УДК 519.7:628.9.041.7

Моделирование температурных полей при функционировании газоразрядных ламп с цилиндрическими электродами

И. Н. Кудашкин, Г. А. Курносов

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: В статье предлагается численное решение дифференциального уравнения, описывающего профиль температуры катода и анода газоразрядных ламп. Эти электроды имеют широко распространённую цилиндрическую форму. Рассматриваются пусковой (после подачи электрического напряжения на газоразрядную лампу) и установившийся режим функционирования. В обоих случаях вычислительный алгоритм реализован с помощью явного метода сеток.

Ключевые слова: газоразрядная лампа, цилиндрический электрод, катод, анод, моделирование, температурное поле, уравнение теплообмена, явные сетки

1. Объект проектирования

Газоразрядные лампы (ГРЛ) основаны на преобразовании электрической энергии в оптическое излучение, они получили широкое распространение благодаря широкому спектру излучения. Конструктивно ГРЛ представляет собой запаянную стеклянную колбу с двумя герметически впаянными в неё электродами (катодом и анодом), между которыми и происходит электрический разряд.

Назначение катода состоит в обеспечении потока электронов для поддержания разряда. Для лучшей фиксации разряда в межэлектродном промежутке, рабочей части катода придают определённую форму: конуса, усечённого конуса, шарового сегмента или же в виде комбинации каждого из перечисленных геометрических тел в сочетании с цилиндром меньшего диаметра (в последнем случае катод становится грибообразным).

Анод является приёмником электронов, поступающих из газоразрядного межэлектродного промежутка в электрическую цепь. Геометрические размеры и масса анода в разы, а в некоторых случаях в десятки раз, превышают аналогичные параметры катода. Рабочая часть анода, обращённая к разряду, может иметь такие же формы, что и рабочая часть катода.

Наиболее интенсивно процесс теплообмена происходит в рабочей части каждого из электродов, обращённых в сторону разряда. Механизмы переноса энергии от катода к дуге разряда, и далее, от дуги разряда к аноду, очень сложны и мало изучены.

До настоящего времени нет ещё чёткого представления о режиме функционирования рабочего торца катода, несмотря на ряд работ, посвящённых этому вопросу [1]-[5]. Нагрев катода происходит за счёт мощности, приносимой к рабочему торцу различными источниками: ионами, теплопередачей от горячего газа плазмы, поглощением некоторой части излучения анода, дуги разряда и прохождением электрического тока через катод. Исследование мощностей, поступающих на катод газоразрядных ламп, проведено в работах [5]-[7].

Нагрев анода происходит с его рабочего торца за счёт энергии, приносимой электронами $Q_{эл}$, поглощения некоторой доли излучения разряда $Q_{изл}$ и конвективного потока газа плазмы $Q_{конв}$

$$Q_{анод} = Q_{эл} + Q_{изл} + Q_{конв}.$$

Анализу механизма передачи мощностей на анод посвящены работы [1]-[6], [8]. Показано, что доминирующей здесь является электрическая мощность $Q_{эл}$, вычисляемая по формуле

$$Q_{эл} = Q^*_{эл} \cdot i,$$

где i — сила электрического тока разряда, $Q^*_{эл}$ — вольтов эквивалент электрической мощности.

Значение $Q^*_{эл}$ определяется экспериментальным путём и зависит от рода наполняемого газа, давления внутри колбы, материала анода и температуры электрического разряда.

Цилиндрическая форма катода и анода является наиболее распространённой и применяется в газоразрядных лампах высокого и сверхвысокого давления.

Колбы ГРЛ имеют цилиндрическую, сферическую или иную форму. Воздух из внутреннего пространства колбы откачивается до достижения глубокого вакуума, после чего колба заполняется инертным газом и небольшим количеством металла с высокой упругостью паров (ртуть, натрий, кадмий и др.).

