

УДК 51-72

Математическое моделирование процесса термопластического деформирования тонкого кругового диска

М.А. Артемов, Е.С. Барановский, И.И. Переяславская
Воронежский государственный университет

Аннотация: Используя условие пластичности Шмидта (условие пластичности максимального приведенного напряжения), мы приводим подробное изложение алгоритма решения задачи об упругопластическом деформировании тонкого кругового диска, в центральной части которого задано однородное поле температур, а на внешнем контуре поддерживается постоянная температура. В зависимости от радиуса диска определяется значение температуры в его центральной части, вызывающее возникновение пластических зон. Показано, что для определенного радиуса диска пластическое состояние возникает как в центральной части диска, так и на его внешней границе. Получены соотношения, которые устанавливают связь между радиусом диска и температурой его центральной части и позволяют определять изменение упругопластического состояния диска. Для определения деформаций и перемещений в диске предложен алгоритм, позволяющий рассматривать любой режим пластичности. Приведены графики для напряжений и значения эквивалентного напряжения для разных режимов пластичности.

Ключевые слова: теория пластического течения, плоское напряженное состояние, идеальный упругопластический материал, термопластичность.

Введение

Задачам термопластического состояния тел посвящено большое количество работ, что связано с существенным влиянием температуры на напряженное и деформированное состояние материальных тел. Укажем лишь на некоторые работы, посвященные рассмотрению термопластического состояния тел цилиндрической формы при рассмотрении кусочно-линейных условий пластичности [2–10].

В [2–4] при выборе условия пластичности Треска учитывается влияние изотропного упрочнения. Зависимость предела пластичности от температуры при условии Треска учитывается в [5–8], а в работе [9] используется условие пластичности максимального приведенного напряжения. В [10] изучается задача об определении напряженного и деформированного состояния длинного цилиндра, имеющего разогреваемый сердечник (в качестве условия пластичности принимается условие Треска).

Привлекательность использования кусочно-линейных функций пластичности обусловлена возможностью получить аналитические решения некоторых задач, для которых использование гладких функций пластичности позволяет получить, как правило, только численное решение. Однако использование кусочно-линейных функций пластичности усложняет алгоритм решения задачи, поскольку для нахождения правильного решения в алгоритм надо заложить проверки возможного изменения режима пластичности в процессе изменения внешних воздействий [11, 12].

1. Постановка задачи

Рассматривается тонкий круговой диск, подверженный полярно-симметричному тепловому и силовому воздействиям. Поле температур центральной части диска является однородным: $T = T_a$. На внешней границе диска $r = b$ задано давление p_b и температура T_b . Поскольку замена $T' = T - T_b$ приводит к равенству $T'_b = 0$, то в дальнейшем будем считать, что $T_b = 0$.

Предполагается, что материал диска является идеально упругопластическим.

Распределение температур в области имеет вид [1]:

$$T = T_a \frac{\ln(\frac{b}{r})}{\ln(\frac{b}{a})}. \quad (1)$$

Все величины приводятся к безразмерному виду. В качестве масштаба напряжений выбран предел пластичности k , в качестве масштаба длины — радиус a , масштаб температуры — один градус. Для безразмерных величин будем использовать обозначение размерных величин.

Поскольку для рассматриваемой задачи напряженное состояние можно найти без вычисления деформаций (процесс разгрузки не рассматривается), то в дальнейшем будет изложен алгоритм определения напряженного состояния в зависимости от значения внешних параметров.

2. Упругое состояние диска

Если диск находится в упругом состоянии, то компоненты тензора напряжений определяются по формулам [1]:

$$\sigma_r = -\frac{\alpha E}{r^2} \left(\int_0^r T r dr \right) + A + \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_\varphi = \frac{\alpha E}{r^2} \left(\int_0^r T r dr \right) - \alpha E T + A - \frac{B}{r^2}. \quad (2)$$

Здесь E — модуль Юнга, α — средний коэффициент теплового расширения.

