УДК 517.91

Применение принципа сравнения к изучению свойств решений дифференциального уравнения Рэлея

Т.А. Горшунова [1]

Московский политехнический университет[1]

Аннотация: Изучается множество решений уравнения Рэлея, стремящихся к нулю при неограниченном возрастании независимой переменной. Приведены условия, при которых множество таких решений образует область в пространстве ограниченных решений. Методом сравнения и прямым методом Ляпунова решается задача о равномерной ограниченности и равномерной асимптотической устойчивости решений уравнения Рэлея.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, уравнение Рэлея, равномерная асимптотическая устойчивость, равномерная ограниченность, функция Ляпунова, метод сравнения.

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$\ddot{u} + F(\dot{u}) + g(u) = 0,$$

представляющее собой уравнение Рэлея, которым описывается различные динамические системы. Это уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = & x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = & -g(x_1) - F(x_2). \end{cases} \tag{1}$$

Пусть $x(t : s, x(s))$ -– решение системы (1) с начальными данными $(s, x(s)) \in [T, +\infty) \times R^2$, $x = colon(x_1, x_2)$.

Можно показать, что если в системе (1) функция $F \in C^{(1)}(R^1, R^1)$, $F(0) \equiv 0$, функция $g(x_1) \equiv x_1$ и $x_2 F(x_2) \leq \dfrac{x_2^2}{2}$ при всех $x_2 \in R^1$, то решение $x(t) \equiv 0$ системы (1) равномерно асимптотически устойчиво.

Доказательство проводится по аналогии с известной теоремой А.М. Ляпунова об асимптотической устойчивости [1] и основано на применении функции Ляпунова.

Рассмотрим функцию $V(t, x) \in C^{(1,1)}([T, +\infty) \times R^2, R^1)$ следующего вида

$$V(t, x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + \int\limits_0^{x_2} F(\eta) d\eta,$$

которая является положительно определённой, допускает в R^2 сильный бесконечно малый высший предел при $||x|| \to +\infty$ и её производная по времени в силу системы (1) является отрицательно определенной при $||x|| \neq 0$. Тогда выполняются все условия теоремы 1.2.1 [2], следовательно, тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ системы (1) равномерно асимптотически устойчиво.

Равномерная асимптотическая устойчивость положения равновесия играет существенную роль при изучении структуры множества решений $x(t : s, x(s))$, притягиваемых к началу координат: $||x(t : s, x(s))|| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Так как при условии, что в системе (1) $F \in C^{(1)}(R^1, R^1)$, $F(0) \equiv 0$, функция $g(x_1) \equiv x_1$ и $x_2 F(x_2) \le \dfrac{x_2^2}{2}$ при всех $x_2 \in R^1$, положение равновесия равномерно асимптотически устойчиво, то на основании теоремы 2 [3], можно утверждать, что при этих условиях множество решений уравнения Рэлея, стремящихся к нулю при неограниченном возрастании независимой переменной, образует открытое и связное множество, т.е. область, в пространстве ограниченных решений.

Рассмотрим возмущённое уравнение Рэлея:

$$\ddot{u} + F(\dot{u}) + g(u) = \varphi(t), \tag{2}$$

где $\varphi \in C([T, +\infty), R^1)$, эквивалентное системе:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = & x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = & -g(x_1) - F(x_2) + \varphi(t). \end{cases} \tag{3}$$

Задача о равномерной ограниченности решений для этого уравнения решается на основании более общих теорем о достаточных условиях равномерной ограниченности решений возмущённых систем дифференциальных уравнений, представленных в работе [4].

Пусть в уравнении (3) функция $g(x_1) \equiv x_1$, а функция F является неубывающей и

$$\int\limits_T^{+\infty} |\varphi(t)| dt = L < +\infty.$$

Тогда все решения уравнения (3) будут равномерно ограничены справа [5] и для этих решений можно указать верхнюю границу.

Если решение $x(t : s, x(s))$ уравнения (3) такое, что $t_0 \ge T$ и $||x_0|| \le \rho$, $\rho > L$, то $||x(t : t_0, x_0)|| \le e\rho$ при всех $t \ge t_0$.

В основе доказательства этого утверждения лежат оценки решений возмущённых дифференциальных уравнений, полученные методом сравнения [6]. В качестве уравнения сравнения рассматривается скалярное уравнение вида $\dfrac{dz}{dt} = |\varphi(t)|$.

Если в уравнении (2) функция F является невозрастающей, то можно показать, что все решения будут равномерно ограничены слева, а если функция F – постоянная, то решения уравнения (2) будут абсолютно равномерно ограничены [5].

Литература

1. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.

2. Горшунова Т. А. Применение принципа сравнения в методах асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений: автореферат диссертации ... канд. физ.-мат. наук. Саранск, 1998. 16 с.

3. Горшунова Т. А. Об О-кривых систем дифференциальных уравнений // Математическое моделирование. – 1997. Т. 9. № 10. – С.12.

4. Горшунова Т. А. Изучение равномерной ограниченности решений нелинейных систем дифференциальных уравнений методом сравнения // Приволжский научный вестник. – 2016. №12-1 (64). – С.31-35.

5. Воскресенский Е. В. Об аттракторах обыкновенных дифференциальных уравнений // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2003. № 4. – С.17–26.

6. Воскресенский Е.В. Асимптотические методы: теория и приложения. – Саранск: СВМО. – 2000. – 300 с.

MSC 34D05

The application of the comparison principle to the study of the properties of solutions of the Rayleigh differential equation

T.A. Gorshunova [1]

Moscow Polytechnic University [1]

Abstract: The set of the solutions of the equation of Rayleigh tending to zero in case of unlimited increase of independent variable is studied. Conditions under which the set of such decisions forms area in space of limited decisions are given. The problem about uniform boundedness and uniform asymptotic stability of solutions of the equation of Rayleigh is solved by method of comparing and a direct method of Lyapunov.

Keywords: differential equations, equation of Rayleigh, the uniform asymptotic stability, the uniform limitation, Lyapunov's function, comparison method.

References

1. Rush N., Abets P., Lalua M. Pryamoy metod Lyapunova v teorii ustoychivosti [A direct method of Lyapunov in the theory of stability]. Moscow, Publishing of the "Mir", 1980. 300 p. (In Russ.)

2. Gorshunova T.A. Primenenie printsipa sravneniya v metodakh asimptoticheskogo integrirovaniya differentsial'nykh uravneniy [Use of the principle of comparison in methods of an asymptotic integration of differential equations]: thesis. ... kand. fiz.-mat. nauk [PhD phys.-math. sci. diss.]. Saransk, 1998. 16 p. (In Russ.)

3. Gorshunova T.A. "[About O-curves of systems of differential equations]" // Matematicheskoe modelirovanie. 1997. V. 9. No. 10. P 12.(In Russ.)

4. Gorshunova T. A. "[Study of the uniform boundedness of solutions of nonlinear systems of differential equations by the method of comparison]" // Privolzhskiy nauchnyy vestnik. 2016. No. 12-1 (64). P. 31-35. (In Russ.)

5. Voskresensky E. V. "[About attractors of ordinary differential equations]"// Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika. 2003. No. 4. P. 17-26. (In Russ.)

6. Voskresensky E. V. Asimptoticheskie metody: teoriya i prilozheniya [Asymptotic methods: theory and appendices]. Saransk, Publishing of the "SVMO" , 2001. 300 p. (In Russ.)