

УДК 519.651

## О приближении функций конечными элементами в плоской области с криволинейной границей

И.В. Захарова<sup>1</sup>

Тверской государственный университет<sup>1</sup>

*Аннотация:* В статье исследуется задача о приближении функции двух переменных, заданной в криволинейной трапеции, методом конечных элементов. В указанной области строится разбиение единицы, подчиненное некоторому покрытию. Внутри каждого покрывающего множества исходная функция приближается полиномами в пространстве  $L_2$ . Критерием качества приближения служит относительная погрешность, вычисленная по норме в указанном пространстве. Выяснение эффективности приближения функций необходимо для нахождения границ применимости метода конечных элементов для численного решения задач математической физики. Разработан комплекс программ в среде MATLAB, реализующий алгоритм приближения функций методом конечных элементов; приведены примеры, демонстрирующие работоспособность комплекса программ.

*Ключевые слова:* метод конечных элементов, приближение функций

### 1. Введение

Одним из методов, широко используемых для решения задач механики деформируемого твёрдого тела, теплообмена, гидродинамики [1]– [3] и электродинамики, является метод конечных элементов.

В данной работе изучается метод приближения функций двух переменных с помощью конечных элементов в пространстве  $L_2(\Omega)$ , в котором скалярное произведение введено формулой

$$(f, g)_{L_2} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx, \quad (1)$$

а норма определяется как  $\|f\|_{L_2} = \sqrt{(f, f)_{L_2}}$ .

В качестве области  $\Omega$  будем рассматривать криволинейную трапецию, верхняя граница которой задается гладкой функцией  $\gamma(x)$ , где  $\gamma(x) > 0$ .

Приведем формулировки известных теорем, используемых далее в статье.

**Теорема (о разбиении единицы).** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  – ограниченная область ( $n \geq 1$ ),  $\{A_i\}_{i=1}^m$  – конечное открытое покрытие  $\Omega$ . Тогда существует конечный набор бесконечно дифференцируемых функций  $\{\eta_i\}_{i=1}^m$  таких, что:

1.  $0 \leq \eta_i(x) \leq 1$ ,
2.  $\sum_{i=1}^m \eta_i(x) = 1$ ,
3.  $\text{supp } \eta_i \subset A_i$

Кроме того, в статье используется теорема об ортогонализации.

**Теорема (об ортогонализации).** Пусть  $\{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$  – линейно независимая система элементов в гильбертовом пространстве  $H$ . Тогда в  $H$  существует система элементов  $\{q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\}$ , удовлетворяющая следующим условиям:

1. Система  $\{q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\}$  ортогональная и нормированная.
2. Каждый элемент  $q_n$  есть линейная комбинация элементов  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ :  $q_n = a_{n1} \cdot p_1 + \dots + a_{nn} \cdot p_n$ , причем  $a_{nn} \neq 0$ .
3. Каждый элемент  $p_n$  представляется в виде  $p_n = b_{n1} \cdot q_1 + \dots + b_{nn} \cdot q_n$ , причем  $b_{nn} \neq 0$ .

Каждый элемент системы  $\{q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\}$  вышеперечисленными условиями определяется с точностью до множителя  $\pm 1$ .

Всякая система  $p_1, p_2, \dots$  линейно независимых функций из гильбертова пространства  $H$  преобразуется в ортонормальную систему  $q_1, q_2, \dots$  процессом ортогонализации Шмидта. Для его описания введем матрицу ортогонализации  $MO$ , которая имеет размерность  $n \times n$  и является треугольной:

$$MO = \begin{pmatrix} MO_{11} & 0 & \dots & 0 \\ MO_{21} & MO_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ MO_{n1} & MO_{n2} & \dots & MO_{nn} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

при этом ее элементы имеют вид:

$$MO_{11} = \frac{1}{\|p_1\|},$$

$$MO_{21} = -\frac{(p_2, q_1)}{\|p_1\| \|p_2 - (p_2, q_1) \cdot q_1\|}, \quad MO_{22} = \frac{1}{\|p_2 - (p_2, q_1) \cdot q_1\|}, \dots$$

Тогда системы функций  $\{p_1, \dots, p_n\}$  и  $\{q_1, \dots, q_n\}$  связаны соотношением

$$q_i = \sum_{j=1}^n MO_{ij} p_j.$$

## 2. Постановка задачи и математическая модель

Рассмотрим задачу в пространстве  $\mathbb{R}^2$ . Пусть функция двух переменных  $F(x, y)$  задана на некоторой области

$$\Omega = \{(x, y) : 0 < x < l, 0 < y < \gamma(x)\},$$

где  $\gamma(x) > 0$  — гладкая функция. Далее для построения разбиения единицы зададим покрытие  $A_k$  на  $\Omega$ . Для упрощения расчетов из области  $\Omega$  сформируем  $\Omega_0 = \{(x, y) : 0 < x < l, 0 < y < d\}$ , где  $d = \max\{\gamma(x)\}$ . На полученной области зададим покрытие  $A_k$ .