Величины A и B определяются из условия

$$\sigma_r|_{r=b} = -p_b$$

и условия ограниченности напряжений в центре диска

$$A = -p_b + \frac{\alpha E}{b^2} \left(\int_0^b T r dr \right), \quad B = 0.$$

С учетом закона распределения температуры (1) в области $a \leq r \leq b$ получаем

$$A = -p_b + \frac{\alpha E T_a}{4 \ln(\frac{b}{a})} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right). \quad (3)$$

В области $0 \leq r \leq a$ для напряжений имеем $\sigma_r = \sigma_\varphi$. На границе $r = a$

$$p_a = p_b - \frac{\alpha E T_a}{4 b^2} \left(\frac{b^2 - a^2}{\ln(\frac{b}{a})} - 2 \right). \quad (4)$$

3. Эквивалентное напряжение и условие пластичности

Если выбрано условие пластичности, то функцию пластичности можно рассматривать в качестве эквивалентного напряжения σ_{eq} в области упругого состояния.

Не умаляя общности ниже изложенного алгоритма, для определенности выберем условие пластичности максимального приведенного напряжения (условие Шмидта [13])

$$\max(|2\sigma_r - \sigma_\varphi|, |2\sigma_\varphi - \sigma_r|, |\sigma_\varphi + \sigma_r|) = 2k. \quad (5)$$

С увеличением значения параметра T_a происходит увеличение σ_{eq} . Из решения упругой задачи следует, что в зависимости от радиуса диска b наибольшее значение σ_{eq} принимает либо в центре диска, либо на границе $r = b$.

4. О переходе в пластическое состояние

Если $p_a = k$, область диска $0 \leq r \leq a$ перейдет в пластическое состояние. Из (3) следует, что этот переход происходит, когда

$$T_a = T_1 = \frac{4b^2(k - p_b) \ln(\frac{b}{a})}{\alpha E(2b^2 \ln(\frac{b}{a}) - b^2 + a^2)}. \quad (6)$$

Из (6) вытекает, что

$$\lim_{b \rightarrow \infty} T_a = \frac{4(k - p_b)}{\alpha E}.$$

Когда на границе $r = b$ эквивалентное напряжение достигает значения $2k$, значение давления p_b определяет точку на кривой пластичности, соответствующую напряженному состоянию границы $r = b$. В дальнейшем будем полагать, что $p_b = 0$.

Из решения для упругого состояния следует, что на границе $r = b$ может реализоваться только режим пластичности

$$2\sigma_\varphi - \sigma_r = 2k. \quad (7)$$

Учитывая формулы (1), (2), находим, что на границе $r = b$ выполняется условие (7), если

$$T_a = T_2 = \frac{2kb^2 \ln(\frac{b}{a})}{\alpha E(b^2 - a^2)}. \quad (8)$$

Из (8) следует, что

$$\lim_{b \rightarrow a} T_a = \frac{k}{\alpha E}.$$

Значение радиуса диска, для которого выполняется равенство $T_1 = T_2$, будем обозначать символом b_k . Из равенства $T_1 = T_2$ следует уравнение

$$2b_k^2 \ln\left(\frac{b_k}{a}\right) + 3a^2 - 3b_k^2 = 0. \quad (9)$$

Определяя из уравнения (9) величину b_k и подставляя ее в формулу (6) или (8) находим значение T_a , для которого область $0 \leq r \leq a$ и граница $r = b$ переходят в пластическое состояние одновременно.

На рис. 1 в зависимости от радиуса диска показаны значения T_1 и T_2 , для которых соответственно на границе $r = a$ и $r = b$ выполняется условие пластичности (5)

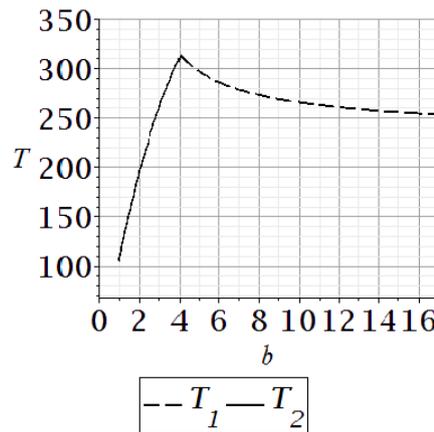


Рис. 1. $a = 1$, $\alpha E = 0.0096$

5. Упругопластическое состояние диска. Одна пластическая область

Рассмотрим случай, когда радиус диска $b > b_k$. В диске, кроме внешней границы $r = b$, радиальное напряжение является сжимающим. Поэтому, когда $T_1 \leq T_a$, в центральной части диска $a \leq r \leq c_1$ реализуется режим пластичности

