УДК 517.9

Об аттракторах и репеллерах коразмерности один*

В.З. Гринес[1], Е.Д. Куренков[1]

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики (Нижний Новгород) [1]

Аннотация: Настоящая работа посвящена изучению динамики ограничения гладких A-эндоморфизмов замкнутых многообразий размерности большей единицы на базисные множества коразмерности один в предположении, что эти множества являются топологическими подмногообразиями и имеют тип $(n-1,1)$ или $(n,0)$.

Ключевые слова: эндоморфизм, аксиома A, базисные множества.

Под C^r-эндоморфизмом гладкого замкнутого связного многообразия M^n понимается гладкое сюрьективное отображение класса C^r, $r \geqslant 1$. Если эндоморфизм f обладает обратным отображением класса C^r, то он называется C^r-диффеоморфизмом.

Пусть $f\colon M^n \to M^n$ эндоморфизм класса C^r $(r \geqslant 1)$, заданный на замкнутом многообразии M^n, снабженном римановой метрикой. Для любой точки $x \in M^n$ существует, вообще говоря, бесконечное множество последовательностей вида $\bar{x} = \{x_i \in M^n \mid x_0 = x, f(x_i) = x_{i+1}, i \in \mathbb{Z}\}$. Каждую из таких последовательностей будем называть частной траекторией точки x.

Пусть $\Lambda \subset M^n$ замкнутое f-инвариантное (инвариантное относительно эндоморфизма f) множество, то есть $f(\Lambda) = \Lambda$.

Определение 1. Множество Λ эндоморфизма $f\colon M^n \to M^n$ называется гиперболическим, если существуют константы $C > 0$, $0 < \lambda < 1$ такие, что для любой частной траектории $\bar{x} \subset \Lambda$ точки x существует непрерывно зависящее от частной траектории разложение касательного подрасслоения $T_{\bar{x}}M^n$ в прямую сумму $T_{\bar{x}}M^n = \bigcup\limits_{x_i \in \bar{x}} E^s_{x_i,\bar{x}} \oplus E^u_{x_i,\bar{x}}$ такое, что:

1. $Df(E^s_{x_i,\bar{x}}) = E^s_{x_{i+1},\bar{x}}$, $Df(E^u_{x_i,\bar{x}}) = E^u_{x_{i+1},\bar{x}}$, где $E^s_{x_i,\bar{x}}, E^u_{x_i,\bar{x}} \subset T_{x_i}M^n$;
2. $\|Df^k(v)\| \leqslant C\lambda^k\|v\|$, для любых $k \geqslant 0, i \in \mathbb{Z}$, $v \in E^s_{x_i,\bar{x}}$;
3. $\|Df^k(v)\| \geqslant (1/C)\lambda^{-k}\|v\|$, для любых $k \geqslant 0, i \in \mathbb{Z}$, $v \in E^u_{x_i,\bar{x}}$.

В работе [1] для эндоморфизмов было предложено обобщение аксиомы A, введенной С. Смейлом в [2] для диффеоморфизмов.

Определение 2. Говорят, что эндоморфизм $f\colon M^n \to M^n$ удовлетворяет аксиоме A (является A-эндоморфизмом), если выполнены следующие условия:

1. неблуждающее множество Ω_f — гиперболично и не содержит критических точек эндоморфизма f;
2. множество периодических точек Per_f эндоморфизма f плотно в неблуждающем множестве Ω_f.

Для A-эндоморфизма, имеет место теорема о спектральном разложении, доказанная в [1], и обобщающая соответствующий результат, полученный С. Смейлом в [2].

*Авторы благодарят Российский научный фонд (проект 17-11-01041) за финансовую поддержку.

Предложение 1. *Пусть эндоморфизм f удовлетворяет аксиоме A. Тогда его неблуждающее множество Ω единственным образом представляется в виде объединения конечного числа непересекающихся замкнутых f-инвариантных подмножеств (называемых базисными множествами) $\Omega = \bigcup_{i=1}^{l} \Omega_i$ таких, что ограничение f на каждое базисное множество является топологически транзитивным.*

Определение 3. Базисное множество Ω_i эндоморфизма f называется аттрактором, если существует его замкнутая окрестность U такая, что $f(U) \subset \operatorname{Int} U$ и $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} f^n(U) = \Omega_i$.

Определение 4. Базисное множество Ω_i эндоморфизма f называется репеллером, если существует его открытая окрестность U такая, что $\operatorname{cl}(U) \subset f(U)$ и $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U) = \Omega_i$.

