

УДК 51.7

# Численное исследование бифуркационной диаграммы и инвариантных областей логистического отображения в комплексной области

Ю.Н. Дерюгин<sup>1</sup>, Е.Ю. Киреичева<sup>1</sup>, Т.Ф. Мамедова<sup>2</sup>, А.В. Пухкой<sup>2</sup>

ФГУП РФЯЦ-ВНИИЭФ<sup>1</sup>, Национальный исследовательский Мордовский  
государственный университет им. Н.П. Огарёва<sup>2</sup>

*Аннотация:* Целью работы является исследование логистического отображения комплексной области. Такая модель может быть использована для изучения инновационного развития логистических центров (центров распространения товаров) в зависимости от управляющего параметра, характеризующего оборот товаров.

*Ключевые слова:* логистическое отображение, бифуркация, предельная функция отображения, комплексная плоскость

## 1. Введение

Целью работы является исследование логистического отображения комплексной области. Такая модель может быть использована для изучения инновационного развития логистических центров (центров распространения товаров) в зависимости от управляющего параметра. Поскольку логистические центры базируются на определенном расстоянии около мегаполисов и крупных городов, то рассмотрения логистического отображения в множестве комплексных чисел, возможно позволит учесть пространственное распределение логистических центров. Отправной точкой в этом исследовании является логистическое отображение в вещественной области. Поэтому в работе приводятся общие свойства дискретных отображений и численное исследование логистического отображения на вещественной оси.

## 2. Логистическое отображение в вещественной области

Логистическое отображения выражается законом:  $x_{n+1} = f(x_n, r) = rx_n(1 - x_n)$ . Динамика развития процесса описываемого логистическим отображением существенно зависит от значения параметра  $r$ . Основным интерес представляют неподвижные точки отображения, которые отвечают устойчивому или стационарному состоянию системы. Неподвижные точки являются корнями алгебраического уравнения  $F(x^*) = f(x^*, r) - x^* = 0$ . Точка  $x^*$  является устойчивой точкой и для последовательности отображений  $f^{(m)}(x_n, r)$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Отметим, что логистическое отображение, для  $0 < r < 4$ , есть отображение единичного отрезка вещественной оси в себя. Функции  $f^{(m)}(x, r)$  также осуществляют отображение единичного отрезка в себя и по построению итерационного процесса являются полиномами степени  $n = 2^m$ , а предельная функция есть степенной ряд:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f^{(m)}(x, r) = S(r, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(r)x^n.$$

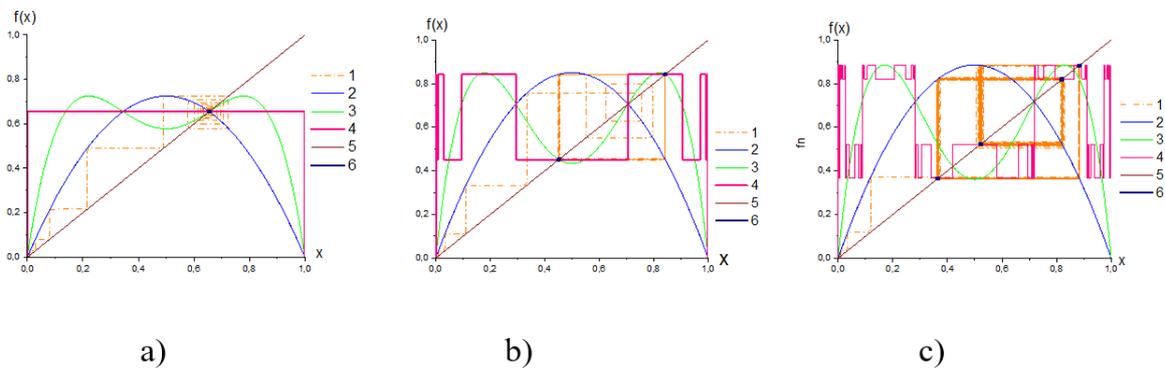
Сумма степенного ряда на отрезке на краях отрезка удовлетворяет условию

$$S(r, 0) = S(r, 1) = 0.$$

Из условия  $S(r, 1) = 0$  следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n(r) = 0.$$

На рисунке 1 для различных значений управляющего параметра  $r$  показаны расчетные зависимости итерационного процесса (лестница Ламерея), графики функций  $y = f(x)$ ,  $y = f^{(2)}(x)$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} f^{(m)}(x, r)$ ,  $y = x$  и неподвижные точки отображения. Из анализа численных результатов следует, что предельная функция является фракталом. При переходе через точки бифуркации происходит расщепление предельной функции в результате чего образуются две предельные функции которые циклически, в зависимости от порядка аттрактора переходят друг в друга. В области изменения управляющего параметра отвечающего странному аттрактору (область хаоса) предельная функция постоянно осциллирует и не имеет предельных значений.

