XIII Международная научная конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании", Саранск, 12-16 июля 2017.
XIII International scientific conference "Differential equations and their applications in mathematical modeling", Saransk, July 12-16, 2017.

УДК 519.86

Математическое моделирование и оценка нелинейной динамики состояния основных производственных фондов АПК*

В.Г. Шабанова[1], Т.Ф. Мамедова[1], О.Е. Каледин[1]

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва[1]

Аннотация: Предлагается методика анализа экономического процесса на основе трехсекторной модели экономики. В работе подробно описаны составляющие модели, составлена система нелинейных дифференциальных уравнений. Полученное численное решение системы проверено на устойчивость методом асимптотической эквивалентности. В работе представлены результаты численного моделирования системы агропромышленного комплекса на основе базы статистических данных. Сделан вывод о стабильности рассматриваемого процесса.

Ключевые слова: трехсекторная модель, основные производственные фонды, нелинейная динамика, уравнение движения, асимптотическая эквивалентность

1. Введение

Переход АПК к рынку поставил перед современной наукой ряд сложных проблем, связанных с анализом последствий принимаемых решений и прогнозированием функционирования АПК в новых условиях. Решение данных задач во многом связано с разработкой адекватной системы экономико-математических моделей.

Различные подходы к решению данной задачи изложены в работах многочисленных авторов, среди которых можно выделить Колемаева В. А., Горбунова В. К., Сажина Ю. В. Ранее для решения этой задачи и задач прогнозирования математическими методами в экономике решалось с помощью следующих довольно традиционных инструментов:

-факторный анализ;

-корреляционно-регрессионный анализ и т.д.

Каждый из этих методов имеет свои преимущества, однако,и недостатки, которые заключаются вограниченности получаемого результата и трудоемкости их реализации. Также, на практике точностью оценки факторов пренебрегают, выдвигая на первый план относительную значимость влияния того или иного фактора.

Задача нахождения оптимальной траектории функционирования агропромышленного комплекса заключается в определении расчетным путем количественных и качественных характеристик экономической системы и прогнозирования ее будущих состояний. Объектом моделирования является агропромышленный комплекс (АПК) с учетом его многоуровневой структуры. Используемая нами модель включает в свой состав сельскохозяйственный сектор, сектор машиностроения и сектор легкой промышленности.

*Работа выполнена при поддержке Министерства сельского хозяйства Республики Мордовия, договор №7 от 15.09.2016

2. Применение трехсекторной модели АПК для моделирования динамики ОПФ

Пусть уравнение динамического развития экономики в относительных переменных выглядит следующим образом [1]:

$$\frac{dk_i}{dt} = -\lambda_i k_i + \frac{s_i}{\theta_i}(1+\gamma_2)p_2, i = \overline{1,3}.$$

Обозначим основные переменные, фигурирующие в модели:

k_i- основные производственные фонды i-того сектора;

γ_1-значение квоты сектора машиностроения;

s_i-доля i-того сектора в распределении инвестиционных ресурсов;

θ_i-доля i-того сектора в распределении трудовых ресурсов;

$\lambda_i = \mu_i + \nu$,-коэффициент выбытия фондов i-того сектора, где μ_i-коэффициент износа капитала i-того сектора;

p_i-производительность i-того сектора;

A_i-технологический коэффициент i-того сектора;

L_i-трудовые ресурсы i-того сектора;

α_i-коэффициент эластичности по капиталу i-того сектора;

β_i-коэффициент эластичности по труду i-того сектора;

a_i-коэффициент прямых материальных затрат i-того сектора;

y_i-удельный (ввоз-вывоз) продукции соответствующего сектора на одного занятого;

q_i-цена на мировом рынке продукции i-того сектора;

Используя введенные обозначения, сформируем нелинейную оптимизационную модель развития многоотраслевой экономики:

1) **Система нелинейных дифференциальных уравнений**, описывающих динамику основных производственных фондов (ОПФ) и соотношение материального баланса в относительных показателях:

$$\begin{cases} \frac{dk_1}{dt} = -\lambda_1 k_1 + \frac{s_1}{\theta_1}(1+\gamma_2)p_2, \\ \frac{dk_2}{dt} = -\lambda_2 k_2 + \frac{s_2}{\theta_2}(1+\gamma_2)p_2, \\ \frac{dk_3}{dt} = -\lambda_3 k_3 + \frac{s_3}{\theta_3}(1+\gamma_2)p_2, \end{cases} \tag{1}$$

с начальными значениями $k_i(0) = \frac{k_i(0)}{\theta_i L(0)}, i = \overline{1,3}$.

Ограничения на переменные системы имеют вид:

2) Производительность по секторам с учетом трудовых ресурсов: $p_i = \theta_i f_i(k_i), i = \overline{1,3}$.