2. Математическая постановка задачи

Математическая модель функционирования протяжённых электродов в газоразрядных лампах основывается на уравнении баланса энергии, вытекающем из законов термодинамики для изолированных систем, находящихся в равновесном состоянии [9]

$$C\rho F \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda F \frac{\partial T}{\partial x}\right) + q_{дж} F - q_w \frac{dS}{dx}, \qquad (1)$$

где F — площадь поперечного сечения электрода, S — охлаждаемая боковая поверхность, которые изменяются по длине электрода, C — удельная теплоёмкость материала, из которого изготовлен электрод; ρ — плотность материала электрода; T — температура переменного сечения стержня, которая считается одинаковой во все его точках; t — время; x — текущая точка по длине электрода; λ — коэффициент теплопроводности материала электрода; $q_{дж}$ — джоулево тепло, выделяющееся в бесконечно малом элементе длины электрода dx за счёт нагревания его электрическим током; q_w — поток энергии, уходящий с охлаждаемой боковой поверхности бесконечно малого элемента длины электрода dx конвективным теплопереносом и лучистым излучением.

Ось абсцисс одномерной системы координат совмещена с осью симметрии электрода, а началом её является рабочий торец.

Дифференциальное уравнение (1) в частных производных в любой момент времени t описывает распределение температуры вдоль однородного проводника произвольного поперечного сечения F при допущении, что температура в любой точке поперечного сечения электрода есть величина постоянная.

Левая часть уравнения (1) представляет собой изменение температуры электрода во времени. В правой части первое слагаемое выражает перенос тепла теплопроводностью, второе — нагревание проводника электрическим током, третье — перенос тепла конвекцией и излучением.

Чтобы не выписывать одни и те же формулы для каждого из электродов будем полагать, что катод и анод разрядной лампы имеют форму цилиндрического стержня длиной ℓ и радиусом поперечного сечения r. Тогда дифференциальное уравнение (1) преобразуется к виду

$$C\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+q_{дж}-\frac{2q_w}{r}. \tag{2}$$

Будем считать, что коэффициент теплопроводности материала электрода постоянен $\lambda = const$.

Внутренний источник тепла $q_{дж}$ и тепловые потери q_w вычисляются по формулам

$$q_{дж}=J^2R(T),$$

$$q_w=q_{конв}+q_{изл},$$

где J — плотность электрического тока, $R(T)$ — удельное электрическое сопротивление материала стержня; $q_{конв}$ — тепло, отводимое конвекцией, $q_{изл}$ — тепло, отводимое излучением.

Конвективный теплообмен (или теплоотдача) представляет собой процесс передачи тепла теплопроводностью между стержнем и окружающим его газом. Величина теплового потока в пограничном слое вокруг твёрдого тела подчиняется закону Ньютона

$$q_{конв}=\alpha_{conv}\left(T-T_{газ}\right),$$

где α_{conv} — коэффициент конвективной теплоотдачи; T, $T_{газ}$ — температура стержня и окружающего его газа, соответственно.

Величина тепла, отводимого от электрода излучением, вычисляется по формуле

$$q_{изл}=\sigma_0\cdot\varepsilon(T)\cdot\left(T^4-T_{газ}^4\right),$$

где σ_0 — постоянная Стефана-Больцмана, $\varepsilon(T)$ — интегральная степень черноты материала электрода.

Тогда уравнение (2) перепишется в виде

$$C\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+J^2R(T)-\frac{2\cdot\left[\sigma_0\cdot\varepsilon(T)\cdot\left(T^4-T_{газ}^4\right)+\alpha_{conv}\left(T-T_{газ}\right)\right]}{r}. \quad (3)$$

Для решения дифференциального уравнения в частных производных (3) с непрерывными аргументами необходимо задать дополнительные условия: начальные и граничные. Рассмотрим общий случай.

Пусть в начальный момент времени $t=0$ распределение температуры по электроду подчиняется закону

$$T(0,x)=\varphi(x), \quad (4)$$

(начальное условие).

При решении задач теплообмена в источниках света исследуются: пусковой процесс (после включения газоразрядной лампы), который по истечении определённого времени переходит в стационарный режим функционирования. Функция $\varphi(x)$ задаёт температурный режим электрода. У отключенной лампы в течение продолжительного времени $\varphi(x)=T_{окр}$, где $T_{окр}$ — температура окружающей среды.