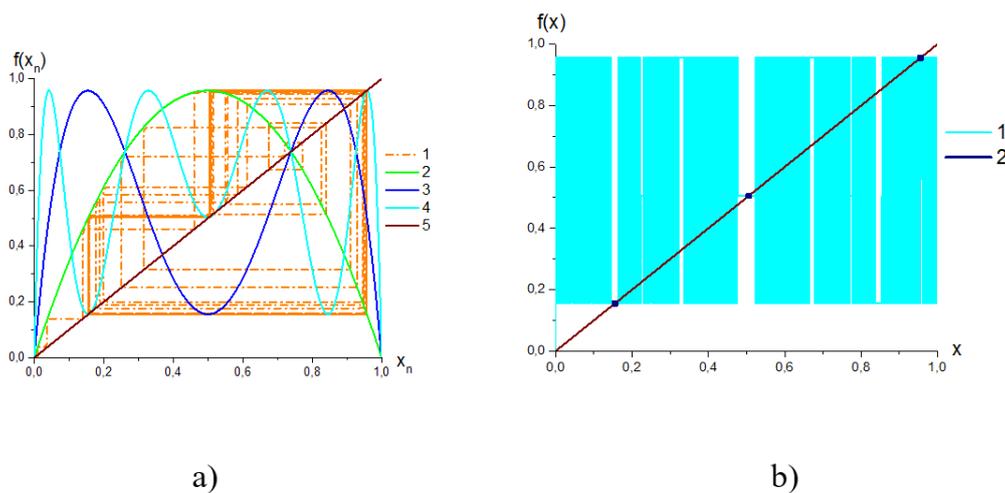


**Рис. 1.** Логистическое отображение для значений управляющего параметра: а)  $r = 2.9$ , б)  $r = 3.4$ , в)  $r = 3.54$ ; 1-лестница Ламерея; 2- $y = f(x)$ ; 3- $y = f^2(x)$ ; 4- $\lim_{m \rightarrow \infty} f^{(m)}(x, r)$ ; 5- $y = x$ ; 6- $x^*$

Помимо хаотических траекторий, логистическое отображение имеет в области параметра  $r > r_{\infty}$  множество устойчивых периодических траекторий четного и нечетного периода. При  $r > 3.82842$  реализуется устойчивый цикл с периодом 3. На рисунке 2 показан аттрактор с периодом 3 для значения управляющего параметра  $r = 3.83$  и один из трех видов предельной функции, которые циклически переходят последовательно друг в друга при последующих отображениях. Образование устойчивых циклов с периодом 3 идет также по схеме с удвоением периода.

### 3. Логистическое отображение в комплексной области.

В вещественной области функция  $y = rx(1-x)$  для значений параметра  $0 \leq r \leq 4$  отображает единичный отрезок вещественной оси в себя. В комплексной области естественно рассмотреть функцию  $\omega = Az(1-z)$  и область, в которую отображается внутренность круга единичного радиуса  $z \in K^1(0) = z : |z| < 1$ , для значений параметра  $0 < |A| < 4$ . Границей этой области является кривая  $\omega = f(e^{i\varphi}) = Re^{iQ}e^{i\varphi}(1 - e^{i\varphi})$ . Радиус вектор границы образа единичной окружности  $\omega = 2R|\sin \frac{\varphi}{2}|$  для параметра  $|A| = R > \frac{1}{2}$  может быть больше единицы. В этом случае итерационный процесс логистического отображения будет расходиться. Предельная функция, определенная логистическим отображением на единичном отрезке вещественной оси в виде степенного ряда не является аналитической, так как имеет точки разрыва и не представляется бесконечно дифференцируемым степенным рядом. Сходимость последовательности отображений на вещественной оси к предельной функции, если



