

УДК 532.5.032

## **Математическое моделирование течения газожидкостной смеси\***

В.Н. Петров <sup>1</sup>, В.И. Анфиногентов <sup>2</sup>, С.Л. Малышев <sup>1</sup>, Л.А. Ахметзянова <sup>1</sup>,  
С.В. Петров <sup>3</sup>

Федеральное государственное унитарное предприятие Всероссийский научно-исследовательский институт расходомерии <sup>1</sup>, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева – КАИ» <sup>2</sup>, ООО «БРИЗ» <sup>3</sup>

*Аннотация:* В работе представлена математическая модель течения, описывающая транспортировку сырой нефти от лицензионного участка до предприятия подготовки нефти. Растворённый попутный нефтяной газ при транспортировке нефти выделяется в свободное состояние, образуя газожидкостную смесь, что приводит к дополнительной систематической погрешности. Предлагаемый метод расчёта позволяет определить структуру исследуемого течения и понять физику образования систематической погрешности.

*Ключевые слова:* математическая модель, погрешность, сырая нефть, свободный нефтяной газ.

### **1. Введение**

Экономическое развитие России сегодня во многом зависит от конкурентоспособности отечественных товаров и услуг. Определяющим в данных условиях становится качество товара и его цена. При этом качеством продукции необходимо уметь управлять, анализировать и варьировать процессами, влияющими на производимую продукцию. Данный вопрос затронул и процесс измерения дебита нефти скважин, а также процесс транспортировки сырой нефти (содержащей растворённый попутный газ, который со временем переходит в свободное состояние, образуя газожидкостную смесь) от лицензионного участка до перерабатывающего предприятия.

Появление в транспортируемой нефти свободного попутного газа вносит дополнительную погрешность в однофазные расходомеры, установленные на лицензионном участке и перерабатывающем предприятии, достигая 10% и более, что приводит к дисбалансу во взаиморасчётах между поставщиком и потребителем.

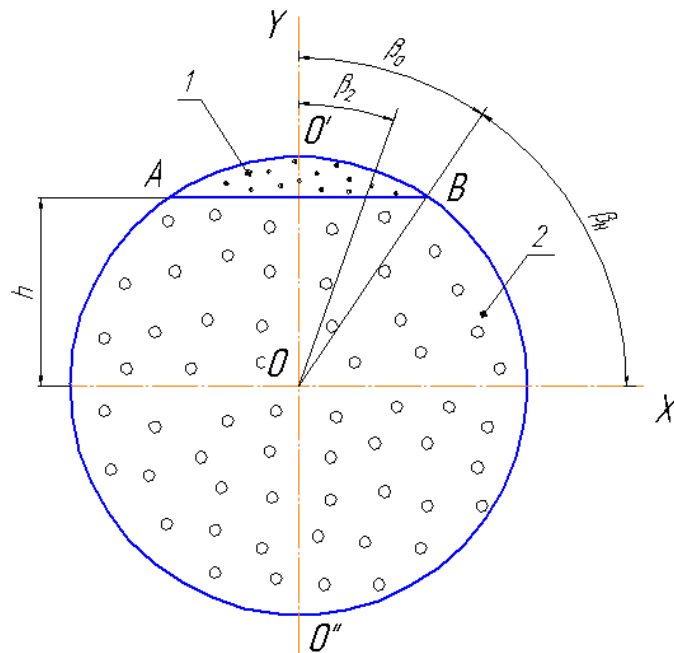
---

\*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке ФГУП «ВНИИР»

В связи с этим разработана математическая модель структуры течения газожидкостной смеси, поступающей на однофазный расходомер, является актуальнейшей задачей.

При выделении свободного попутного нефтяного газа из растворённого состояния возникает пузырьковый режим течения, переходящий в поршневой, а впоследствии и в расслоённый. Структура течения при этом зависит от времени транспортирования сырой нефти, которая в свою очередь зависит от расстояния между лицензионным участком и перерабатывающим комбинатом, которое может достигать 80 км и более. При этом скорость течения нефти, в соответствии с РД 153-39.4-113-01 [1], должна находиться в пределах от 0,5 до 7 м/с.