Следующее определение принадлежит М. Шубу [3].

Определение 5. C^r-эндоморфизм $f\colon M^n \to M^n$ называется растягивающим, если существуют константы $C > 0$ и $\lambda > 1$ такие что $\|Df^n(v)\| \geqslant C\lambda^n\|v\|$ для любого $v \in TM^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Наличие гладкой структуры на многообразии M^n не является обязательным условием для того, чтобы задать растягивающий эндоморфизм. Определение растягивающего эндоморфизма, заданного на произвольном метрическом пространстве было предложено в книге [4].

Определение 6. Непрерывное отображение $f\colon X \to X$ метрического пространства X называется растягивающим, если существуют такие константы $\varepsilon > 0$ и $\mu > 1$, что для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, $\rho(x, y) < \varepsilon$ выполняется неравенство $\rho(f(x), f(y)) > \mu\rho(x, y)$.

В том случае, когда X является C^1-гладким компактным многообразием, и f является C^1-гладким, из определения 6 следует определение 5 (см. [4]).

Из определения 5 следует, что объемлющее многообразие M^n растягивающего эндоморфизма f является гиперболическим множеством. Более того, в работе [3] доказано, что если M^n компактно, то периодические точки растягивающего эндоморфизма f плотны в M^n. Таким образом, любой растягивающий эндоморфизм компактного многообразия в смысле определения 5 автоматически удовлетворяет аксиоме A, а его неблуждающее множество совпадает со всем объемлющим многообразием. В той же работе было показано, что любое гладкое компактное многообразие, допускающее растягивающий эндоморфизм, имеет эйлерову характеристику равную нулю, а его универсальное накрывающее пространство диффеоморфно $\mathbb{R}^n$. Если компактное многообразие M^n является плоским, то, как следует из работы [5], на нем существует растягивающий эндоморфизм.

В работе [3] было показано, что если многообразие M^n диффеоморфно n-мерному тору $\mathbb{T}^n$, то растягивающий эндоморфизм f топологически сопряжен с алгебраическим растягивающим автоморфизмом этого тора.

Определение 7. Эндоморфизм $f\colon M^n \to M^n$, называется эндоморфизмом Аносова, если все объемлющее многообразие M^n является гиперболическим множеством эндомофизма f.

Из определения 7 следует, что растягивающий эндоморфизм является частным случаем аносовского.

Наряду с растягивающими эндоморфизмами примерами эндоморфизмов, для которых объемлющее многообразие является единственным базисным множеством, являются аносовские алгебраические эндоморфизмы n-мерного тора такие, что задающие их матрицы $A_{n\times n}$ имеют собственные значения, по модулю как большие единицы, так и меньшие единицы и не имеют собственных значений, модуль которых равен единице.

Как известно произвольный диффеоморфизм Аносова, заданный на n-мерном торе сопряжен с алгебраическим гиперболическим автоморфизмом [6–8]. Что же касается аносовских эндоморфизмов не являющихся диффеоморфизмами и растягивающими эндоморфизмами, то такой результат, вообще говоря, не имеет места, что следует из работ [1], [11]. Более того, в работе [9] было показано, что во множестве эндоморфизмов Аносова на n-мерном торе множество эндоморфизмов, несопряженных с алгебраическим, образуют массивное множество. Таким образом, вопрос о том, является ли объемлющее многообразие неблуждающим множеством любого аносовского эндоморфизма, остается открытым.

В силу [10] и [3] диффеоморфизмы Аносова и растягивающие эндоморфизмы структурно устойчивы. Однако Ф. Пшетыцким [1] и независимо Р. Манэ и Ч. Пью [11] было доказано, что аносовские эндоморфизмы, отличные от растягивающих и диффеоморфизмов, уже не являются структурно устойчивыми.

Для базисного множества Λ эндоморфизма $f\colon M^n \to M^n$, удовлетворяющего аксиоме A, пару чисел (a, b), где a размерность $E^u_{x,\bar{x}}$, b размерность $E^s_{x,\bar{x}}$, $x \in \Lambda$, назовем типом множества Λ.

Основным результатом настоящей работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть базисное множество Λ есть аттрактор A-эндоморфизма $f\colon M^n \to M^n$, имеет тип $(n-1, 1)$ и является замкнутым компактным подмногообразием коразмерности один многообразия M^n. Тогда:*

1) Λ является гладким подмногообразием;

2) ограничение эндоморфизма f на Λ является растягивающим эндоморфизмом.

