УДК 517.958

Об аналитических методах моделирования теплопередачи в системе "скважина + пласт"

А.О. Сыромясов[1], Т.В. Меньшакова[1]

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет[1]

Аннотация: Модельная задача о передаче тепла от цилиндрической скважины к окружающему ее пласту породы сведена к внешней начально-краевой задаче для уравнения теплопроводности с краевыми условиями третьего рода. Для нее рассматриваются различные варианты геометрии. Приводится обзор основных аналитических методов решения уравнения теплопроводности. Обсуждается эффективность использования указанных методов применительно к поставленной задаче.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, начально-краевая задача, краевые условия третьего рода, аналитические методы решения, интегральные преобразования, разделение переменных, скважина.

1. Постановка задачи

В работах [1]– [3] численно моделируется распространение тепла в пласте породы с тонкой трещиной. В цилиндрическую скважину, расположенную в центре трещины, закачивается вода постоянной температуры. Она начинает проникать в трещину и пласт; кроме того, тепло передается непосредственно от воды частицам горной породы. В итоге распределение температуры постепенно выравнивается.

Для оценки точности численных методов желательно иметь аналитические решения более простых задач, которые могут служить эталонами при сравнении результатов точных и приближенных вычислений. В настоящей работе изучаются аналитические методы решения модельной задачи, при постановке которой приняты три упрощающие гипотезы. Во-первых, жидкость в скважине предполагается неподвижной. Это позволяет в качестве механизма теплопередачи рассматривать только теплопроводность, исключив конвекцию. Во-вторых, термодинамические свойства пласта и трещины считаются одинаковыми, поэтому достаточно рассматривать лишь систему, состоящую лишь из пласта и скважины. В третьих, пласт предполагается бесконечным. Кроме того, как и в упомянутых выше работах, вертикальная протяженность пласта не принимается во внимание.

Строгая постановка задачи такова. Вода в скважине радиуса R с центром в начале координат O имеет температуру $T_C = \text{const}$. Вне скважины температура T подчиняется уравнению теплопроводности

$$\alpha \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T, \tag{1}$$

где α – теплоемкость горной породы, λ – коэффициент теплопроводности, t – время, Δ – лапласиан по пространственным переменным [7].

На границе раздела тепловой поток пропорционален разнице температур скважины и пласта. Пусть β – коэффициент теплоотдачи, $\vec{n}$ и $\vec{r}$ – единичный вектор внешней нормали к границе скважины и радиус-вектор точки наблюдения, соответственно. Тогда

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \beta (T - T_C),\ r = R. \tag{2}$$

В начальный момент времени температура пласта постоянна и отлична от T_C:

$$T|_{t=0} = T_0,\ r > R. \tag{3}$$

Условия на бесконечности могут быть заданы в двух вариантах. Либо при фиксированном t на удалении от скважины температура стремится к первоначальному значению:

$$t \to T_0,\ r \to \infty, \tag{4}$$

либо при фиксированном $\vec{r}$ с течением времени температура стремится к значению T_C:

$$T \to T_C,\ t \to \infty. \tag{5}$$

Кроме того, из физических соображений можно предположить, что при удалении от скважины распределение температуры выравнивается:

$$\nabla T \to \vec{0},\ r \to \infty. \tag{6}$$

Поставленная задача характеризуется большим количеством параметров: α, β, λ, R, T_0, T_C. Для упрощения анализа удобно ввести безразмерные радиус-вектор $\vec{r}^*$, время t^* и температуру T^* согласно формулам

$$\vec{r} = R\vec{r}^*,\ t = \frac{R^2\alpha}{\lambda}t^*,\ T = T_C + (T_0 - T_C)T^*.$$

Кроме того, введем число Био Bi [4] с помощью равенства

$$\mathrm{Bi} = \frac{\beta R}{\lambda}.$$

Подстановка этих соотношений в (1)–(3) дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} &= \Delta^* T^*, \\ T^*\Big|_{t^*=0} &= 1,\ r^* > 1, \\ \frac{\partial T^*}{\partial n^*} &= \mathrm{Bi}\cdot T^*,\ r^* = 1. \end{aligned} \tag{7}$$

Условия (4), (5) на бесконечности принимают вид

$$T^* \to 1,\ r^* \to \infty \qquad \text{or} \qquad T^* \to 0,\ t^* \to \infty, \tag{8}$$

а условие (6) превращается в

$$\nabla^* T^* \to \vec{0}. \tag{9}$$

Из этих уравнений требуется отыскать неизвестную функцию T^*.

