XIII Международная научная конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании", Саранск, 12-16 июля 2017.
XIII International scientific conference "Differential equations and their applications in mathematical modeling", Saransk, July 12-16, 2017.

УДК 517.9

Численные методы в интегральных динамических моделях с нелинейными запаздываниями

А.Н. Тында [1], Д.Н. Сидоров [2], И.Р. Муфтахов [3]

Пензенский государственный университет[1], Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН[2], Главный вычислительный центр ОАО «РЖД»[3]

Аннотация: Работа посвящена численному исследованию интегральных динамических моделей, используемых в макроэкономике, теории восстановления, теории автоматического управления и др. Такие модели описываются линейными и нелинейными интегральными уравнениями Вольтерра и их системами специального вида. В частности, речь идет о нелинейных уравнениях I рода с ядрами, имеющими конечные разрывы вдоль непрерывных кривых, и о системах уравнений, содержащих неизвестные функции в пределах интегрирования. Предлагается семейство численных методов, как прямых, так и итерационных, для решения указанных уравнений. Также предложены численные подходы к решению оптимизационных задач в системах с нелинейными задержками. Также рассмотрена нелинейная модель Вольтерра, возникающая в одной задаче гидроэнергетики.

Ключевые слова: Интегральные уравнения Вольтерра, разрывные ядра, нелинейные задержки, регуляризация, метод Ньютона-Канторовича, адаптивные сетки.

1. Введение

При моделировании макроэкономических и производственных процессов, таких как задачи определения оптимального срока службы производственного оборудования и его замены в производстве, применяются интегральные динамические системы. Также они используются в теории восстановления и математической экологии (см., например, [1, 2]).

Такие системы описываются линейными и нелинейными интегральными уравнениями Вольтерра и их системами специального вида. При этом наиболее полные модели такого класса содержат разного вида временные задержки. В отличии от хорошо изученных динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с задержками, модели, основанные на интегральных и интегро-дифференциальных уравнениях с задержками, остаются недостаточно разработанными. Например, в теории автоматического управления мало исследована интегральная модель нелинейной динамической системы с неизвестными величинами задержки.

В последнее время возрос интерес к одному из применений такого рода моделей, а именно к моделированию оптимального срока службы основного оборудования, как правило с учетом технологических изменений. В экономической теории такие модели известны как *Vintage Capital Models (VCMs)*. Математически модели *VCMs* описываются с помощью нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с неизвестной функцией в пределе интегрирования. Такие модели играют важную роль при изучении экономико-технологических процессов. Первая и самая известная *VCM* с эндогенным сроком службы оборудования была разработана Солоу для изучения макроэкономических процессов. С 1996 года численные модели *VCMs* были предложены в качестве объяснения существующим феноменам в технологичном изменении и качественном уменьшении капитала. Однако, в отличии от других экономико-математических моделей, процессы в моделях *VCMs* были слабо изучены. Некоторый прогресс был достигнут в оптимизации линейной функции полезности, после того как краткосрочные и долгосрочные процессы, возникающие в сетях Солоу и их модификациях, были хорошо изучены. С другой стороны, сети с нелинейной функцией полезности позволяют моделировать изменяемый спрос. Несмотря на большой практический интерес к таким *VCMs*, их оптимальная динамика полностью не изучена [2–4].

2. Постановка задач

Объектом исследования в данной работе являются системы нелинейных интегральных уравнений следующего вида

$$\begin{cases} F_i\left(x(t), \sum\limits_{j=1}^{r} \int\limits_{y_j(t)}^{t} H_{ij}(t,\tau,x(\tau))d\tau\right) = 0, \\ c(t) = \sum\limits_{j=1}^{r} \int\limits_{y_j(t)}^{t} L_j(t,\tau,x(\tau))d\tau, \\ i = \overline{1,r},\ t \in [t_0,T),\ t_0 < T \leqslant \infty, \end{cases} \tag{1}$$

относительно неизвестных функций $x(t), y_1(t), y_2(t), \ldots, y_r(t)$, удовлетворяющих условиям

$$y_j(t) < t,\ y_j(t_0) = Y_j < t_0,\ j = \overline{1,r},\ x(\tau) \equiv \varphi_0(\tau),\ \tau \in (-\infty, t_0], \tag{2}$$