Пусть в рабочий торец стержня $(x=0)$ поступает мощность $Q=Q(t)$, изменяющаяся с течением времени t, а с противоположного тыльного конца происходит отвод тепла вследствие излучения и конвекции. Тогда для градиента температуры на концах стержня справедливы соотношения

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}=-\frac{Q(t)}{\lambda\pi\cdot r^2}=q_1(t), \quad (5)$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=\ell}=-q_w(T)=q_2(T), \quad (6)$$

(граничные условия).

Таким образом, требуется найти решение смешанной краевой задачи (3), (4)-(6).

3. Дискретизация краевой задачи

В качестве первоочередной задачи будем искать решение при $C=C(T)\equiv const$. Введём обозначения

$$a^2=\frac{\lambda}{C\rho},$$

$$f(t,x,T)=\frac{J^2R(T)-2q_w/r}{C\rho},$$

где a^2 — коэффициент температуропроводности.

Тогда уравнение (2), при учёте его в форме (3), принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+f(t,x,T), \quad (7)$$

решение которого при краевых условиях (4)-(6) будем искать методом сеток.

Существует множество способов замены конкретного дифференциального уравнения в частных производных, начального и граничных условий краевой задачи сеточными уравнениями, связывающих значения искомого решения в узлах сетки. При выборе схемы шаблона следует учитывать множество факторов. Требования к вычислительным шаблонам излагаются в многочисленных работах, посвящённых как общим вопросам разностных схем [10]-[13], так и применению последних при решении дифференциальных уравнений параболического типа, к которым относятся уравнения теплопереноса в нестационарном режиме [13]-[16]. Обзор задач тепло- и массопереноса, решаемых методом сеток, содержится в работе [16].

Настоящее исследование тепловых процессов в разрядных источниках света с помощью дифференциальных уравнений в частных производных рассматривается впервые, с учётом того обстоятельства, что теплофизические характеристики материала электрода (стержня) коэффициент теплопроводности λ, удельная теплоёмкость C и учёт тепловых потерь функционирующей лампы определяются приближённо, требования точности вычислительной схемы весьма ограничены.

Для обеспечения универсальности, в смысле пригодности решения задачи для большого числа практических приложений, а также экономичности (затрат времени на разработку специального программного обеспечения) для дискретизации по времени и длине электрода полученной сеточной задачи воспользуемся явной схемой первого порядка точности.

В области непрерывного изменения аргументов

$$0 \le x \le \ell,$$
$$0 \le t \le \bar{t}.$$

введём равномерную прямоугольную сетку

$$x_m = mh, \quad m = \overline{0, M}; \qquad h = \frac{\ell}{M}; \tag{8}$$

$$t_n = n\tau, \quad n = \overline{0, N}; \qquad \tau = \frac{\bar{t}}{N}. \tag{9}$$

с шагами h и τ соответственно по направлениям x и t.

С помощью четырёхточечного шаблона

$$[(n+1)\tau,\ mh];$$
$$[n\tau,\ (m-1)h]; \qquad [n\tau,\ mh]; \qquad [n\tau,\ (m+1)h].$$

дифференциальное уравнение в частных производных (7) заменим соответствующим сеточным

$$\frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\tau} = a^2\,\frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}}{h^2} + f_{m,n}, \tag{10}$$

где $f_{m,n} = f(n\tau, mh, T_m)$.

Краевые условия также заменяются сеточными соотношениями:
начальное условие (4)

$$T_{m,0} = \varphi(mh); \tag{11}$$

граничные условия (5) и (6), соответственно,

$$\frac{T_{-1,n} - T_{1,n}}{2h} - q_1(n\tau) = 0, \tag{12}$$

$$\frac{T_{M+1,n} - T_{M-1,n}}{2h} - q_2(T_{M,n}) = 0. \tag{13}$$

Таким образом, решаемая задача (3)-(6), описываемая функциями непрерывных аргументов x и t, сводится к задаче (10)-(13) с функциями дискретного аргумента, зависящих от шагов сетки h и τ как от параметров.