2. Геометрия задачи

Очевидно, решение описанной выше задачи зависит не от направления вектора $\vec{r}^*$, а лишь от его длины r^*, т.е. $T^* = T^*(t^*, r^*)$. Поэтому удобно перейти к полярным координатам, взяв в качестве полюса точку O. Тогда лапласиан примет вид

$$\Delta^* = \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}. \tag{10}$$

В дальнейшем будем говорить о ней как о 2D-задаче.

Аналогичная математическая задача поставлена в [8]. Автор упомянутой работы основывал свое решение на понятии подвижного радиуса теплового влияния и дополнительных гипотезах относительно убывания температуры с увеличением r. Однако полученное им выражение для T^* (в наших обозначениях) не удовлетворяет уравнению теплопроводности и может рассматриваться только как приближенное.

Будем рассматривать также 1D-задачу, считая, что тепло распространяется лишь вдоль оси Ox^*, а лапласиан определяется формулой

$$\Delta^* = \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}}.$$

Для этого случая возможны два варианта геометрии. В первом варианте, обозначенном далее как 1Dsym, скважина описывается неравенством $|x^*| \le 1$, а пласт – неравенством $|x^*| > 1$. Искомая температура есть функция $T^*(t^*, x^*)$, четная по x^*; нормальная производная в (7) при $x^* > 0$ есть производная по x^*.

Второй вариант (1Dhalf) наиболее прост. В нем пласт задается неравенством $x^* > 0$, а граница скважины - равенством $x^* = 0$. Как и выше, оператор $\partial/\partial n^*$ заменяется на $\partial/\partial x^*$, но уже нельзя утверждать, что функция $T^*(t^*, x^*)$ четна по x^*.

Все три варианта геометрии показаны на рис. 1.

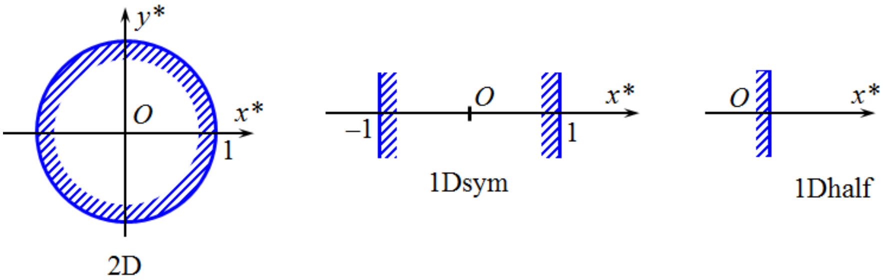

Рис. 1. Геометрия 2D- и 1D-задач

Только решение 2D-задачи, если его удастся найти, может считаться эталонным. Решения 1D-задач полезны для получения оценок величин t, $\vec{r}$, при которых корректны те или иные упрощения, используемые при реализации численных методов.

Например, при решении задачи в системе ANSYS пласт моделируется областью конечных размеров: $R < r \le r_{max}$. Задать на ее внешней границе условие вида (5) затруднительно, поскольку скорость стремления T к нулю неизвестна. Поэтому целесообразно задать краевое условие в виде равенства $T = T_0$, но расчеты вести лишь при тех t, при которых

$$|T(t, r_{\max}) - T_0| < \varepsilon T_0.$$

Здесь ε – выбранная пользователем относительная погрешность. Для оценки $T(t, r_{\max})$ и нужны решения 1D-задач.

3. Решение задачи методом интегральных преобразований

При решении уравнения теплопроводности наиболее часто используются преобразования Фурье и Лапласа, причем каждое из них может производиться как по времени, так и по пространственным координатам. Идея их использования состоит в том, что образ функции зависит от меньшего числа переменных, чем оригинал, и полученное для образа дифференциальное уравнение оказывается проще того, которому удовлетворяет оригинал.

Применяя данные преобразования к частным производным оригинальной функции приходится учитывать начальные и краевые условия задачи. Так, пусть $F(s)$ является изображением некоторой функции $f(u)$ при преобразовании Лапласа: $F(s) = \mathcal{L}\{f(u)\}$. Тогда

$$\mathcal{L}\{f'(u)\} = sF(s) - f(0).$$

Поэтому желательно, чтобы постановка задачи содержала лишь краевые условия первого или второго рода. Однако условие на границе скважины в (7) – третьего рода. Это не позволяет провести преобразования по r^* или x^* так, чтобы получаемые образы производных T^* не содержали бы неизвестных величин.