В данной работе рассматривается математическая модель расслоённого режима течения газожидкостного потока (рис.1).



**Рис. 1.** Схема течения фаз (в поперечном разрезе трубы)  
1 – капельный режим течения; 2 – пузырьковый режим течения

Расслоённый режим течения в области  $AO'B$  представляет собой двухфазное капельное течение, состоящее из газовой фазы с присутствием капель жидкости. Течение в области  $AO''B$  представляет пузырьковый режим, состоящий из жидкости, в которой находятся воздушные пузырьки. Данное течение можно рассчитать методом пограничного слоя, получившим широкое распространение в 60-е ... 90-е г.г. прошлого века. Надо заметить, что, как показала практика, данный метод обладает рядом преимуществ. Так, перед тем, как провести решение той или иной задачи, исследователи производят схематизацию течения, выделяя ядро потока, сдвиговый слой в канале и т.д. При этом задача сводится к расчёту тонкого сдвигового слоя. Такая схематизация течения и известные физические законы позволяют получить кроме профиля скорости дополнительные выражения для замыкания системы интегральных уравнений или для её упрощения, а также использовать более простые уравнения для расчёта некоторых участков течения.

## 2. Использование метода пограничного слоя

Интегральные методы предполагают задание профиля скорости и других параметров в слое смешения, что вполне оправданно для многих практических задач. Эффективность интегральных методов для расчёта турбулентных струйных течений в каналах впервые была показана Абрамовичем Г. Н. [2], впоследствии, в работе [3], изложены результаты экспериментальных исследований и методы расчёта турбулентных струй, развивающихся в осесимметричных и плоских каналах.

Как было сказано выше, кроме уравнений, описывающих профили скорости и концентрации как капельного режима течения в области  $AO'B$ , так и пузырькового  $AO''B$  (рис.1) также используются интегральные уравнения сохранения расхода газа и примеси (в зависимости от области течения) и количества движения смеси. В качестве модели турбулентности, как показала практика, целесообразно использовать гипотезу Буссинеска.

Для решения задачи в области капельного режима течения воспользуемся уравнениями пограничного слоя: неразрывности, движения и диффузии примеси [3]. Они имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho y U) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho y V) = 0; \quad (1)$$

$$\rho U \frac{\partial U}{\partial x} + \rho V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y}(y \tau) - \frac{\partial P}{\partial x}; \quad (2)$$

$$\rho U \frac{\partial C}{\partial x} + \rho V \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y}(y \sigma_D), \quad (3)$$

где  $U$ ,  $V$  – осредненная составляющая вектора скорости вдоль оси  $x$  и  $y$  соответственно;  $\rho$  – плотность смеси;  $C$  – концентрация примеси газа;  $P$  – статистическое давление;  $\sigma_D$  – плотность потока примеси газа;  $\tau$  – касательное напряжение.

Плотность потока массы газа, следуя гипотезе Буссинеска, можно записать в виде:

$$\sigma_D = \left( \frac{\mu_T}{Sc_T} + \frac{\mu}{Sc} \right) \frac{\partial C}{\partial y}, \quad (4)$$

где  $\mu_T$  – турбулентная вязкость,  $\mu$  – вязкость;  $Sc_T$  – турбулентное число Шмидта,  $Sc$  – молекулярное число Шмидта. Надо заметить, что при выводе формулы профиля концентрации примеси граничные условия записывались у стенки канала и на границе между капельным и пузырьковым режимами течения. Запишем в конечном виде основные уравнения.