Перепишем сеточное уравнение (10) в форме, удобной для вычисления температуры стержня в точечных узлах $(n+1)$-го слоя используемой сетки (8)-(9) по известным значениям на предыдущем n-ом слое

$$T_{m,n+1}=\frac{a^2\tau}{h^2}\left(T_{m+1,n}+T_{m-1,n}\right)+\left(1-\frac{2a^2\tau}{h^2}\right)T_{m,n}+\tau\cdot f_{m,n}\,. \tag{14}$$

Для удобства организации вычислительного процесса и его программной реализации последнюю формулу (14) целесообразно записать в матричной форме

$$T^{(n+1)}=A\cdot T^{(n)}+\tau\cdot f^{(n)},$$

$$T^{(0)}=\varphi;\qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1;$$

где $T^{(n)}=\{T_{1,n};\ T_{2,n};\ \ldots;\ T_{M-1,n}\}$ — искомый вектор-столбец;

$\varphi=\{\varphi(h),\ \varphi(2h),\ \ldots,\ \varphi((M-1)\,h)\}$ — начальный вектор-строка;

A — квадратная $(M-1)$-мерная трёхдиагональная <ленточная> матрица вида

$$A=\begin{pmatrix}
1-2W & W & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\
W & 1-2W & W & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\
0 & W & 1-2W & W & \ldots & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & W & 1-2W & \ldots & 0 & 0 & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1-2W & W & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & W & 1-2W & W\\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & W & 1-2W
\end{pmatrix},$$

где $W=\dfrac{a^2\tau}{h^2}$.

4. Обеспечение устойчивости вычислительной схемы

Основной проблемой применения явного метода сеток является обеспечение условий устойчивости вычислительной схемы. В работе [12] установлено, что в уравнении (7) функции a^2 и $f(t,x,T)$ должны быть ограниченными и равномерно непрерывными по всем аргументам. Кроме того, для последней функции должно выполняться условие Липшица

$$\left|f(t,x,T_1)-f(t,x,T_2)\right|\le L\left|T_2-T_1\right|,$$

где постоянная $L>0$, причём правая часть уравнения (7) интегрируема.

Если теперь представить сеточное соотношение (14) в виде

$$T_{m,n+1}=\sum_{k=-1}^{1}C_k(t,x,0)\,U_{m+k,n}+\tau\ f_{m,n}\,,$$

при коэффициентах C_k удовлетворяющих условию

$$\left|\sum_{k=-1}^{1} C_k(t,x,0)\exp(ik\beta)\right| \le \exp\left(-\mu\beta^2\right), \tag{15}$$

где $|\beta| \le \pi$ и постоянная $\mu > 0$, то вычислительная схема (14) является устойчивой.

Введём обозначение

$$\theta = \frac{a^2\tau}{h^2}.$$

Тогда

$$C_{-1} = C_1 = \theta,$$

и левая часть неравенства (15) примет вид

$$\left|\sum_{k=-1}^{1} C_k(t,x,0)\exp(ik\beta)\right| = \left|\theta\cdot\left[\exp(-i\beta)+\exp(i\beta)\right]+1-2\theta\right| = \left|1-4\theta\sin^2\frac{\beta}{2}\right|. \tag{16}$$

Отсюда, для обеспечения выполнения неравенства (16) необходимо, чтобы имели место неравенства

$$\ldots\quad \left|1-4\theta\sin^2\frac{\beta}{2}\right| \le 1, \qquad |\beta| \le \pi.\ \ldots$$

При их соблюдении будет иметь место соотношение

$$\theta \le \frac{1}{2}.$$

Обратно, если выполняется неравенство (15), то из разложений составных частей цепочки равенств (16) $1-4\theta\sin^2\frac{\beta}{2}$ и $\exp\left(\mu\beta^2\right)$ в ряды

$$1-4\theta\sin^2\frac{\beta}{2} = 1-4\theta\frac{\beta^2}{4}+\ldots,$$

$$\exp\left(\mu\beta^2\right) = 1-\mu\beta^2+\ldots,$$

следует, что

$$\mu \le \theta \le \frac{1}{2}.$$

Равномерная непрерывность и ограниченность функций a^2, f следуют из их представления.