Например, рассмотрим задачу 1Dhalf и применим к T^* косинус-преобразование Фурье по x^* с параметром p. Обозначим через $F(p)$ результат этого преобразования. Элементарное интегрирование по частям показывает, что тогда $\Delta^* T^*$ перейдет в

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} \cos px^* dx^* = -p^2 F(p) + pT^* \sin px^* \Big|_{x^*=\infty} - \frac{\partial T^*}{\partial x^*}\Big|_{x^*=0}.$$

Значение $\partial T^*/\partial x^*$ при $x^* = 0$ неизвестно, и завершить преобразование не удается.

Аналогичным образом обстоит дело и с преобразованием Лапласа по r^* или x^*.

Итак, интегральные преобразования по пространственным переменным не позволяют упростить задачу. Этот вывод верен для всех рассмотренных ранее вариантов геометрии.

Легко показать, что преобразование Фурье по t^* также не приводит к упрощению.

Пусть L – образ T^* после преобразования Лапласа по времени, s – параметр преобразования. Тогда для задачи 1Dhalf из (7) и (9) получим

$$\frac{d^2 L}{dx^{*2}} = sL - 1; \qquad \frac{dL}{dx^*} = \mathrm{Bi} \cdot L,\ x^* = 0; \qquad \frac{dL}{dx^*} \to 0,\ x^* \to \infty.$$

Отсюда нетрудно получить, что

$$L = \frac{1}{s} - \frac{\mathrm{Bi}}{s(\mathrm{Bi} + \sqrt{s})} e^{-x^* \sqrt{s}}.$$

Воспользовавшись [2] и найдя прообразы для слагаемых L, найдем окончательно:

$$T^*(t^*, x^*) = 1 - \mathrm{erfc} \frac{x^*}{2\sqrt{t^*}} + \exp(\mathrm{Bi} \cdot x^* + \mathrm{Bi}^2 t^*) \cdot \mathrm{erfc}\Big(\mathrm{Bi}\sqrt{t^*} + \frac{x^*}{2\sqrt{t^*}}\Big).$$

Эта функция удовлетворяет обоим условиям (8) при замене r^* на x^*.

Решение задачи 1Dsym не дает ничего принципиально нового по сравнению с 1Dhalf.

Выполнив аналогичные действия для 2D-задачи, найдем

$$T^* = 1 + C \cdot \frac{\exp(-r^{*2}/(4t^*))}{t^*}.$$

Эта функция при произвольном значении константы C удовлетворяет уравнению теплопроводности, начальному условию и требованию (9). Однако невозможно подобрать такую C, чтобы удовлетворить краевому условию третьего рода при всех $t^* > 0$.

Итак, с помощью интегральных преобразований удается получить аналитическое решение лишь 1D-задач.

4. Разделение переменных

Поскольку решение одномерной задачи получено ранее, остановимся на двумерной задаче. Рассмотрим систему (7), в которой лапласиан определяется равенством (10). Будем следовать стандартной процедуре: предположим, что

$$T(t^*, r^*) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t^*) B_n(r^*), \tag{11}$$

тогда для A_n и B_n выполняется условие

$$\frac{1}{A_n}\frac{dA_n}{dt^*} = \frac{1}{B_n}\Delta^* B_n = -\lambda_n^2,$$

числа $\lambda_n > 0$ задают спектр задачи. С точностью до множителя $A_n(t^*) = \exp(-\lambda_n^2 t^*)$, а B_n удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 B_n}{dr^{*2}} + \frac{1}{r^*}\frac{dB_n}{dr^*} = -\lambda_n^2 B_n, \tag{12}$$

общее решение которого есть линейная комбинация функций Бесселя и Неймана:

$$B_n(r^*) = C_1(n)J_0(\lambda_n r^*) + C_2(n)Y_0(\lambda_n r^*).$$

Для определения λ_n присоединим к (12) краевые условия, вытекающие из (7):

$$\frac{dB_n}{dr^*} - \mathrm{Bi}\cdot B_n = 0,\ r^* = 1.$$

В результате получается хорошо изученная задача Штурма – Лиувилля. Чтобы привести ее к более удобному для исследования виду, заменим $B_n(r^*)$ на $F(r^*)/\sqrt{r^*}$. Тогда функция F удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} &\frac{d^2F}{dr^{*2}} + [\mu - q(r^*)]F = 0,\\ &\frac{dF}{dr^*} = \Big(\mathrm{Bi} + \frac{1}{2}\Big)F,\ r^* = 1, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\mu = \lambda_n^2 > 0$ – спектральные числа задачи, $q(r^*) = -1/(4r^{*2})$.