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = -k.$$

Предположим, что в области $c_1 \leq r \leq b$ диск находится в упругом состоянии. Тогда

$$\sigma_r = -\frac{\alpha E}{r^2} \left(\int_{c_1}^r T r dr \right) + A + \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_\varphi = \frac{\alpha E}{r^2} \left(\int_{c_1}^r T r dr \right) - \alpha E T + A - \frac{B}{r^2}. \quad (10)$$

Учитывая условия непрерывности напряжений на упругопластической границе $r = c_1$, находим

$$A = -k + \frac{\alpha E T_{c_1}}{2}, \quad B = -\frac{\alpha E T_{c_1} c_1^2}{2}, \quad T_{c_1} = T_a \frac{\ln(\frac{b}{c_1})}{\ln(\frac{b}{a})}. \quad (11)$$

Уравнение для определения радиуса упругопластической границы c_1

$$\frac{\alpha E T_a}{4 \ln(\frac{b}{a})} \left(1 - \frac{\alpha E T_{c_1} c_1^2}{2b^2} \right) - \frac{\alpha E}{b^2} \left(\int_{c_1}^b T r dr \right) - k = 0. \quad (12)$$

следует из условия $\sigma_r|_{r=b} = 0$ ($p_a = 0$).

С учетом формулы (1) уравнение (12) примет вид

$$\frac{\alpha E T_a}{4 \ln \frac{b}{a}} \left(2 \ln \left(\frac{b}{c_1} \right) + \frac{c_1^2}{b^2} - 1 \right) - k = 0. \quad (13)$$

Для определения диапазона изменения величины T_a , для которого в области $c_1 \leq r \leq b$ будет упругое состояние, необходимо учитывать два условия (граничное условие и условие пластичности):

$$\begin{cases} \sigma_r|_{r=b} = 0, \\ \sigma_\varphi|_{r=b} = k, \end{cases}$$

или, учитывая формулы (1), (10), (11),

$$\begin{cases} \alpha E T_a \left(2 \ln\left(\frac{b}{c_1}\right) + \frac{c_1^2}{b^2} - 1 \right) - 4k \ln\left(\frac{b}{a}\right) = 0, \\ \frac{\alpha E}{b^2} \left(\int_{c_1}^b T r dr \right) - \alpha E T|_{r=b} + A - \frac{B}{r^2} = k. \end{cases} \quad (14)$$

Решая эту систему, находим значение параметра T_a , при котором на границе $r = b$ будет выполняться режим пластичности

$$2\sigma_\varphi - \sigma_r = 2k,$$

и соответствующий этому значению T_a радиус упругопластической границы $r = c_1$.

Значение T_a , определяемое системой (14), обозначим T_3 .

Таким образом, в диапазоне $T_1 \leq T_a \leq T_3$ в области диска $c_1 \leq r \leq b$ будет упругое состояние. Значение c_1 определяется из (13).

На рис. 2 а) приведено распределение напряжений; на рис. 2 б) приведены графики эквивалентного напряжения для разных режимов пластичности. Данные графики являются своеобразной верификацией результатов проводимых расчетов.