Следовательно, условие устойчивости схемы (14) будет выполняться при справедливости неравенства

$$\tau \le \frac{h^2}{2a^2}. \tag{17}$$

5. Алгоритм решения сеточной задачи

Решение сеточной задачи (10)-(13) проводится в соответствии со следующим алгоритмом.

1. Задаётся шаг h вдоль электрода длиной ℓ, затем с помощью неравенства (17) подбирается максимально возможное значение шага τ по времени.

2. С учётом начального сеточного условия (11), находим распределение температуры в нулевом слое $(n=0)$ вдоль разогреваемого стержня

$$T_{m,0} = \varphi(mh); \qquad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ M.$$

3. Для последующих слоёв значения температуры в узлах рассчитываются, исходя из сеточного соотношения (14)

$$T_{m,n+1} = C_{-1} T_{m-1,n} + C_0 T_{m,n} + C_1 T_{m+1,n} + \tau\ f_{m,n},$$
$$m = 1,\ 2,\ \ldots,\ M-1; \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1.$$

В частности, при $m = 0$ имеем

$$T_{0,n+1} = C_{-1} T_{-1,n} + C_0 T_{0,n} + C_1 T_{1,n} + \tau\ f_{0,n}.$$

Фиктивные значения $T_{-1,n}$ находятся из сеточного граничного условия (12)

$$T_{-1,n} = T_{1,n} + 2h \cdot q_1(n\tau),$$

а значения $T_{M+1,n}$ получаем из другого сеточного граничного условия (13)

$$T_{M+1,n} = T_{M-1,n} + 2h \cdot q_2(T_{m,n}).$$

Данный алгоритм решения задачи распределения температуры вдоль цилиндрического стержня при известных градиентах температуры на его концах реализован на алгоритмическом языке высокого уровня.

Некоторым недостатком изложенного метода является необходимость обеспечения неравенства (17) при задании значений шагов сетки.

6. Программное обеспечение

В целях удобства сопровождения комплекса программ применяется модульная структура, основанная на принципе: один программный модуль — одна функция. В состав комплекса входят следующие модули:

— управляющие (PROGCNTR — головной модуль, управляющий ходом вычислительного процесса);

— рассчитывающие геометрию электродов (GEOMANOD — анода, GEOMCATH — катода, CRSECTA — площадь поперечного сечения);

— рассчитывающие распределение температуры электродов (TMPANOD — по аноду, TMPCATHOD — по катоду);

— рассчитывающие физические характеристики материала электродов (INTBLACK — интегральный показатель черноты, SPELRES — удельное электрическое сопротивление, CURRDNST — плотность электрического тока, CRFLOW — конвективно-лучистый поток с поверхности);

— рассчитывающие сеточно задаваемые функции (BNDCOND1 — граничное условие $q_1(T)$ в начальный момент времени; BNDCOND2 — граничное условие $q_2(T)$ в конце временного отрезка; FRSORDER — частная производная первого порядка по T от функции $TEMP(T,x)$, описывающая распределение скорости изменения температуры вдоль электрода; SECORDER — частная производная второго порядка по x от функции $TEMP(T,x)$; TMPDISTR — распределение температуры $\varphi(x)$ в начальный момент времени; COMPFUNC — функция $f(t,x,T)$ в дифференциальном уравнении (7));

— вычислительные (LTCBNDPR — решение сеточной краевой задачи с помощью 4-точечного шаблона);

— выводящие результаты расчёта (TMATFING — вывод матрицы в файл на жёстком диске);

— электрические характеристики (VOLTAGE — закон изменения электрического напряжения $U=U(t)$, подающегося на газоразрядную лампу; — мощность $Q(t)$, поступающая на рабочий торец электрода).