Согласно [5], если в задачах вида (13) функция $q(r^*)$ стремится к нулю при $r^* \to \infty$, то область $(0; +\infty)$ заполнена точками непрерывного спектра. Отсюда следует, что и в нашем конкретном случае отыскать дискретный спектр не удается.

Поэтому вместо (11) следует применить интегральное представление температуры. Используя результаты [5] и проведя ряд упрощений, можно показать, что оно имеет вид:

$$\begin{aligned} &T(t^*, r^*) = \int_0^\infty e^{-\lambda^2 t^*}[J_0(\lambda r^*)\widetilde{Y}_0(\lambda) - Y_0(\lambda r^*)\widetilde{J}_0(\lambda)]f(\lambda)d\lambda,\\ &\widetilde{J}_0(\lambda) = \mathrm{Bi}\cdot J_0(\lambda) + \lambda J_1(\lambda),\ \widetilde{Y}_0(\lambda) = \mathrm{Bi}\cdot Y_0(\lambda) + \lambda Y_1(\lambda). \end{aligned} \tag{14}$$

Заданная таким образом функция удовлетворяет уравнению теплопроводности и краевым условиям третьего рода при произвольной $f(\lambda)$, если только обеспечена сходимость всех фигурирующих в вычислениях несобственных интегралов.

Чтобы удовлетворить начальному условию в (7), следует в (14) подставить $t^* = 0$ и приравнять полученное выражение к 1. В итоге получится уравнение Фредгольма первого рода для определения $f(\lambda)$.

Его решение сопряжено с рядом трудностей. Во-первых, указанная задача некорректна по Адамару, и при ее решении требуется применять метод регуляризации [6]. Во-вторых, пределы изменения параметров r^* и λ бесконечны. Кроме того, ядро уравнения при $\lambda \to \infty$ не стремится к нулю, а значит, несобственный интеграл от ядра расходится. Получить же аналитическое решение данного уравнения не представляется возможным.

Итак, найти "эталонное" аналитическое решение 2D-задачи методом разделения переменных нельзя.

5. Применение инверсии

Проблемой при отыскании распределения температуры является то, что задача (7) – внешняя. Поэтому подход к нахождению T^* может состоять в том, чтобы свести ее к внутренней, выполнив инверсию относительно границы скважины. Для решения вновь полученной задачи следует использовать один из ранее рассмотренных методов (интегральные преобразования или разделение переменных), а затем вновь применить инверсию.

Теоретически такая манипуляция возможна для 2D- и 1Dsym-геометрий. Она определяется равенствами $z = 1/r^*$ и $z = 1/x^*$, соответственно, где z – новая пространственная координата. Но ни в одном из этих случаев инверсия не приводит к аналитическому решению. Поскольку z изменяется в конечных пределах, выполнение преобразований Фурье и Лапласа по этой переменной невозможно. Преобразование по t^* и разделение переменных не дают ничего принципиально нового и сталкиваются с теми же проблемами, что и в исходных внешних задачах.

6. Заключение

Итак, нами сформулирована модельная задача о передаче тепла от скважины к окружающему ее безграничному пласту породы. В ходе ее обезразмеривания установлено, что единственным параметром, влияющим на поведение решения, является число Био.

Рассмотрены двумерный и одномерные варианты геометрии системы "скважина + пласт". Исследована возможность использования преобразований Фурье и Лапласа по пространственным координатам и по времени для построения аналитического решения полученных задач. С этой же целью был применен метод разделения переменных. Для сведения исходной внешней задачи к внутренней выполнялась инверсия относительно границы скважины.

В итоге были получены следующие результаты. Инверсия не приводит к упрощению задачи. Разделение переменных в двумерном случае сводит отыскание поля температуры к решению уравнения Фредгольма первого рода. Выполнение интегральных преобразований по координатам не позволяет добиться успеха из-за краевых условий третьего рода на границе скважины. Аналитическое решение получается лишь в одномерном случае – при выполнении преобразования Лапласа по времени. В дальнейшем это решение может быть использовано для оценки границ применимости численных методов моделирования скважин и окружающих их пластов.