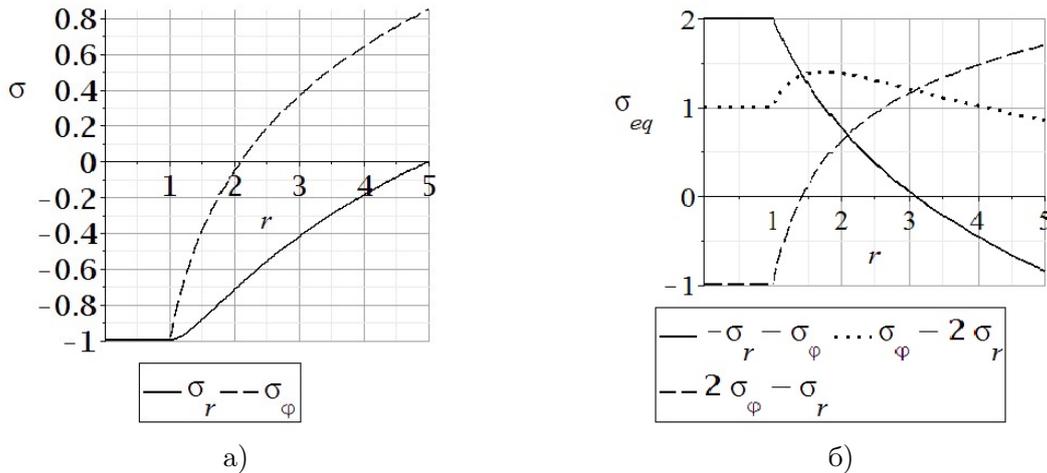


Рис. 2. $a = 1$, $\alpha E = 0.0096$, $T_a = 296.9$, $c_1 = 1$

На рис. 3 показано состояние на момент зарождения внешней пластической области.

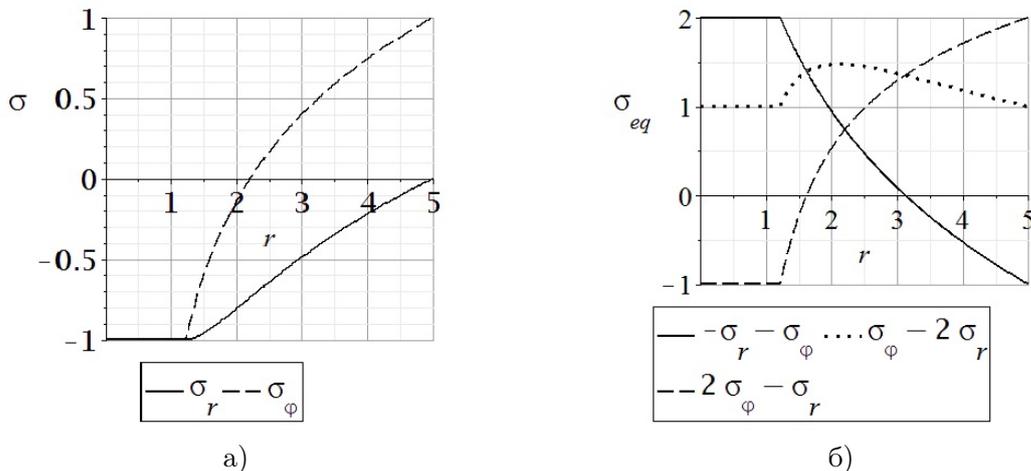


Рис. 3. $a = 1$, $\alpha E = 0.0096$, $T_a = 356.5$, $c_1 = 1.22$

В зависимости от значения параметра $T_a > T_3$ во внешней пластической области $c_2 \leq r \leq b$ могут реализоваться один или два режима пластичности.

6. Один режим пластичности во внешней пластической области

Рассмотрим случай, когда $T_a > T_3$ и на границе $r = b$ выполняется режим пластичности

$$2\sigma_\varphi - \sigma_r = 2k.$$

Задача определения напряжений в пластической зоне является статически определимой и радиальное напряжение находится из решения задачи Коши, так что, учитывая условие

$$\sigma_r|_{r=b} = 0,$$

получаем

$$\sigma_r = 2k \left(1 - \sqrt{\frac{b}{r}}\right), \quad \sigma_\varphi = k \left(2 - \sqrt{\frac{b}{r}}\right). \quad (15)$$