**Рис. 2.** Аттрактор с периодом 3 при значении параметра  $r = 3.83$ : а) 1-лестница Ламерея, 2-  $f(x)$ ; 3-  $f^{(2)}(x)$ , 4-  $f^{(5)}(x)$ , 5-  $y = x$ ; б) 1 -  $\lim_{m \rightarrow \infty} f^{(m)}(x, r)$ , 2 -  $x^*$ ;

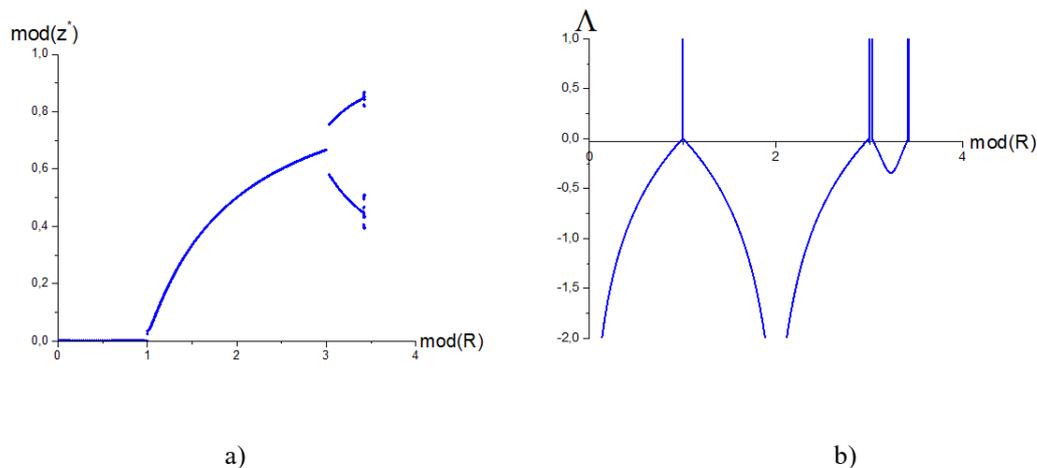
существуют устойчивые циклы, является поточечной, а в точках хаоса предельная функция не существует, она постоянно осциллирует. Отсюда следует, что не существует аналитического продолжения итерационного процесса с вещественной оси в комплексную плоскость и логистическое отображение в комплексной области не наследует свойств отображения в вещественной области. В связи с этим был численно исследован итерационный процесс логистического отображения в комплексной области для различных значений управляющего параметра. В этих исследования определялись неподвижные точки в зависимости от модуля управляющего параметра при фиксированном значении аргумента. Итерации начинались с вещественной оси, для начального значения  $z_0 = 0.01$ .

Из полученных результатов следует, что для малых значений аргумента,  $|A| < 1$  существует только одна устойчивая неподвижная точка  $z^* = 0$ . Переход через критическое значение  $|A| = 1$  происходит с образованием устойчивых циклов в основном четных порядков 20, 40, ... в зависимости от аргумента. При следующем критическом значении также происходит разрыв в решении. На рисунке 3 показаны зависимости неподвижных точек и показателя Ляпунова от модуля управляющего параметра для аргумента  $Q = 2^\circ$ .

При дальнейшем увеличении аргумента сокращается сначала область, где существуют две устойчивые точки ( $|A| > 3$ ), а, затем и область ( $1 < |A| < 3$ ), где существует одна устойчивая точка.

## Литература

1. Feigenbaum M.J. Universal behavior in nonlinear systems // Los Alamos Science. 1980. V. 1, No. 1. P.4-27.
2. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // Успехи физических наук. 1983. Т. 141, № 2. С. 343-374.
3. Вул Е.Б., Синай Я.Г., Ханин К.М. Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм // Успехи математических наук. 1984. Т.39, № 3. С. 3-37.
4. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.



**Рис. 3.** Зависимость модуля неподвижных точек (а) и показателя Ляпунова от модуля управляющего параметра для  $Q = 2^\circ$ .

5. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988. 240 с.
6. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368с.
7. Малинецкий Г.Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент. Введение в нелинейную динамику. М.: Эдуториал УРСС, 2000. 256с.
8. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. 352 с.
9. Прошин Ю.Н., Шакиров М.А. Моделирование и визуализация нелинейных динамических систем. Часть 1. Точечные отображения Казань: Казан. ун-т, 2015. 35 с.
10. Кузнецов А.П., Савин А.В., Тюрюкина Л.В. Введение в физику нелинейных отображений. Научная книга. Саратов. 2010
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
12. Шарковский А.Н. Сосуществование циклов непрерывного отображения прямой в себя // Украинский математический журнал. 1964. Т. 16, № 1. С.61-71.
13. Шарковский А.Н. О циклах и структуре непрерывного отображения // Украинский математический журнал. 1965. Т. 17, № 3. С. 104-111.

MSC 34G10

# Numerical investigation of the bifurcation diagram and invariant domains of logistic mapping in the complex plane

Y.N. Deryugin<sup>1</sup>, E.Y. Kireicheva<sup>1</sup>, T.F. Mamedova<sup>2</sup>, A.V. Pukhkoy<sup>2</sup>

Russian Federal Nuclear Center All-Russian Research Institute of Experimental Physics<sup>1</sup>, Ogarev Mordovia State University<sup>2</sup>

*Abstract:* The aim of the paper is to investigate the logistic mapping of a complex plane. Such a model can be used to study the innovative development of logistics centers (distribution centers), depending on the control parameter. Since logistic centers are based on a certain distance around megacities and large cities, then considering the logistic mapping in the set of complex numbers, it is possible to take into account the spatial distribution of logistic centers. The starting point in this study is the logistic mapping in the real domain. Therefore, the paper gives general properties of discrete mappings and a numerical investigation of the logistic map on the real axis.

*Keywords:* Logistic mapping, bifurcation, limit mapping function, complex plane.

## References

1. Feigenbaum M.J. Universal behavior in nonlinear systems // Los Alamos Science. 1980. Vol. 1, No. 1. P.4-27.
2. Feigenbaum M.J. [Universal behavior in nonlinear systems] // Uspekhi fizicheskikh nauk [Physics-Uspekhi]. 1983. Vol. 141, No. 2. P. 343-374. (In Russ.)
3. Vul E.B., Sinay Y.G., Khanin K.M. [The universality of Feigenbaum and the thermodynamic formalism] // Uspekhi matematicheskikh nauk [Russian Mathematical Surveys]. 1984. V. 39, No. 3. P. 3-37. (In Russ.)
4. Likhtenberg A., Liberman M. [Regular and stochastic dynamics]. "Mir" Publ., Moscow. 1984. 528 p. (In Russ.)
5. Shuster G. [Deterministic chaos. Introduction.] "Mir" Publ. Moscow. 1988. 240 p. (In Russ.)
6. Zaslavskiy G.M., Sagdeev R.Z. [Introduction to nonlinear physics. From the pendulum to turbulence and chaos.] "Nauka" Publ. Moscow. 1988. 368 p. (In Russ.)
7. Malineckiy G.G. [Chaos. Structures. Computational experiment. Introduction to nonlinear dynamics.] "URSS" Publ. Moscow. 2000. 256 p. (In Russ.)
8. Kronover R.M. [Fractals and chaos in dynamic systems. Fundamentals of Theory.] "Postmarket" Publ. Moscow. 2000. 352p. (In Russ.)
9. Proshin Y.N., Shakirov M.A. [Modeling and visualization of nonlinear dynamic systems. Part 1. Point mappings.] Kazan University Publ., Kazan. 2015. 35 p. (In Russ.)
10. Kuznecov A.P., Savin A.V., Tyuryukina L.V. [Introduction to physics of nonlinear mappings. The scientific book.] Saratov. 2010. (In Russ.)
11. Landau L.D., Lifshic E.M. [Hydrodynamics.] "Nauka" Publ. Moscow. 1986. 736 p. (In Russ.)

12. Sharkovskiy A.N. [Coexistence of cycles of continuous mapping of a line into itself] // Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal [Ukrainian Mathematical Journal]. 1964. V. 16, No. 1. P. 61-71. (In Russ.)
13. Sharkovskiy A.N. [On cycles and the structure of a continuous map] // Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal [Ukrainian Mathematical Journal]. 1965. V. 17, No. 3. P. 104-111. (In Russ.)