Частным случаем системы (1) является система вида ([8])

$$\begin{cases} x(t) = \int\limits_{y(t)}^{t} H(t,\tau,x(\tau))d\tau, \\ \int\limits_{y(t)}^{t} K(t,\tau,x(\tau))d\tau = f(t), \qquad t \in [t_0,T),\ t_0 < T \leqslant \infty, \\ c(t) = \int\limits_{y(t)}^{t} L(t,\tau,x(\tau))d\tau, \end{cases} \tag{3}$$

с начальными условиями

$$y(t_0) = Y_0 < t_0,\ x(\tau) \equiv \varphi_0(\tau),\ \tau \in (-\infty, t_0],$$

где $f(t)$ — прирост производительности в единицу времени новых рабочих мест, создаваемых в момент t; $x(t)$ — количество новых рабочих мест, создаваемых за единицу времени в момент t; $y(t)$ — временные границы ликвидации устаревших рабочих мест; $c(t)$ — объем выпуска предметов потребления за единицу времени в момент t. Также здесь предполагается, что заданные функции $H(t,\tau,x), K(t,\tau,x), L(t,\tau,x), f(t), \varphi_0(t)$ непрерывны, неотрицательны при $\tau \in (-\infty, T)$, $t \in [t_0, T)$, $x \in [0, \infty)$ и удовлетворяют уравнениям системы (3) в точке $t = t_0$.

В работе Ю. П. Яценко [8] приведена и доказана теорема о существовании и единственности решения системы (3).

Система уравнений (3) имеет тесную связь с системами нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с ядрами, имеющими разрывы вдоль известных кривых [6]:

$$\int\limits_0^t K(t,s,x(s))\,ds = f(t), \quad t \in [0,T],\ f(0) = 0, \tag{4}$$

где

$$K(t,s,x(s)) = \begin{cases} K_1(t,s)G_1(s,x(s)),\ t,s \in m_1, \\ \ \ldots\ \ \ldots\ldots\ldots \\ K_n(t,s)G_n(s,x(s)),\ t,s \in m_n. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $m_i = \{t, s \big| \alpha_{i-1}(t) < s \leqslant \alpha_i(t)\}$, $\alpha_0(t) = 0,\ \alpha_n(t) = t,\ i = \overline{1, n}$, функции $K_i,\ f(t),\ \alpha_i(t)$ имеют непрерывные производные по t при $(t, s) \in \overline{m_i}$, $K_n(t, t) \neq 0$, $\alpha_i(0) = 0, \quad 0 < \alpha_1(t) < \alpha_2(t) < \cdots < \alpha_{n-1}(t) < t$. Функции $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_{n-1}(t)$ должны возрастать как минимум в небольшой окрестности $0 \leq t \leq \tau$.

Методы аналитического и численного исследования таких систем (4)-(5) построены в цикле работ авторов [5–7].

Построение численных методов для систем вида (3) сопряжено с рядом серьезных трудностей. Основная сложность состоит в аппроксимации входящих в систему интегралов квадратурными суммами, так как часть неизвестных функций содержится в нижних пределах интегрирования и длины интервалов интегрирования остаются неизвестными даже при фиксированных значениях $t = t_k$.

В рамках данной работы предполагается построение итерационного метода решения системы вида (3). Между тем, как хорошо известно, при применении итерационных методов важную роль играет выбор достаточно хорошего начального приближения, обеспечивающего сходимость процесса. С целью его определения в работе также будет предложен быстрый прямой численный метод первого порядка точности.

3. Задачи оптимизации

Одним из приложений указанных моделей является, в частности, вопрос моделирования оптимального срока службы основного оборудования предприятия с учетом технологических изменений (*Vintage Capital Models (VCMs)* [2]. В основе модели лежат системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с неизвестной функцией в пределе интегрирования следующего вида:

$$c(t) = \int\limits_{a(t)}^{t} \beta(\tau, t) m(\tau) d\tau, \quad P(t) = \int\limits_{a(t)}^{t} m(\tau) d\tau \tag{6}$$