Формула профиля концентрации в потоке в нашем случае примет вид:

$$\frac{1 - \tilde{N}_m}{1 - C} = \left( \frac{1 - C_m}{1 - C_\delta} \right)^{f_D(\eta_D)}, \quad (5)$$

где  $f_D(\eta_D) = 6\eta_D^2 - 8\eta_D^3 + 3\eta_D^4$ ;  $C_m$ ,  $C_\delta$  – соответственно, концентрации жидкой фазы на оси границы раздела потока и у стенки канала; индексы  $m$  и  $\delta$  соответствуют параметру на границе, и относящегося к капельному и пузырьковому режиму,

соответственно; индекс ' соответствует капельному режиму течения;  $\eta_{D'} = \frac{y}{\delta_{D'}}$  - безразмерная координата;  $\delta_{D'}$  - толщина диффузионного слоя; индекс  $D$  - диффузионная граница слоя смешения.

Формула профиля скорости на оси границы раздела канала примет вид:

$$\frac{U - U'_{\delta}}{U'_m - U'_{\delta}} = I - \frac{\int_0^{\eta} \left( \frac{1 - C_{\delta}}{1 - C_m} \right)^{f_{D'}(\eta_{D'})} \eta'(1 - \eta')^2 d\eta'}{\int_0^1 \left( \frac{1 - C_{\delta}}{1 - C_m} \right)^{f_{D'}(\eta_{D'})} \eta'(1 - \eta')^2 d\eta'} \quad , \quad (6)$$

где  $U'_m, U'_{\delta}$  - скорость потока на оси границы раздела режимов течения и у стенки канала соответственно;  $\eta = \frac{y}{\delta}$  - безразмерная координата.

Дифференциальное уравнение изменения скорости на оси капельного потока имеет вид:

$$dU_m = - \frac{2(U'_m - U'_{\delta})\rho'_m(v_{\delta} + \nu) + \frac{dp}{dx} \delta'^2 A_2}{\delta'^2 A_2 U'_m \rho'_m} dx \quad , \quad (7)$$

где  $A_2 = \int_0^1 \left( \frac{1 - C_{\delta}}{1 - C_m} \right)^{f_1(\eta)} \eta'(1 - \eta')^2 d\eta'$  ;  $\rho_m$  - плотность на оси канала ;  $\nu$  - кинематическая вязкость;

$\nu_T$  - коэффициент турбулентной вязкости;  $f_1(\eta') = 6\eta'^2 - 8\eta'^3 + 3\eta'^4$ ;  $\eta' = \frac{y}{\delta'}$  - безразмерная координата;  $\delta'$  - толщина слоя смешения.

Изменение концентрации примеси на оси потока:

$$dC_m = - \frac{24(1 - C_m) \ln \left( \frac{1 - C_{\delta}}{1 - C_m} \right) \left( \frac{\nu_T}{S_{C_T}} + \frac{\nu}{S_C} \right)}{\delta_D^2 U_m} dx, \quad (8)$$

Полученная система уравнений замыкается интегральными уравнениями сохранения газа и примеси, а также уравнением количества движения смеси.

Запишем пределы интегрирования. В области  $AO'B$  угол  $\beta$  изменяется в диапазоне  $\beta_n \leq \beta \leq \pi - \beta_n$ , где  $\beta_n = \arcsin \frac{h}{R}$ , а  $r$  изменяется в диапазоне  $\frac{h}{\sin \beta} \leq r \leq R$ .

Уравнение расхода газовой фазы:

$$\int_{\beta_i}^{\pi - \beta_i} \left( \int_{\frac{h}{\sin \beta}}^R \rho'_{\bar{a}} U r dr \right) d\beta = \rho'_{\bar{a}0} U'_0 S_{\bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{a}} \quad , \quad (9)$$

где  $S_{сег.г.}$  - площадь сегмента, занимаемого капельным режимом течения; индекс 0 относится к начальному течению.

Уравнение расхода примеси:

$$\int_{\beta_i}^{\pi-\beta_i} \left( \int_{\frac{h}{\sin \beta}}^R \rho'_{\bar{a}} \frac{\tilde{n}}{1-\tilde{n}} U r dr \right) d\beta - \int_0^x \gamma_{i\bar{a}} dx = \frac{c_0}{1-c_0} \rho'_{\bar{a}0} U_0 S_{\tilde{n}\bar{a}\bar{a}}, \quad (10)$$

где  $\gamma_{ng}$  – плотность потока массы газа, определяется по методике, изложенной в работе [3].