В качестве элементов покрытия выберем прямоугольники, определяемые следующим образом. Рассмотрим точки  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, l]$  и  $y_1, y_2, \dots, y_m \in [0, d]$ , такие что

$$0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq l, \quad 0 \leq y_1 < y_2 < \dots < y_m \leq d.$$

Далее обозначим

$$\lambda_x = \max_{1 \leq i \leq n-1} |x_i - x_{i+1}|, \quad \lambda_y = \max_{1 \leq j \leq m-1} |y_j - y_{j+1}|.$$

Возьмем  $\delta_x \geq \lambda_x$  и  $\delta_y \geq \lambda_y$ , тогда покрытие  $\{A_k\}_{k=1}^{nm}$  состоит из прямоугольников

$$(x_i - 2\delta_x, x_i + 2\delta_x) \times (y_j - 2\delta_y, y_j + 2\delta_y), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = i(n-1) + j.$$

Зададим разбиение единицы на  $\Omega_0$ , соответствующее покрытию  $A_k$ . Для этого нам необходимо построить функции  $\varphi_i(x)$  и  $\psi_j(y)$ . Данные функции задаются аналогично, поэтому достаточно рассмотреть только  $\varphi_i(x)$ . Для этого воспользуемся операцией усреднения функций. Зададим усредняющее нормированное ядро:

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2-x^2}}, & |x| < \varepsilon, \\ 0, & |x| \geq \varepsilon, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\varepsilon$  — некоторое положительное число.

Постоянную  $C_\varepsilon$  выберем так, чтобы

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \omega_\varepsilon(x) dx = 1.$$

Эта функция бесконечно дифференцируема и ее носитель  $\text{supp } \omega_\varepsilon = [-\varepsilon; \varepsilon]$ . Далее возьмем функцию

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\xi) \omega_\varepsilon(x - \xi) d\xi, \quad (4)$$

где  $\chi(x)$  — характеристическая функция множества  $(-\delta_x - \varepsilon; \delta_x + \varepsilon)$  при  $0 < \varepsilon < \delta_x$ .

Из формулы (4) следует, что

$$0 \leq \varphi(x) \leq 1, \quad \text{supp } \varphi = [-\delta_x - 2\varepsilon; \delta_x + 2\varepsilon].$$

Кроме того, функция  $\varphi(x)$  является бесконечно дифференцируемой по лемме, доказанной в [4].

Затем с помощью функции  $\varphi(x)$  строим требуемые  $\varphi_i(x)$ , упомянутые в начале параграфа:

$$\varphi_i(x) = \varphi(x - x_i), \quad i = \overline{1, n}.$$

Аналогичным образом получим функции  $\psi_j(y)$ . Далее перемножим полученные функции:

$$\theta_k(x, y) = \varphi_i(x) \psi_j(y), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = i(n-1) + j.$$

Введем следующие обозначения:

$$\eta(x, y) = \sum_{k=1}^{nm} \theta_k(x, y); \quad \eta_k(x, y) = \frac{\theta_k(x, y)}{\eta(x, y)}.$$

Так как  $\eta(x, y) \geq 1$ , то знаменатель не равен нулю. Заметим, что

$$\text{supp } \eta_k = [-\delta_x - 2\varepsilon - x_i; \delta_x + 2\varepsilon - x_i] \times [-\delta_y - 2\varepsilon - y_j; \delta_y + 2\varepsilon - y_j].$$

Выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{nm} \eta_k(x, y) = \frac{1}{\eta(x, y)} \sum_{k=1}^{nm} \theta_k(x, y) = \frac{\eta(x, y)}{\eta(x, y)} = 1.$$

Таким образом, набор функций  $\{\eta_k\}_{k=1}^{nm}$  является разбиением единицы подчиненным покрытию

$$A_k = (x_i - 2\delta_x, x_i + 2\delta_x) \times (y_j - 2\delta_y, y_j + 2\delta_y), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}.$$

В результате мы можем представить функцию  $F(x, y)$  в виде

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^{nm} F_k(x, y) = \sum_{k=1}^{nm} F(x, y)\eta_k(x, y). \quad (5)$$

В этом равенстве  $F_k = F\eta_k$ .