7. Заключение

Разработанная компьютерная программа, составленная из программных модулей уникального функционального предназначения, позволяет проводить моделирование температурных полей цилиндрических электродов газоразрядных ламп. Дальнейшее совершенствование математической модели состоит в более детальном учёте вклада элементов конструкции газоразрядных ламп иных форм электродов, а также в программной реализации возможных режимов их электропитания, уточнении реальных характеристик разрядных ламп (наполнение внутриколбового пространства газовыми смесями, уточнение вклада конкретными реальными телами в общее уравнение теплового баланса и т д.).

Литература

1. Крижанский С. М. Расчёт теплового взаимодействия дугового столба и электродов // Инженерно-физический журнал. 1971. Т. 20, № 2. С. 299-305.
2. Жуков М. Ф. и др. Приэлектродные процессы в дуговых разрядах. Новосибирск: Наука, 1982. 158 с.
3. Молодцов С. Н., Рабинович Г. И. Мощность, поглощаемая анодом короткодуговой ксеноновой лампы // Светотехника. 1983. № 5. С. 11-12.
4. Мельниковский А. М., Молодцов С. Н., Рабинович Г. И. Лучистая мощность, поглощаемая анодами мощных ксеноновых ламп сверхвысокого давления // Светотехника. 1981. № 10. С. 8-9.
5. Рабинович Г. И. Инженерный расчёт напряжения на дуге и катодного падения напряжения в шаровых ксеноновых лампах большой мощности // Светотехника. 1976. № 12. С. 11-13.
6. Рохлин Г. Н. Газоразрядные источники света. М.-Л.: Энергия, 1966. 560 с.
7. Закарян А. С., Рабинович Г. И. Тепловой расчёт катодов шаровых ксеноновых ламп // Светотехника. 1984. № 5. С. 8-9.
8. Шоек П. А. Исследование баланса энергии на аноде сильно-точных дуг, горящих в атмосфере аргона // Современные проблемы теплообмена. М.: Энергия, 1966. С. 110-139.
9. Темкин А. Т. Обратные методы теплопроводности. М.: Энергия, 1973. 464 с.

10. Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977. 440 с.
11. Рихтмайер Р. Д., Мортон К. В. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972. 420 с.
12. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
13. Саульев В. К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М.: Физматгиз, 1960. 324 с.
14. Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984. 288 с.
15. Самарский А. А. О численных методах решения задач математической физики // Тепло- и массоперенос / Материалы дискуссии на III Всесоюзном совещании по тепло- и массообмену. Минск: 1969. С. 990-1005.
16. Черпаков П. В., Миловская Л. С. О решении некоторых нелинейных задач теплообмена // Инженерно-физический журнал. 1967. Т. 12. № 1. С. 123-125.
17. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 416 с.

MSC 35K05 65M99

Modelling of temperature fields by functioning of gaseous-discharge lamps with cylindrical electrodes

I. N. Kudashkin[1], G. A. Kurnosov[1]

National Research Mordovia State University[1]

Abstract: In this paper propose numerical solution of differential equation, described profile a temperature of cathode and anode. These electrodes have a widely- distributed cylindrical form. Consider starting (after feed of voltage on gaseous-discharge lamp) and steady-state processes of functioning.

In both cases computational algorithm is realized with the help of evident finite-difference method.

Keywords: gaseous-discharge lamp, cylindrical electrode, cathode, anode, modelling, temperature field, equation of heat exchange, explicit meshes.