Нетрудно заметить, что система (6) также является частным случаем задачи (1). Для нее известны несколько постановок оптимизационных задач, одна из которых заключается в следующем: необходимо определить функции $a(t)$ и $m(t)$, $t \in [t_0, T)$, $T < \infty$, максимизирующие функционал:

$$I(a(t), m(t)) = \int\limits_{t_0}^{t} \rho(t) \left[\int\limits_{a(t)}^{t} \beta(\tau, t) m(\tau) d\tau - \lambda(t) m(t) \right] dt \longrightarrow \max_{a,m} \tag{7}$$

при условиях:

$$P(t) = \int\limits_{a(t)}^{t} m(\tau) d(\tau), \tag{8}$$

$$m_{\min}(t) \leqslant m(t) \leqslant M(t), \tag{9}$$

где $m_{\min}(t) = \max\{0, P'(t)\}$,

$$a(t_0) = a_0 \leqslant t_0,\ m(\tau) = m_0(\tau),\ \tau \in [a_0, t_0]. \tag{10}$$

Оптимизационная задача (7)–(10) позволяет максимизировать величину чистого дохода рассматриваемой экономической системы. Здесь $a(t)$ — время, прошедшее с момента ввода в эксплуатацию старейшего оборудования, $m(t)$ — новый капитал, $\beta(\tau, t)$ — удельная производительность, $\lambda(t)$ — удельная стоимость нового оборудования, $P(t)$ — рабочий ресурс, $\rho(t)$ — коэффициент дисконтирования, $0 < \rho(t) \leqslant 1$, $\rho'(t) \leqslant 0$. Производительность $\beta(\tau, t)$ возрастает по переменной τ, так как учитывается научно-технический прогресс. Зависимость

$\beta(\tau, t)$ от текущего времени t позволяет учитывать износ капитала, автономный прогресс и колебания внешних рыночных цен [1]– [4].

Как известно [8], от оптимизационной задачи (7)–(10) можно перейти к эквивалентной задаче, состоящей в решении нелинейного интегрального уравнения следующего вида:

$$\int_t^{b(t)} \rho(\tau)[\beta(t,\tau) - \beta(a(\tau),\tau)]d\tau = \lambda(t)\rho(t), \ t \in [t_0, T) \tag{11}$$

относительно неизвестной функции $a(t)$, где функция $b(t)$, содержащаяся в верхнем пределе интегрирования, имеет вид

$$b(t) = \begin{cases} a^{-1}(t), & t \in [t_0, a(T)], \\ T, & t \in (a(t), T). \end{cases}$$

Во второй части данной работы предпринимаются попытки получить численное решение задачи (7)–(10) и ее обобщений, как в исходной постановке, так и посредством решения эквивалентного уравнения (11).

4. Нелинейная модель регулирования ГАЭС

Рассмотрим небольшой пример с использованием гидротурбины [9]. Мощность гидротурбины определяется следующим выражением

$$P_h = \rho g H Q, \tag{12}$$

где ρ – плотность воды при заданных температуре и давлении в $кг/м^3$, g – ускорение свободного падения в $м/с^2$, Q – скорость течения воды через гидротурбину в $м^3/с$, H – уровень воды в резервуаре в $м$.

Скорость течения воды через гидротурбину Q можно представить следующей формулой

$$Q = \pi a^2 v,$$

где a – площадь поперечного сечения трубы в $м^2$, v – скорость потока воды в $м/с$, которая вычисляется с помощью следующего выражения

$$v = \sqrt{2gH}.$$

Таким образом, генерацию электроэнергии за время t в $кВт \cdot ч$ можно выразить следующей формулой

$$E = \int_0^t P_h ds = \int_0^t \pi a^2 \sqrt{2gH} \rho g H ds. \tag{13}$$

Данная генерация (13) имеет нелинейную зависимость от уровня воды H. В таком случае, если H является изменяющейся с течением времени неизвестной функцией, которую необходимо определить при известном уровне генерации E, то нам придется решать нелинейное интегральное уравнение Вольтерра.

Литература

1. N. Hritonenko and Yu. Yatsenko, *Mathematical Modeling in Economics, Ecology, and the Environment*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1999.

2. N. Hritonenko and Yu. Yatsenko, *Optimization of the lifetime of capital equipment using integral models*, Journal of Industrial and Management Optimization, Volume 1, Number 4, November 2005.