Уравнение количества движения смеси:

$$\int_{\beta_i}^{\pi-\beta_i} \left( \int_{\frac{h}{\sin \beta}}^R \rho U^2 r dr \right) d\beta + P S_{\tilde{n}\bar{a}\bar{a}} = \rho_0 U_0^2 S_{\tilde{n}\bar{a}\bar{a}} + P_0 S_{\tilde{n}\bar{a}\bar{a}}. \quad (11)$$

Для расчёта структуры течения в пузырьковом режиме расслоённого потока, то есть в области  $AO'B$  (рис. 1), воспользуемся методикой, изложенной в работе [3]. Как и ранее, запишем основные уравнения, позволяющие рассчитать структуру течения пузырькового режима в области  $AO'B$ .

Используем уравнения пограничного слоя (1), (2) и уравнение диффузии примеси (капель):

$$\rho U \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \rho V \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} (y \sigma_D), \quad (12)$$

где  $\varphi$  – концентрация примеси газа;  $\sigma_D = \left( \frac{\mu_\delta}{Sc_\delta} + \frac{\mu}{Sc} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y}$  – плотность потока

массы примеси. Аналогично, как и при расчёте капельного течения определяем профили скорости и концентрации примеси параметров пузырькового режима.

Изменение скорости на оси двухфазного потока определяется зависимостью:

$$\frac{dU_m}{dx} = - \frac{2(U_m - U_\delta)(v_T + v)\rho_m + A_1 \delta^2 \frac{dP}{dx}}{A_1 \delta^2 \rho_m U_m}, \quad (13)$$

где  $A_1 = \int_0^1 \left( \frac{\varphi_\delta}{\varphi_m} \right)^{F(\eta_D)} \eta(1-\eta)^2 d\eta$ ;  $\delta$  – граница струи, если граница достигает

стенки канала, то  $\delta = R$ ;  $R$  – радиус канала; индексы  $m$  и  $\delta$  означают значение параметра на оси канала и на границе струи, соответственно; где  $F(\eta_D) = 6\eta_D^2 - 8\eta_D^3 + 3\eta_D^4$ ; индексы  $m$  и  $\delta$  соответствуют параметру на оси и на стенке

канала в области пузырькового режима течения, соответственно;  $\eta_D = \frac{y}{\delta_D}$  –

безразмерная координата;  $\delta_D$  – толщина диффузионного слоя смешения в области пузырькового режима течения.

Получим закон изменения концентрации вдоль оси канала:

$$\frac{d\varphi_m}{dx} = - \frac{24 \left( \frac{v_T}{Sc_T} + \frac{v}{Sc} \right) \varphi_m \ln \frac{\varphi_\delta}{\varphi_m}}{U_m \delta_D^2} \quad (14)$$

Полученная система уравнений замыкается интегральными уравнениями сохранения расхода жидкой фазы и примеси, а также уравнением количества движения смеси.

Прежде чем записать интегральные уравнения, запишем пределы интегрирования. Область  $AO''B$  состоит из треугольника  $\Delta AOB$  и сектора  $AOBO''$ . Для треугольной области  $AOB$  угол  $\beta$  изменяется в диапазоне  $\beta_n \leq \beta \leq \pi - \beta_n$ , где  $\beta_n = \arcsin \frac{h}{R}$ , а  $r$  изменяется в диапазоне  $0 \leq r \leq \frac{h}{\sin \beta}$ . В секторе  $AOBO''$  угол  $\beta$  изменяется в диапазоне  $\pi - \beta_n \leq \beta \leq 2\pi + \beta_n$  и  $0 \leq r \leq R$ , при этом уравнения примут следующий вид:

Уравнение сохранения жидкой фазы:

$$\int_{\beta_i}^{\pi - \beta_i} \left( \int_0^{\frac{h}{\sin \beta}} \rho_w U r dr \right) d\beta + \int_{\pi - \beta_i}^{2\pi + \beta_i} \left( \int_0^R \rho_w U r dr \right) d\beta = \rho_w U_0 S_{\text{ж.ф.}}, \quad (15)$$

где  $S_{\text{ж.ф.}}$  – площадь, занимаемая жидкой фазой (область  $AO''B$ ).