References

1. Krizhanskij S. M. Raschet teplovogo vzaimodeijstviya dugovogo stolba i elektrodov [Calculation of heat interaction of arched post and electrodes] // Inzhenerno-fizicheskij zhurnal [Engineers and Physical Journal]. 1971. V. 20. No 2. P. 299-305.
2. Zhukov M. F. i dr. Prielectrodnye protsessy v dugovykh razryadakh [Electrodessides processes in arc discharges]. Novosibirsk. Publishing of the “Nauka”, 1982. 158 p.
3. Molodtsov S. N., Rabinovich G. I. Moshchnost', pogloshchaemaya anodom korotkodugovoij ksenonovoy lampy [The power absorbed by the anode short-arc xenon-filled lamp] // Svetotekhnika [Lighting Engineering]. 1983. No 5. P. 11-12.
4. Mel'nikovskij A. M., Molodtsov S. N., Rabinovich G. I. Luchistaya moshchnost', pogloshchaemaya anodami moshchnykh ksenonovykh lamp sverkhvysokogo davleniya [Terminating radiant power with anodes powerful xenon-filled lamps of ultrahigh pressure] // Svetotekhnika [Lighting Engineering]. 1981. No 10. P. 8-9.
5. Rabinovich G. I. Inzhenernyj raschet napryazheniya na duge i katodnogo padeniya napryazheniya v sharovykh ksenonovykh lampakh bol'shoy moshchnosti [Engineering calculation of arc voltage and cathode voltage drop in globular xenon-filled lamps of high-power] // Svetotekhnika [Lighting Engineering]. 1976. No 12. P. 12-13.
6. Rokhlin G. N. Gazorazryadnye istochniki sveta [Gas-discharges light sources]. Moscow-Leningrad. Publishing of the “Energiya”, 1966. 560 p.
7. Zakaryan A. S., Rabinovich G. I. Teplovoy raschet katodov sharovykh ksenonovykh lamp [Thermal calculation of cathodes of globular xenon-filled lamps] // Svetotekhnika [Lighting Engineering]. 1984. No 5. P. 8-9.

8. Shoek P. A. Issledovanie balansa energii na anode sil'no-tochnykh dug, goryashchikh v atmosfere argona [The investigation of the energy balance at the anode is a highly-accurate arcs burning in argon atmosphere] // Sovremennye problemy teploobmena [The contemporary problems of heat exchange]. Moscow. Publishing of the “Energiya”, 1966. P. 110-139.
9. Temkin A. T. Obratnye metody teploprovodnosti [The reverse methods of heat conduction]. Moscow. Publishing of the “Energiya”, 1973. 464 p.
10. Godunov S.K., Ryaben'kiy V.S. Raznostnye skhemy [Difference circuits]. Moscow, Publishing of the “Nauka”, 1977. 440 p.
11. Richtmyer R.D., Morton K.W. Raznostnye metody resheniya kraevykh zadach [Difference methods for initial-value problems]. Moscow. Publishing of the “Mir”, 1972. 420 p.
12. Samarskij A.A. Teoriya raznostnykh skhem [Theory of difference circuits]. Moscow. Publishing of the “Nauka”, 1977. 656 p.
13. Saul'ev V.K. Integrirovanie uravnenij parabolicheskogo tipa metodom setok [Integration of parabolic equations with meshes method]. Moscow. Publishing of the “FIZMATGIZ”, 1960. 324 p.
14. Paskonov V.M., Polezhaev V.I., Chudov L.A. Chislennoe modelirovanie protsessov teplo- i massoobmena [Numerical simulation of processes of heat- and mass transfer]. Moscow. Publishing of the “Nauka”, 1984. 288 p.
15. Samarskij A.A. O chislennykh metodakh resheniya zadach matematicheskoy fiziki [On numerical methods of solution problems of mathematical physics] // Teplo- i massoperenos [Heat- and mass transfer] / Materialy diskussii na III Vsesoyuznom soveshchanii po teplo- i massoobmenu [Materials of discussion in III All-Union conference on heat- and mass transfer]. Minsk. 1969. P. 990-1005.
16. Cherpakov P.V., Milovskaya L.S. O reshenii nekotorykh nelineynykh zadach teploobmena [On solution of some non-linear problems of heat transfer] // Inzhenerno-fizicheskij zhurnal [Engineers and Physical Journal]. 1967. V. 12. No 1. P. 123-125.
17. Samarskij A.A. Ustojchivost' raznostnykh skhem [The stability of difference circuits]. Moscow. Publishing of the “Nauka”, 1973. 416 p.