Далее рассмотрим набор полиномов степени не выше  $N$ :

$$p_1 = 1, \quad p_2 = x, \quad p_3 = y, \dots, p_t = x^{\alpha_t}y^{\beta_t}, \quad \alpha_t + \beta_t \leq N.$$

Первые  $t$  полиномов ортогонализируем с помощью процедуры Грама-Шмидта, и получим ортонормированную систему  $\{q_1, q_2, \dots, q_t\}$ .

Каждую функцию  $q_k$  можно представить в виде:

$$q_i(x, y) = \sum_{k=1}^t MO_{ik}p_k(x, y), \quad (6)$$

где  $MO_{ik}$  суть элементы матрицы ортогонализации (2).

Каждую функцию  $F_k(x, y)$  будем приближать функцией  $F_k^N$ :

$$F_k(x, y) \approx F_k^N(x, y) = \sum_{i=1}^t \mu_i^k q_i(x, y), \quad (7)$$

где  $\mu_i^k$  — числа.

Будем искать полином  $F_k^N(x, y)$ , исходя из условий

$$(F_k, q_j) = (F_k^N, q_j) \quad (8)$$

Подставим в (8) уравнение (7):

$$(F_k, q_j) = \left( \sum_{i=1}^t \mu_i^k q_i, q_j \right) = \sum_{i=1}^t \mu_i^k (q_i, q_j) \quad (9)$$

Исходя из свойств ортонормированных полиномов, получим:

$$\mu_j^k = (F_k, q_j) = \int_{\Omega} (F_k(x, y), q_j(x, y)) dx dy.$$

Приблизив этим способом все  $k$  элементов, получим аппроксимацию функции  $F(x, y)$ :

$$\tilde{F} = \sum_{k=1}^{nm} \left( \sum_{i=1}^t \mu_i^k q_i(x, y) \right).$$

Для оценки качества приближения вычислим относительную погрешность

$$\delta = \frac{\|F - \tilde{F}\|_{L_2}}{\|F\|_{L_2}}.$$

### 3. Реализация алгоритма

Для реализации приближения функции конечными элементами в плоской области с криволинейной границей в пространстве  $L_2(\Omega)$  разработан ряд программ в системе MATLAB. Перечислим их.

**verhgran** Программа применяется для вычисления значений функций верхней границы. Обращение к программе:

$$y=\text{verhgran}(a,b,nx,\text{gran})$$

Выходные параметры:  $y$  — вектор значений функции верхней границы. Входные параметры:  $a, b$  — интервал, на котором задана функция,  $n_x$  — количество точек, в которых вычисляется функция,  $\text{gran}$  — функция, задающая верхнюю границу.

**akp** Программа, применяемая для задания функции усредняющего нормирующего ядра. Обращение к программе:

$$y=\text{akp}(x,\text{rho})$$

Выходные параметры:  $y$  — значение функции. Входные параметры:  $x$  — аргумент функции,  $\text{rho}$  — параметр, соответствующий  $\varepsilon$  в формуле (3).

**center** Программа для вычисления центров областей из покрытия  $A_k$ . Обращение к программе:

$$z=\text{center}(a,b,c,d,n,m)$$

Выходные параметры:  $z$  — матрица размерности  $n \times m$ , в которой первый столбец — координата центра по  $x$ , второй столбец — координата центра по  $y$ . Входные параметры  $a, b, c, d$  — область, в которой вычисляется разбиение единицы,  $n, m$  — количество разбиений по  $x$  и по  $y$  соответственно.

**edinica2d** Программа для вычисления значений функций  $\eta_k$  из разбиения единицы. Обращение к программе:

$$[R,OBL,X,Y,l2,g]=\text{edinica2d}(nx,ny,nxi,nyi,l1,\text{gran})$$

Выходные параметры:  $R$  — матрица значений функций  $\eta_k$ ,  $OBL$  — матрица размерности  $n_x n_y \times 4$ , в которой хранятся размеры области  $A_k$ ,  $X, Y$  — матрицы значений аргументов,  $l2$  — максимальное значение функции верхней границы на интервале  $(0, l1)$ ,  $g$  — вектор значений функции верхней границы. Входные параметры:  $n_x, n_y$  — количество разбиений по  $x$  и по  $y$  соответственно,  $n_{xi}, n_{yi}$  — количество точек в каждой области  $A_k$  по  $x$  и  $y$  соответственно,  $0 < x < l1, 0 < y < \text{gran}(x)$ .