3. N. Hritonenko and Yu. Yatsenko, Structure of Optimal Trajectories in a Nonlinear Dynamic Model with Endogenous Delay. *Jour. Appl. Math.*, 5(2004), 433-445.

4. N. Hritonenko and Yu. Yatsenko, Turnpike and Optimal Trajectories in Integral Dynamic Models with Endogenous Delay. *Journal of Optimization Theory and Applications,* 127(2005), 109-127.

5. I.Muftahov, A.Tynda, D.Sidorov, Numeric solution of Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Volume 313, 15 March 2017, Pages 119-128.

6. Sidorov, D., Integral Dynamical Models: Singularities, Signals and Control. In:L. O. Chua, ed. *World Scientific Series on Nonlinear Sciences Series A:* Vol. 87, Singapore: World Scientific Press, 300p.

7. Сидоров Д.Н., Тында А.Н., Муфтахов И.Р., Численное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода с кусочно-непрерывными ядрами. *Вестник Южноуральского Государственного Университета. Серия «Математическое моделирование и программирование»*. 2014, Том 7, N 3, с.107-115.

8. *Yatsenko Yu.* Volterra integral equations with unknown delay time. *Methods and Applications of Analysis*, **2** (4) 1995, pp. 408-419.

9. Yang Wei, Wu YuLin, and Liu ShuHong, "An optimization method on runner blades in bulb turbine based on CFD analysis,"*Science China Technological Sciences*, vol. 54, no. 2, pp. 338—344.

MSC 65R20, 45D05

Numerical methods for integral dynamic models with nonlinear delays

A.N. Tynda[1], D.N. Sidorov [2], I.R. Muftahov [3]

Penza State University[1], Melentiev Energy System Institute SB RAS [2], Main Computing Center of Joint Stock Company «Russian Railways»[3]

Abstract: The paper is dedicated to numerical investigation of integral dynamic systems used in macroeconomics, renewal theory, automatic control theory and so forth. The linear and nonlinear Volterra integral equations and its systems of the special form are applied in such integral models. In particular, we investigate nonlinear integral equations of the first kind whose kernels have jump discontinuities along the set of smooth curves and the systems of integral equations with unknown functions in the limits of integration. We construct a family of direct and iterative numerical methods for such equations. Also some numerical approaches to optimization problems in systems with nonlinear delays are suggested. In conclusion we consider a nonlinear Volterra integral model arising in hydroenergetics.

Keywords: Volterra integral equations, discontinuous kernels, nonlinear delays, regularization, Newton-Kantorovich method, adaptive meshes.

References

1. Hritonenko N., Yatsenko Yu. *Mathematical Modeling in Economics, Ecology, and the Environment*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1999.

2. Hritonenko N., Yatsenko Yu. *Optimization of the lifetime of capital equipment using integral models*, Journal of Industrial and Management Optimization, Volume 1, Number 4, November 2005.

3. Hritonenko N., Yatsenko Yu. Structure of Optimal Trajectories in a Nonlinear Dynamic Model with Endogenous Delay. *Jour. Appl. Math.*, 5(2004), 433-445.

4. Hritonenko N., Yatsenko Yu. Turnpike and Optimal Trajectories in Integral Dynamic Models with Endogenous Delay. *Journal of Optimization Theory and Applications,* 127(2005), 109-127.

5. Muftahov I., Tynda A., Sidorov D., Numeric solution of Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Volume 313, 15 March 2017, Pages 119-128.

6. Sidorov, D., Integral Dynamical Models: Singularities, Signals and Control. In:L. O. Chua, ed. *World Scientific Series on Nonlinear Sciences Series A:* Vol. 87, Singapore: World Scientific Press, 300p.

7. Sidorov D.N., Tynda A.N., Muftahov I.R., Numerical Solution of Volterra Integral Equations of the First Kind with Piecewise Continuous Kernel. *Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 7, (3), (2014), 107–115.

8. *Yatsenko Yu.* Volterra integral equations with unknown delay time. *Methods and Applications of Analysis*, **2** (4) 1995, pp. 408-419.

9. Yang Wei, Wu YuLin, and Liu ShuHong, "An optimization method on runner blades in bulb turbine based on CFD analysis,"*Science China Technological Sciences*, vol. 54, no. 2, pp. 338—344.