Для режима пластичности

$$2\sigma_\varphi - \sigma_r = 2k$$

радиальное напряжение может изменяться в пределах

$$-\frac{2k}{3} \leq \sigma_r \leq \frac{2k}{3}.$$

Учитывая это, а также первую формулу (15) и условие

$$\sigma_r|_{r=b} = 0,$$

находим границы области, где может выполняться рассматриваемый режим пластичности:

$$\frac{9}{16}b \leq r \leq b.$$

Напряжения в упругой области $c_1 \leq r \leq c_2$ определяются по формулам (10), (11). Значения параметра T_a и радиуса c_1 , когда радиус упругопластической границы внешней пластической области

$$c_2 = \frac{9}{16}b, \quad (16)$$

определяются из системы уравнений, следующей из условия непрерывности напряжений

$$\begin{cases} [\sigma_r]|_{r=c_2} = -\frac{\alpha E}{c_2^2} \left(\int_{c_1}^{c_2} T r dr \right) + A + \frac{B}{c_2^2} + \frac{2k}{3} = 0, \\ [\sigma_\varphi]|_{r=c_2} = \frac{\alpha E}{c_2^2} \left(\int_{c_1}^{c_2} T r dr \right) - \alpha E T_{c_2} + A - \frac{B}{c_2^2} - \frac{2k}{3} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

В формулах (17)

$$c_2 = \frac{9}{16}b, \quad T_{c_2} = T_a \frac{\ln(\frac{16}{9})}{\ln(\frac{b}{a})}.$$

Значение параметра T_a , для которого выполняется равенство (16), обозначим T_4 .

Если $T_3 \leq T_a \leq T_4$, то во внешней пластической области будет выполняться только режим пластичности

$$2\sigma_\varphi - \sigma_r = 2k.$$

Соответствующие значения радиусов c_1 и c_2 определяются из условий непрерывности напряжений на границе $r = c_2$:

$$\begin{cases} [\sigma_r] |_{r=c_2} = -\frac{\alpha E}{c_2^2} \left(\int_{c_1}^{c_2} T r dr \right) + A + \frac{B}{c_2^2} - 2k(1 - \sqrt{\frac{b}{c_2}}) = 0, \\ [\sigma_\varphi] |_{r=c_2} = \frac{\alpha E}{c_2^2} \left(\int_{c_1}^{c_2} T r dr \right) - \alpha E T c_2 + A - \frac{B}{c_2^2} - k(2 - \sqrt{\frac{b}{c_2}}) = 0. \end{cases}$$

На рис. 4 показано распределение напряжений и эквивалентного напряжения для разных режимов пластичности, когда параметр T_a достигает значения, при котором на упруго-пластической границе c_2 происходит смена режима пластичности.

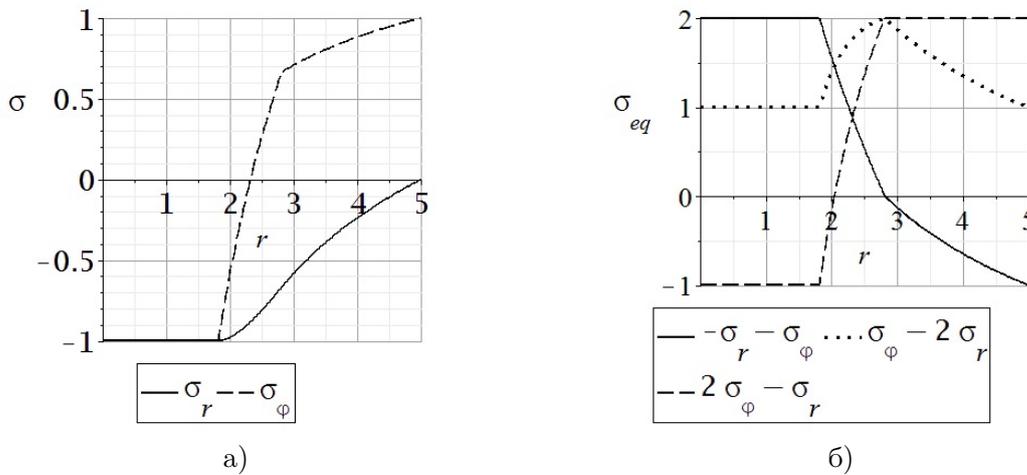


Рис. 4. $a = 1$, $\alpha E = 0.0096$, $T_a = 767.1$, $c_1 = 1.82$, $c_2 = 2.81$

7. Два режима пластичности во внешней пластической области

Если $T_a > T_4$, то радиус границы внешней пластической области $c_2 > 9b/16$ и во внешней пластической зоне будут выполняться два режима пластичности:

1) в области $9b/16 \leq r \leq b$ выполняется режим

$$2\sigma_\varphi - \sigma_r = 2k,$$

2) в области $c_2 \leq r \leq 9b/16$ выполняется режим

$$\sigma_\varphi - 2\sigma_r = 2k.$$

Решая задачу

$$\begin{cases} r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\varphi = 0, \\ \sigma_\varphi - 2\sigma_r = 2k, \\ [\sigma_r] |_{r=9b/16} = 0, \end{cases}$$

находим формулы для компонент тензора напряжений в области $c_2 \leq r \leq 9b/16$:

$$\sigma_r = 2k \left(\frac{32k r}{27 b} - 1 \right), \quad \sigma_\varphi = 2k \left(\frac{64k r}{27 b} - 1 \right).$$

В упругой области $c_1 \leq r \leq c_2$ будут выполняться равенства (10), (11). Значения радиусов c_1 и c_2 будут являться решением системы уравнений

$$\begin{cases} [\sigma_r] |_{r=c_2} = -\frac{\alpha E}{c_2^2} \left(\int_{c_1}^{c_2} T r dr \right) + A + \frac{B}{c_2^2} - 2k \left(\frac{32k}{27} \frac{c_2}{b} - 1 \right) = 0, \\ [\sigma_\varphi] |_{r=c_2} = \frac{\alpha E}{c_2^2} \left(\int_{c_1}^{c_2} T r dr \right) - \alpha E T_{c_2} + A - \frac{B}{c_2^2} - 2k \left(\frac{64k}{27} \frac{c_2}{b} - 1 \right) = 0. \end{cases}$$

8. Алгоритм определения деформаций и перемещений

Компоненты тензора упругих деформаций определяются согласно закону Гука [1]:

$$E\varepsilon_r^e = \sigma_r - \nu\sigma_\varphi, \quad E\varepsilon_\varphi^e = \sigma_\varphi - \nu\sigma_r, \quad E\varepsilon_z^e = -\sigma_\varphi - \sigma_r, \quad (18)$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Если в качестве определяющего соотношения также выбирается ассоциированный закон пластического течения, то при принятии гипотезы естественного состояния для любого i -го режима кусочно-линейного условия пластичности общего вида ($\alpha_i + \beta_i + \gamma_i \neq 0$, $\alpha_i = const, \beta_i = const$)

$$\begin{cases} \alpha_i \sigma_\varphi + \beta_i \sigma_r + \gamma_i \sigma_z = 2k, \\ \sigma_z = 0 \end{cases} \quad (19)$$

компоненты тензора пластических деформаций будут связаны соотношением

$$\frac{\varepsilon_\varphi^p}{\alpha_i} = \frac{\varepsilon_r^p}{\beta_i} = \frac{\varepsilon_z^p}{\gamma_i}. \quad (20)$$

Для малых деформаций полные деформации определяются через радиальную компоненту вектора перемещений по формулам:

$$\varepsilon_\varphi = \varepsilon_\varphi^p + \varepsilon_\varphi^e = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_r = \varepsilon_r^p + \varepsilon_r^e = \frac{du}{dr}. \quad (21)$$

Из соотношений (18), (20) и условия совместности деформаций

$$r \frac{d\varepsilon_\varphi}{dr} = \varepsilon_\varphi - \varepsilon_r = 0$$

следует уравнение для определения осевой компоненты тензора пластических деформаций

$$r \frac{\alpha_i}{\gamma_i} \frac{dE\varepsilon_z^p}{dr} + \frac{(\alpha_i - \beta_i)}{\gamma_i} \frac{dE\varepsilon_z^p}{dr} + r \frac{d\sigma_\varphi - \nu\sigma_r}{dr} + (1 + \nu)(\sigma_\varphi - \sigma_r) = 0.$$

При определении деформаций в пластической области учитываем, что на упругопластических границах c_1 и c_2 для пластических деформаций справедливо равенство

$$\varepsilon_z^p = \varepsilon_r^p = \varepsilon_\varphi^p = 0.$$

Зная ε_z^p и используя формулы (20), (21), определяем все компоненты тензоров деформаций и радиальную компоненту вектора перемещений.