**znach2** Программа для вычисления значений функции на области  $\Omega_0$ . Обращение к программе:

$$A=\text{znach2}(\text{fun},X,Y,l,g)$$

Выходные параметры:  $A$  — матрица значений функции. Входные параметры:  $\text{fun}$  — функция,  $X, Y$  — матрицы значений аргументов,  $0 < x < l, g$  — вектор значений функции верхней границы.

**approx** Программа для вычисления приближенных значений функций  $F_k$ . Обращение к программе:

$A = \text{approx}(n, kx, ky, a, b, c, d, F)$

Выходные параметры:  $A$  — матрица значений приближенной функции. Входные параметры:  $n$  — максимальная степень функций  $p_k$ ,  $kx, ky$  — количество точек, в которых вычисляются аргументы по  $x$  и по  $y$  соответственно,  $a, b, c, d$  — границы области в которой происходит приближение,  $F$  — матрица значений исходной функции.

**pow** Программа для вычисления степеней  $x^i$  и  $y^i$  функций  $p_k$ . Обращение к программе:

$ap = \text{pow}(n)$

Выходные параметры:  $ap$  — матрица состоящая из двух столбцов, где в первом столбце хранятся степени по  $x$ , а во втором — по  $y$ . Входные параметры:  $n$  — максимальная степень функций  $p_k$ .

**ort2d** Программа, проводящая ортогонализацию. Она вызывает программу, вычисляющую скалярное произведение двух функций на криволинейной трапеции. Обращение к программе:

$MO = \text{ort2d}(n, ap, a, b, c, d)$

Выходные параметры:  $MO$  — матрица ортогонализации (2). Входные параметры:  $n$  — максимальная степень функций  $p_k$ ,  $ap$  — матрица степеней,  $a, b, c, d$  — границы области.

**ip2** Программа для вычисления скалярного произведения (1). В данной программе интеграл вычисляется точно. Обращение к программе:

$y = \text{ip2}(i, j, ap, a, b, c, d)$

Выходные параметры:  $y$  — результат скалярного произведения двух функций  $p_i$  и  $p_j$ . Входные параметры:  $i, j$  — номера функций  $p_k$ ,  $ap$  — матрица степеней,  $a, b, c, d$  — границы области.

**simpq** Программа, вычисляющая двойные интегралы методом Симпсона (она вызывается в программе **approx**). Обращение к ней происходит следующим образом:

$y = \text{simpq}(A, n, m, h1, h2)$

Выходные параметры:  $y$  — значение интеграла. Входные параметры:  $A$  — матрицы, содержащая значения подынтегральной функции,  $n, m$  — количество точек, в которых заданы значения подынтегральной функции по первой и второй переменной (нечетное число),  $h1, h2$  — шаг изменения аргумента подынтегральной функции по первой и второй переменной.

**abspogr** Программа для вычисления абсолютной погрешности. Обращение к программе:

$e = \text{partpogr}(A, B, kx, ky, a, b, c, d)$

Выходные параметры:  $e$  — значение погрешности. Входные параметры:  $A$  и  $B$  — матрицы значений исходной и приближенной функций,  $k_x, k_y$  — количество точек, в которых вычисляются аргументы по  $x$  и по  $y$  соответственно,  $a, b, c, d$  — границы области.

**elapprox** Программа для обработки и вывода данных, полученных с помощью предыдущих процедур. Обращение к программе:

```
[F,T,X,Y,d]=elapprox(n,nx,ny,l1,nxi,nyi,fun,gran)
```

Выходные параметры:  $F, T$  — матрицы значений исходной и приближенной функций,  $X, Y$  — матрицы значений аргументов,  $d$  — значение относительной погрешности. Входные параметры:  $n$  — максимальная степень функций  $p_k$ ,  $n_x, n_y$  — количество разбиений по  $x$  и по  $y$  соответственно,  $n_{xi}, n_{yi}$  — количество точек в каждой области  $A_k$  по  $x$  и  $y$  соответственно,  $fun$  — исходная функция,  $gran$  — функция верхней границы.

В качестве примера рассмотрим приближения функции  $F(x, y) = xe^y$  в области  $\Omega = (0, 1) \times (0, \gamma(x))$ , где  $\gamma(x) = 2 + \sin(\beta\pi x)$ , где  $\beta = \overline{1, 3}$ . Интегралы вычисляются по методу Симпсона. Входными параметрами служат:  $n \in \{4, 6\}$  — степень полиномов,  $k = 25 \dots 121$  — число областей разбиения,  $n_x = 101$  — количество точек в области по обоим переменным.