3) Отраслевая производительность секторов $f_i(k_i) = A_i k_i^{\alpha_i}, i = \overline{1,3}$. Данная функция имеет вид функции Кобба-Дугласа $F(K_i, L_i) = A_i K_i^{\alpha_i} L_i^{\beta_i}$, в рассматриваемом случае $L = 1$.

4) Условие квотирования сектора машиностроения: $y_2 \leq \gamma_2 p_2$.

5) Система балансовых ограничений:

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1, \\ s_1 + s_2 + s_3 = 1, \\ (1-a_1)p_1 = a_2 p_2 + a_3 p_3 + y_1, \\ q_1 y_1 = q_2 + y_2 + q_3 + y_3 \end{cases} \tag{2}$$

в которую входят соответственно трудовой, инвестиционный, материальный и внешнеторговый балансы, причем $s_i \geq 0, \theta_i \geq 0$.

Экономический смысл имеют лишь неотрицательные решения системы.

С помощью представленной модели предполагается решить задачу управления динамикой основных производственных фондов отрасли.

На основе имеющихся статистических данных в таблице 1, определим основные показатели производства. Для этого проведем регрессионный и корреляционный анализ данных.

Таблица 1. База статистических данных

Год	Валовый располагаемый доход, Y	Фактическое конечное потребление,C	Валовые сбережения,I	Капитал,K	Количество занятых в отрасли,L
2004	591966	499761	92199	2830115	28260
2005	615772	526784	88982	2887131	27630
2006	646627	554791	91837	2963986	27422
2007	689148	580508	108643	3047664	27638
2008	725059	608369	116692	3135036	27910
2009	774818	649179	125641	3283962	28168
2010	824812	682144	142670	3347802	28660
2011	882775	724274	158503	3480794	28936
2012	920508	774147	146363	3711077	29348
2013	968466	821912	146558	3913115	29724
2014	1024528	867090	157443	4072979	30058
2015	1084998	919627	165372	4288172	30265

В рамках рассматриваемой задачи система уравнений (1) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\lambda_1 x_1 + \frac{s_1}{\theta_1}(1+\gamma_2)p_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -\lambda_2 x_2 + s_2(1+\gamma_2)A_2 x_2^{a_2}, \\ \frac{dx_3}{dt} = -\lambda_3 x_3 + \frac{s_3}{\theta_3}(1+\gamma_2)p_2, \end{cases} \tag{3}$$

Для записи данной системы в численном выражении осуществим расчет экзогенных и начальных эндогенных параметров модели в рамках рассматриваемой задачи[3,4]. К ним относятся:

1) Коэффициенты α_i (эластичности по капиталу) и β_i (эластичности по труду) функций Кобба-Дугласа, а так же вид самих функции, с учетом нейтрального технологического прогресса;

2) Коэффициенты прямых материальных затрат a_i;

3) Начальная доля инвестиций s_i и трудовых ресурсов θ_i определяются как параметры отраслевой структуры в инвестиционных ресурсах и данных о предложении труда по

секторам на данный момент времени;

4) Начальные и стационарные значения фондовооруженностей.

Рассмотрим степенную производственную функцию, на которой базируется оптимизационная модель экономического роста:

$$p(k,l) = Ak^{a_1}l^{a_2}, \tag{4}$$

где A – технологический коэффициент, a_1 и a_2 – коэффициенты эластичности по капиталу и труду соответственно. В результате проведенного статистического анализа получено значение данных коэффициентов для определения окончательного вида производственных функций.

Тогда в рассматриваемой нами задаче экономики агропромышленного комплекса, состоящей из трех отраслей, из формулы (4)данные функции будут иметь вид:

1) $p_1(k,l) = 0,48k^{0,62}l^{0,49}$ — функция, отражающая объём производства отрасли сельского хозяйства;

2) $p_2(k,l) = 0,52k^{0,62}l^{0,5}$ — функция, отражающая объём производства отраслей и служб, обеспечивающих сельское хозяйство средствами производства и материальными ресурсами;

3) $p_3(k,l) = 0,61k^{0,61}l^{0,48}$ — функция, отражающая объём производства отраслей, которые занимаются переработкой сельскохозяйственного сырья.

Таким образом, определив конкретный вид производственных функций, с учетом выполнения системы балансовых ограничений и условий модели, подставим полученные значения фактического распределения труда θ_i, инвестиций по секторам s_i, а также значение для квоты фондосоздающего сектора y_1 (в данном случае выбирается максимальной). Тогда в численном выражении система (3) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -0,051x_1 + 0,38x_2^{0,62}, \\ \frac{dx_2}{dt} = -0,066x_2 + 0,8x_2^{0,62} \\ \frac{dx_3}{dt} = -0,047x_3 + 0,48x_2^{0,62}. \end{cases} \tag{5}$$

Численное решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (5), описывающих динамику основных производственных фондов АПК и соотношение материального баланса в относительных показателях представлено в виде графика на рисунке 1.