9. Замечания

Для нахождения напряжений в пластических областях в настоящей работе для определенности выбрано условие пластичности максимального приведенного напряжения, что не является принципиальным моментом. Однако следует сделать несколько замечаний относительно определения деформаций для некоторых конкретных условий пластичности.

Рассмотрим режим пластичности, для которого в (19) коэффициент γ_i равен 0. В этом случае $\varepsilon_z^p = 0$. Тогда из соотношений (18), (20) и условия совместности деформаций можно получить уравнение для окружной или радиальной компоненты тензора пластических деформаций, например,

$$r \frac{\alpha_i}{\beta_i} \frac{dE\varepsilon_r^p}{dr} + \frac{\alpha_i - \beta_i}{\beta_i} \frac{dE\varepsilon_r^p}{dr} + r \frac{d\sigma_\varphi - \nu\sigma_r}{dr} + (1 + \nu)(\sigma_\varphi - \sigma_r) = 0.$$

Если $\gamma_i = 0$ и $\alpha_i = -\beta_i$, что имеет место, например, для режимов условия пластичности Треска, то из соотношений (20), (21), следует уравнение

$$\frac{dEu}{dr} + \frac{dEu}{dr} - (1 - \nu)(\sigma_\varphi + \sigma_r) = 0.$$

Решение рассматриваемой задачи в случае, когда радиус диска $b < b_r$, вполне аналогично изложенному выше решению. Отличие будет заключаться в том, что при увеличении параметра T_a пластическая зона сначала зарождается у внешней границы диска, а при достижении определенного значения в пластическое состояние перейдет и центральная часть диска T_a .

Литература

1. Timoshenko S.P., Goodier J.N. Theory of elasticity. New York: McGraw-Hill, 1970.
2. Mack W., Gamer U. Die Spannungsverteilung in der elastisch-plastischen Kreisscheibe infolge einer kreisflächenförmigen Wärmequelle // Forschung im Ingenieurwesen 1985. Bd. 51. Nr. 5. S. 160–164.
3. Eraslan A.N., Arslan E., Mack W. The strain hardening rotating hollow shaft subject to a positive temperature gradient // Acta Mech. 2007. V. 194. P. 191–211.
4. Arslan E., Mack W., Eraslan A.N. The rotating elastic-plastic hollow shaft conveying a hot medium // Forschung im Ingenieurwesen. 2010. V. 74. P. 27–39.
5. Kovacs A. Thermal stresses in a shrink fit due to an inhomogeneous temperature distribution // Acta Mech. 1994. V. 105. P. 173–187.
6. Bengeri M., Mack W. The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit // Acta Mech. 1994. Vol. 103. P. 243–257.
7. Arslan E., Mack W., Eraslan A.N. Effect of a temperature cycle on a rotating elastic-plastic shaft // Acta Mech. 2008. V. 195. P. 129–140.
8. Dats E., Murashkin E., Stadnik N. On a multi-plastics modeling framework thermo-elastic-plastic mantrials // Procedia Manuroctssing Facturing. 2017. V. 7. P. 427–434.
9. Dats E., Murashkin E. On unsteady heat effect in center of the elastic-plastic disk // Proceedings of the World Congress on Engineering 2016. 2016. P. 69–72.