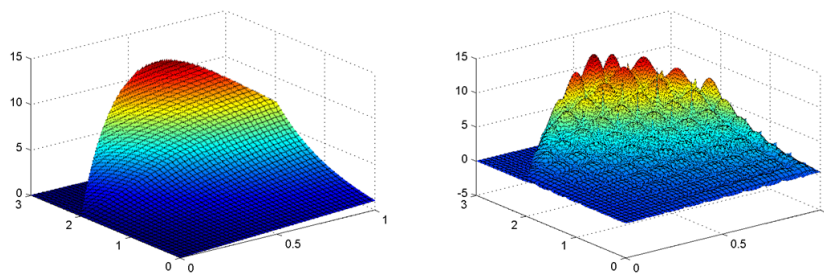


Рис. 1. График функции  $F$  и ее приближения при  $\beta = 1$

В статье приведены графики функции и ее приближений при разных значениях  $\beta$ .

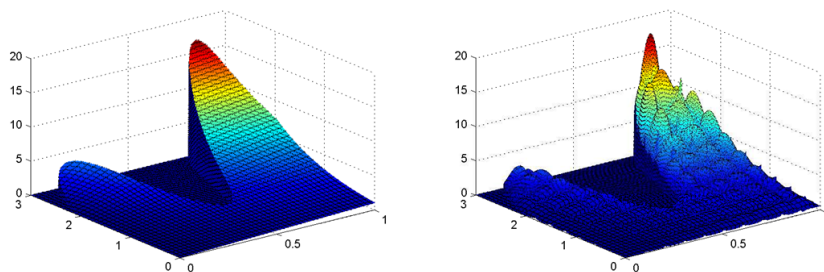


Рис. 2. График функции  $F$  и ее приближения при  $\beta = 3$

Как видно из приведенных графиков, созданный программный комплекс обеспечивает достаточно качественное конечно-элементное приближение функции двух переменных.

## Литература

1. Захарова И. В. О единственности решения задачи об обтекании ограниченного тела установившимся потоком неньютоновской жидкости // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2007. № 7. С. 61–88.
2. Захарова И. В. О разрешимости внешней задачи Стокса // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 1. С. 75–92.
3. Захарова И. В. Об одном классе функций для условия согласования // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 2. С. 81–94.
4. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1981.
5. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1976. 544 с.



MSC 65M60

## On finite-element approximation of functions in a plain domain with curvilinear boundary

I.V. Zakharova<sup>1</sup>

Tver State University<sup>1</sup>

*Abstract:* The problem of approximation of a function of two variables defined in a curvilinear trapezoid by the finite element method is investigated in the article. In this domain a partition of unity is constructed which is subordinate to some covering. Inside every covering set the function of interest is approximated by polynomials in  $L_2$  space. The criterion for the approximation quality is the relative error calculated with respect to norm in  $L_2$ . The elucidation of function approximation efficiency is necessary for finding the limits of applicability of the finite element method for the numerical solution of mathematical physics' problems. The set of programs has been developed in MATLAB environment that implements the algorithm for approximation of functions by finite element method. Examples are given demonstrating the working capacity of the software package.

*Keywords:* finite element method, approximation of functions

### References

1. Zakharova I. V. O edinstvennosti reshenija zadachi ob obtekanii ogranichennogo tela ustanovivshimsja potokom nen'jutonovskoj zhidkosti [About uniqueness of solution of problem about stationary non-Newtonian flow around limited body] // Vestnik TvGU. Serija: Prikladnaja matematika [Herald of TSU; Series: Applied Mathematics]. 2007. N 7. P. 61–88.
2. Zakharova I. V. O razreshimosti vneshnej zadachi Stoksa [On a solvability of external Stokes problem] // Vestnik TvGU. Serija: Prikladnaja matematika [Herald of TSU; Series: Applied Mathematics]. 2016. N 1. P. 75–92.
3. Zakharova I. V. Ob odnom klasse funkcion dlja uslovija soglasovanija [About a class of functions for matching conditions] // Vestnik TvGU. Serija: Prikladnaja matematika [Herald of TSU; Series: Applied Mathematics]. 2016. N 2. P. 81–94.
4. Vladimirov V. S. Uravnenija matematicheskoi fiziki [Equations of mathematical physics]. Moscow, "Nauka" Publishers, 1981.
5. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elementy teorii funkcion i funkcional'nogo analiza [Elements of function theory and of functional analysis]. – Moscow, "Nauka" Publishers, 1976. 544 p.