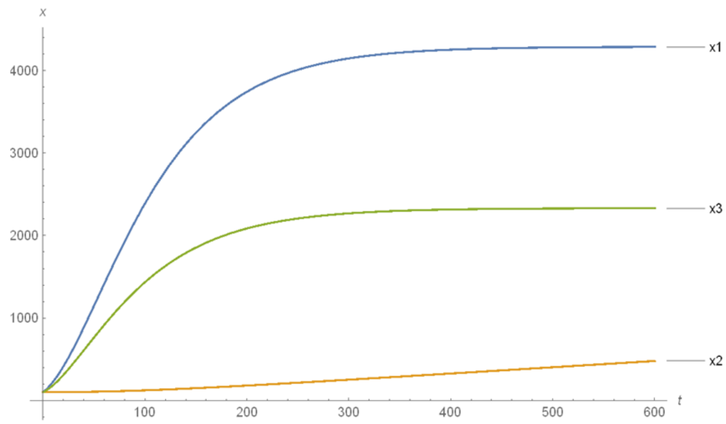

Рис. 1. – Динамика основных производственных фондов

Из построенного графика видно, что направление динамики основных производственных фондов по секторам положительно. Наблюдалось малое убывание капитала в секторе машиностроения на начальном отрезке времени. Таким образом, представленная модель трехсекторной экономики позволяет отслеживать состояния экономической системы с целью управления этим процессом в дальнейшем.

3. Качественное исследование трехсекторной модели АПК методом сравнения Е.В. Воскресенского

Для качественного исследования полученного решения рассматриваемой системы дифференциальных нелинейных уравнений на устойчивость, применим метод асимптотической эквивалентности Е. В. Воскресенского[5].

Рассмотрим следующие дифференциальные уравнения:

$$\dot{x} = A(t)x + f(t,x), \tag{6}$$

$$\dot{y} = A(t)y, \tag{7}$$

где $A(\cdot) : [T; +\infty) \to Hom(R^n, R^n), f \in C^{(0,1)}(R^1_+ \times R^n, R^n)$..

Предположим, что решение $x(t : t_0, x_0)$ уравнения (6) существует для всех начальных условиях $(t_0, x_0) \in T \times R^n$ и $t \in T, T = [0, +\infty)$,причем имеется следующее нулевое решение $x(t) = 0$.

Тогда рассмотрим множества $N_0 \subseteq M \subseteq M_0 \subseteq \overline{M_0} \subseteq N$,где $N = \{1, 2, ..., n\}$.

I. Этап 1 включает выбор уравнения сравнения (7) и проверку условий метода сравнения.

1. Аналитический подбор уравнения сравнения вида (7).

2. Нахождение фундаментальной матрицы решений линейной системы вида $Y(t) = (y_{ij}(t))$, где $i, j = \overline{1, n}, Y(t_0) = E, t_0 \in [T_0, +\infty), T_0 \geq T$.

3. Построение обратной матрицы вида $Y^{-1}(s) = (y^{ij}(s)), i, , j = \overline{1, n}$.

4. Выбор неубывающих ограничивающих функций нелинейной части системы (6)

$$|f_i(t, x_j, ..., x_n)| \leq \lambda_j(t, |x_{j_1}|, ..., |x_{j_q}, \forall j \in N, \{j_1, ..., j_q\} \in m_0, \lambda_j(t, r_1, ..., r_i, ..., r_q) \leq$$

$\leq \lambda_j(t, \overline{r_1}, ..., \overline{r_i}, ..., \overline{r_q}), r_i \leq \overline{r_i}, i = \overline{1, q}$ при всех $t \in [T, +\infty)$.

5. Построение эталонных функций сравнения. На данном этапе функции $\mu_i : [T; +\infty) \to R^1_+, m_i : [T; +\infty) \to R^1_+, R^1_+ = [0, +\infty)$, удовлетворяют неравенствам $\mu_i \geq \max\limits_{j \in N_0}\{|y_{ij}(t)|\}, T_0 \leq t_0 \leq t < +\infty, i \in M_0$, если $N_0 \neq 0, j \in N_0$ и $\mu_i(t) \geq 0$ в том случае, если $N_0 = 0, i \in M_0, m_i(t) \geq \max\{\max\limits_{j \in \overline{M}_0}\{|y_{ij}(t)|\}, \mu_i(t)\}, T_0 \leq t_0 \leq t < +\infty, i \in M_0, |\phi_i(t)| \leq cm_i(t), i = \overline{1, q}, \phi \in C([T; +\infty], R^n)$.