Литература

1. Бобренева Ю. О., Губайдуллин И. М., Жалнин Р. В., Масягин В. Ф. Моделирование температурных полей в вертикальной скважине с техногенной трещиной с использованием адаптивных сеток // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2016): труды междунар. науч. конф. (Архангельск, 28 марта -– 01 апреля 2016 г.). Архангельск, 2016. С. 454—462.

2. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М. : Высшая школа, 1967. 600 с.

3. Масягин В. Ф., Бобренева Ю. О., Губайдуллин И. М., Жалнин Р. В. Применение разрывного метода Галеркина для моделирования температурного поля в вертикальной скважине с трещиной гидроразрыва // Системы управления и информационные технологии. 2016. Т. 63, № 1. С. 13—16.

4. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. М. : Едиториал УРСС, 2003. 784 с.

5. Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Ч. 1. М. : Изд-во иностр. лит-ры, 1960. 276 с.

6. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1979. 285 с.

7. Чекалюк Э. Б. Термодинамика нефтяного пласта. М. : Недра, 1965. 240 с.

8. Чупров И. Ф. Исследование распространения тепла в пласте при радиальном течении горячей жидкости // Изв. вузов. Нефть и газ. 1999. № 5. С. 34–37.

MSC 35K05, 35K20

On analytical methods of heat conduction modelling in the system "well + rock bed"

A.O. Syromyasov[1], T.V. Menshakova[1]

National Research Mordovia State University[1]

Abstract: The model problem of heat transfer from cylindrical well to surrounding rock bed is reduced to external initial-boundary problem for heat conduction equation with boundary conditions of the third kind. For this problem several different types of geometry are taken into account. Basic analytical methods of solution of heat conduction equation are observed. Efficiency of these methods' application to the problem stated is discussed.

Keywords: heat conduction equation, initial-boundary problem, boundary conditions of the third kind, analytical methods of solution, integral transforms, separation of variables, well.

References

1. Bobreneva Ju. O., Gubajdullin I. M, Zhalnin R. V., Masjagin V. F. Modelirovanie temperaturnyh polej v vertikal'noj skvazhine s tehnogennoj treshhinoj s ispol'zovaniem adaptivnyh setok [Modelling of temperature fields in vertical well with anthropogenic fissures by means of adaptive meshes] // Parallel'nye vychislitel'nye tehnologii (PaVT'2016) [Parallel computing technologies (PaCT'2016)]: proceedings of international scientific conference. Arhangel'sk, 2016. P. 454–462. (In Russ.)
2. Lykov A. V. Teorija teploprovodnosti [Theory of heat conduction]. Moscow : High School Publishers, 1967. 600 p. (In Russ.)
3. Masjagin V. F., Bobreneva Ju. O., Gubajdullin I. M, Zhalnin R. V. Primenenie razryvnogo metoda Galerkina dlja modelirovanija temperaturnogo polja v vertikal'noj skvazhine s treshhinoj gidrorazryva [Using Galerkin method for modelling of temperature field in vertical well with hydraulic fracturing fissure] // Sistemy upravlenija i informacionnye tehnologii [Control systems and information technologies]. 2016. Vol. 63, No. 1. P. 13–16. (In Russ.)
4. Samarskij A. A., Vabishhevich P. N. Vychislitel'naja teploperedacha [Computational heat transfer]. Moscow, Editorial URSS, 2003. 784 P. (In Russ.)
5. Titchmarsh E. C. Eigenfunction Expansions Associated with Second-order Differential Equations. Part I. Oxford University Press, London. 1962. 203 p. (In Russ.)
6. Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. Metody resheniya nekorrektnykh zadach [Methods for solving ill-posed problems]. Nauka Publ., Moscow. 1979. 285 p. (In Russ.)
7. Chekaljuk E. B. Termodinamika neftjanogo plasta [Thermodynamics of petroleum reservoirs]. Moscow, Nedra Publishers, 1965. 240 p. (In Russ.)
8. Chuprov I. F. Issledovanie rasprostranenija tepla v plaste pri radial'nom techenii gorjachej zhidkosti [Investigation of heat propagation in petroleum reservoir for the case of radial hot fluid flow] // Izvestija vuzov. Neft' i gaz [Proceedings of high schools. Oil and gas series]. 1999. N 5. P. 34–37. (In Russ.)