10. Orcan Y., Gamer, U. Elastic-plastic deformation of a centrally heated cylinder // *Acta Mech.* 1991. V. 90. P. 61–80.
11. Переяславская И.И., Артемов М.А., Барановский Е.С. К вопросу математического моделирования осесимметричного плоско-напряженного состояния сжимаемого упругопластического тела // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.* 2017. № 1 (31). С. 22–39.
12. Артемов М.А., Барановский Е.С., Потапов Н.С. Математическое моделирование упругопластического состояния цилиндрической области // *Современные наукоемкие технологии.* 2016. № 9. Ч. 2. С. 191–195.
13. Schmidt R. Über den Zusammenhang von Spannungen und Formänderungen im Verfestigungsgebiet // *Ingenieur-Archiv.* 1932. Bd. 3. S. 215–235.

MSC 74F05, 74C99

Mathematical modeling of the process of thermoplastic deformation of a thin circular disk

M.A. Artemov, E.S. Baranovskii, I.I. Pereyaslavskaya

Voronezh State University

Abstract: Using the Schmidt plasticity condition (plasticity condition of the maximum reduced stress), we give a detailed algorithm for solving the problem of elasto-plastic deformation of a thin circular disk, in the central part of which a uniform temperature field is given, and a constant temperature is maintained on the outer contour. Taking into account the radius of the disk, we determine the temperature at which plastic zones occur. It is shown that for the certain radius of the disk the plastic condition occurs both in the central part and on the boundaries of the disk. The ratios, which establish the relation between the radius of the disk and the temperature of its central part, and which allow to determine the elasto-plastic state of disk, are derived. The algorithm for determining deformations and displacements, which allows to consider any plasticity regime, is presented. Plots for stresses and values of equivalent stress for different regimes of plasticity are given.

Keywords: theory of plastic flow, plane stress state, elastic-perfectly plastic material, thermoplasticity

References

1. Timoshenko S.P., Goodier J.N. Theory of elasticity. New York: McGraw-Hill, 1970.
2. Mack W., Gamer U. Die Spannungsverteilung in der elastisch-plastischen Kreisscheibe infolge einer kreisflächenförmigen Wärmequelle // Forschung im Ingenieurwesen 1985. Bd. 51. Nr. 5. S. 160–164.
3. Eraslan A.N., Arslan E., Mack W. The strain hardening rotating hollow shaft subject to a positive temperature gradient // Acta Mech. 2007. V. 194. P. 191–211.
4. Arslan E., Mack W., Eraslan A.N. The rotating elastic-plastic hollow shaft conveying a hot medium // Forschung im Ingenieurwesen. 2010. V. 74. P. 27–39.
5. Kovacs A. Thermal stresses in a shrink fit due to an inhomogeneous temperature distribution // Acta Mech. 1994. V. 105. P. 173–187.
6. Bengeri M., Mack W. The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit // Acta Mech. 1994. Vol. 103. P. 243–257.
7. Arslan E., Mack W., Eraslan A.N. Effect of a temperature cycle on a rotating elastic-plastic shaft // Acta Mech. 2008. V. 195. P. 129–140.
8. Dats E., Murashkin E., Stadnik N. On a multi-plastics modeling framework thermo-elastic-plastic mantrials // Procedia Manuroctssing Facturing. 2017. V. 7. P. 427–434.
9. Dats E., Murashkin E. On unsteady heat effect in center of the elastic-plastic disk // Proceedings of the World Congress on Engineering 2016. 2016. P. 69–72.

10. Orcan Y., Gamer, U. Elastic-plastic deformation of a centrally heated cylinder // *Acta Mech.* 1991. V. 90. P. 61–80.
11. Pereyaslavskaya I.I., Artemov M. A., Baranovskii E. S. On the problem of mathematical modeling of the axisymmetric plane stress state of a compressible elastic-plastic body // *Proceedings of Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Serie: Mechanics.* 2017. No. 1(31). P. 22–39.
12. Artemov M. A., Baranovskii E. S., Potapov N.S. Mathematical modeling of elastic-plastic state of a cylindrical domain // *Modern High Technologies.* 2016. No. 9-2. P. 191–195.
13. Schmidt R. Über den Zusammenhang von Spannungen und Formänderungen im Verfestigungsgebiet // *Ingenieur-Archiv.* 1932. Bd. 3. S. 215–235.