6. Проверка на равномерную сходимость несобственного интеграла по t при $c \to 0, \mu_i(t) \to 0, \forall t \in [T; +\infty), \forall i \in M_0$ на любом компакте из $[T; +\infty)$ для выражения:

$$J_i(t, \phi) = \int\limits_t^{t_0} \sum_{j \in M; k \in B} y_{ik}(t) y^{jk}(s) f_j(s, \phi(s)) ds - \int\limits_t^{+\infty} \sum_{j \in N; k \in B} y_{ik}(t) y^{jk}(s) f_j(s, \phi(s)) ds,$$

где $B = N \backslash M, J_i(t, \phi)$ которое существует $\forall i \in N, c \in R^1_+$ и $J_i(t, \phi) = o(\mu_i(t))$ при $t \to +\infty$ и $\forall i \in M_0$.

7. Построение уравнения сравнения и нахождение его решений, определенных на любом компакте из $[T; +\infty)$:

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{k,j \in N} |y^{jk}(t)| \lambda_j(t, zm(t)), \tag{8}$$

При выполнении для уравнений (6) и (7) пунктов 2-7,получаем их асимптотическую эквивалентность по Брауеру.

Таким образом, рассматриваемая в задаче система нелинейных дифференциальных уравнений (3) асимптотически устойчива по переменным x_1, x_2, x_3 согласно данному алгоритму.

Данное заключение позволяет сделать вывод о стабильности рассматриваемого процесса.

Литература

1. Колемаев В. А. Экономико-математическое моделирование. – М: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. 220 с.

2. Горбунов В.К., Крылов В.П. Оценка эффективности основного капитала предприятий методом производственных функций//Экономика региона. 2015. № 3 (43). С. 334 – 347.

3. Шабанова В.Г., Мамедова Т.Ф., Шабанов Г.И. Модель управления финансово-экономической деятельностью производственного предприятия агропромышленного комплекса// Фундаментальные исследования. 2016. № 3(1). С. 67 – 71.

4. Шабанова В.Г., Шабанов Г.И., Мамедова Т.Ф. Обработка экспериментальных данных в автоматизированных системах принятия решений // Внергоэффективные и ресурсосберегающие технологии и системы: сб. науч. тр. Саранск, 2016. С. 460 – 462.

5. Мамедова Т.Ф., Егорова Д.К., Десяев Е.В. Анализ устойчивости математической модели Лукаса по части переменных// Журнал Средневолжского математического общества. Т. 13. № 3. С. 30 – 36.

MSC 34D20

Mathematical modeling and assessment of nonlinear dynamics of the state of basic production assets of AIC

V.G. Shabanova[1], T.F. Mamedova[1], O.E. Kaledin[1]
Ogarev Mordovia State University[1]

Abstract: A technique for analyzing the economic process on the basis of a three-sector model of the economy is proposed. In the paper, the component models are described in detail, a system of differential equations is composed. The numerical solution of the system obtained is tested for stability by the method of asymptotic equivalence. The paper presents the results of numerical modeling of the agro-industrial complex system based on the statistical database. Conclusion about the stability of the process is done.

Keywords: three-sector model, basic production assets, nonlinear dynamics, equation of motion, asymptotic equivalence.

References

1. Kolemaev V.A.*Ekonomiko-matematicheskoe modelirovanie* [Economic-mathematical modeling]. M.: UNITY-DANA Publ., 2005. 220 p.

2. Gorbunov V.K., Krylov V.P. Region. *Ocenka ehffektivnosti osnovnogo kapitala predpriyatij metodom proizvodstvennyh funkcij* [Region Effective Production Assets and Their Assessment By The Production Function Method],2015.No.3 (43). Pp. 334-347.

3. Shabanova V.G., Mamedova T.F., Shabanov G.I. *Model' upravleniya finansovo-ehkonomicheskoj deyatel'nost'yu proizvodstvennogo predpriyatiya agropromyshlennogo kompleksa* [Model of management of financial and economic activities of a manufacturing enterprise of the agro-industrial complex].Fundamental research. 2016, No. 3 – 1. Pp. 67-71.

4. Shabanova V.G., Shabanov G.I., Mamedova T.F. *Obrabotka ehksperimental'nyh dannyh v avtomatizirovannyh sistemah prinyatiya reshenij* [Processing of experimental data in automated decision-making systems].Energy-efficient and resource-saving technologies and systems.Saransk, 2016. Pp. 460-462.

5. Mamedova T.F., Egorova D.K., Desyaev E.V.*Analiz ustojchivosti matematicheskoj modeli Lukasa po chasti peremennyh* [Stability analysis of a mathematical model of Lucas some of the variables].Journal of the Middle Volga Mathematical Society. Vol 13. № 3. Pp. 30-36.