Теорема 2. *Пусть базисное множество Λ A-эндоморфизма $f\colon M^n \to M^n$ имеет тип $(n, 0)$ и является замкнутым подмногообразием коразмерности один многообразия M^n. Тогда:*

1) Λ является репеллером;

2) ограничение эндоморфизма f на Λ является растягивающим эндоморфизмом.

Замечание. В условиях теоремы 2 базисное множество может быть, вообще говоря негладко вложенным, поэтому растягивающий эндоморфизм в теореме 2 понимается в смысле определения 6.

Литература

1. Przytycki F. Anosov endomorphisms // Studia mathematica. 1976. T. 3. №. 58. C. 249-285.

2. Smale S. Differentiable dynamical systems // Bulletin of the American mathematical Society. 1967. T. 73. №. 6. C. 747-817.

3. Shub M., Sullivan D. Expanding endomorphisms of the circle revisited // Ergodic Theory and Dynamical Systems. 1985. T. 5. №. 02. C. 285-289.

4. Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в теорию динамических систем. М.: МЦНМО. 2005.

5. Epstein D., Shub M. Expanding endomorphisms of flat manifolds // Topology. 1968. T. 7. №. 2. C. 139-141.

6. Franks J. Anosov diffeomorphisms // "Global Analisys". Proc. Symp. in Pure Math. 1970 T. 14 C. 61-93

7. Newhouse S. E. On codimension one Anosov diffeomorphisms // American Journal of Mathematics. 1970. T. 92. №. 3. C. 761-770.

8. Manning A. There are no new Anosov diffeomorphisms on tori // American Journal of Mathematics. 1974. T. 96. №. 3. C. 422-429.

9. Zhang M. On the topologically conjugate classes of Anosov endomorphisms on tori // Chin Ann Math Ser B. 1989. T. 10. C. 416-425.

10. Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 1967. Т. 90. С. 3-210.

11. Mañé R., Pugh C. Stability of endomorphisms // Lecture Notes in Math. 1975. T. 468. C. 175-188.

MSC 34G10 58D25

On attractors and repellers of codimension one

V.Z. Grines[1], E.D. Kurenkov[1]

National Research University Higher School of Economics (Nizhny Novgorod) [1]

Abstract: The present paper is devoted to the study of the dynamics of the restriction of smooth A-endomorphisms of closed manifolds of dimension greater than one to basic sets of codimension one, under the assumption that these sets are topological submanifolds of type $(n-1,1)$ or $(n,0)$.

Keywords: endomorphism, axiom A, basic set.

References

1. Przytycki F. Anosov endomorphisms // Studia mathematica. 1976. V. 3. No. 58. P. 249-285.
2. Smale S. Differentiable dynamical systems // Bulletin of the American mathematical Society. 1967. V. 73. No. 6. P. 747-817.
3. Shub M., Sullivan D. Expanding endomorphisms of the circle revisited // Ergodic Theory and Dynamical Systems. 1985. V. 5. No. 02. P. 285-289.
4. Katok A. B, Hasselblatt B. Introduction to the modern theory of dynamical systems. Cambridge university press, 1997. V. 54.
5. Epstein D., Shub M. Expanding endomorphisms of flat manifolds // Topology. 1968. V. 7. No. 2. P. 139-141.
6. Franks J. Anosov diffeomorphisms // "Global Analisys". Proc. Symp. in Pure Math. 1970 V. 14 P. 61-93
7. Newhouse S. E. On codimension one Anosov diffeomorphisms // American Journal of Mathematics. 1970. V. 92. No. 3. P. 761-770.
8. Manning A. There are no new Anosov diffeomorphisms on tori // American Journal of Mathematics. 1974. V. 96. No. 3. P. 422-429.
9. Zhang M. On the topologically conjugate classes of Anosov endomorphisms on tori // Chin Ann Math Ser B. 1989. V. 10. P. 416-425.
10. Anosov D. V. Geodezicheskie potoki na mnogoobrazaih otritzatelnoy krivizny [Geodesic flows on negatively curved manifolds] // Trudy Matematicheskogo instituta imeni V. A. Steklova. [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics] 1967. V. 90. P. 3-210.
11. Mañé R., Pugh C. Stability of endomorphisms // Lecture Notes in Math. 1975. V. 468. P. 175-188.