N.I. Zhukova
National Research University Higher School of Economics

Abstract: Complete affine foliations (i.e., foliations admitting the affine geometry as the transversal structure) are investigated. The strong transversal equivalence of complete affine foliations is considered, which is a more refined notion than the transverse equivalence of foliations in the sense of Molino. The classification of complete affine foliations with respect to the strong transversal equivalence is reduced to the classification up to conjugacy of countable subgroups of the affine group $Aff(A^q)$. It is shown that each equivalence class contains a two-dimensional suspended foliation on the manifold, which is an Elenberg–MacLane space of type $K(\pi, 1)$.

Keywords: foliation, Serre fibration, strong transversal equivalence of foliations, transversely affine foliation, global holonomy group

References

1. Blumenthal R. Cartan submersions and cartan foliations // Illinois J. Math. 1987. V. 31. P. 327–343.
2. Zhukova N.I. Minimal'nye mnozhestva kartanovykh sloeniy [Minimal sets of Cartan foliations] // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2007. V 256. 105–135.
3. Molino P. Riemannian foliations. Progress in Math. Boston: Birkhauser. 1988. 339 p.
4. Zhukova N.I. Transversal'naya ekvivalentnost' polnykh konformnykh sloeniy [Transverse Equivalence of Complete Conformal Foliations] // Journal of Math. Sci.. 2015. V. 208, No. 1. P. 115–130
5. Zhukova N.I. Global'nye attraktory polnykh konformnykh sloeniy [Global attractors of complete conformal foliations] // Sbornik: Mathematics. 2012. V. 203, No 3. P. 380–405.