Уравнение сохранения примеси:

$$\int_{\beta_i}^{\pi - \beta_i} \left( \int_0^{\frac{h}{\sin \beta}} \rho_w \varphi U r dr \right) d\beta + \int_{\pi - \beta_i}^{2\pi + \beta_i} \left( \int_0^R \rho_w \varphi U r dr \right) d\beta = \varphi_0 \rho_w U_0 S_{\text{ж.ф.}} \quad (16)$$

Уравнение количества движения смеси:

$$\int_{\beta_i}^{\pi - \beta_i} \left( \int_0^{\frac{h}{\sin \beta}} \rho U^2 r dr \right) d\beta + \int_{\pi - \beta_i}^{2\pi + \beta_i} \left( \int_0^R \rho U^2 r dr \right) d\beta + PR^2 = \rho_0 U_0^2 R_0^2 + P_0 R_0^2 \quad (17)$$

Полученная система уравнений решается методом Ньютона. Сходимость метода Ньютона зависит от начального приближения, параметры которого определяются с использованием метода последовательных нагружений [4]. Результаты расчёта хорошо согласуются с результатами работ Абрамовича Г. Н. [2].

### 3. Использование численного метода моделирования

Решение данной задачи возможно и численным методом, основанным на решении уравнений Навье-Стокса с использованием модели турбулентности. В качестве численного метода в данной работе использован программный продукт ANSYS Fluent, хорошо зарекомендовавший себя для решения многих аэрогидродинамических задач. Данный программный продукт позволяет ввести в процесс расчёта структуры течения дополнительные уравнения сохранения расхода, примеси и количества движения. То есть система уравнений будет замкнута.

В качестве модели турбулентности была выбрана однопараметрическая модель Spallart – Allmaracs [5]. Хотя часто считается, что чем выше порядок модели, тем точнее результаты расчёта, однако, как показывает практика, повышение порядка

модели, а, следовательно, и сложность задачи, не всегда оправданы. При этом необходимо учитывать и заложенную ошибку (допущение), принятое при разработке модели турбулентности.

Программный продукт ANSYS Fluent основан на методе контрольного объёма, заключающегося в том, что расчётная область с помощью сетки разбивается на отдельные контрольные объёмы. Для каждого объёма соблюдаются законы сохранения массы, количества движения и энергии. Процесс моделирования двухфазного течения с использованием программного продукта ANSYS Fluent заключается в создании сетки в программе генератора сеток в проточной части канала.

Как показано в работе [6], чувствительность результатов моделирования существенно зависит от распределения узлов расчётной сетки, при этом они генерируются в препроцессоре Gambit, а выбор параметров сетки, в свою очередь, требует от оператора дополнительных глубоких знаний об её влиянии на моделируемый процесс. В нашем случае с целью получения оптимального решения поставленной задачи сетка строилась с учётом схематизации течения, полученную при разработке расчёта методом пограничного слоя. Плотность сетки увеличивалась вплоть до получения сеточно-независимого решения, что, в свою очередь, требует продолжительного расчётного времени.

Все вышеописанные мероприятия позволяют провести грамотный расчёт рассматриваемого течения на программном продукте ANSYS Fluent.

#### **4. Заключение**

Наиболее сложным при моделировании течения транспортируемой нефтегазовой смеси является метод определения объёма свободного нефтяного газа, образующегося из растворённого попутного нефтяного газа. Для этих целей использовался метод, предложенный в работах [7,8]. Однако, сложность представляет определение коэффициентов влияния свободного и растворённого газа. Приведённые в работах эмпирические зависимости не учитывают индивидуальные особенности состава нефти, а также плотность и температуру нефтяного газа, что отражается на точности расчёта, который необходимо определить в этих уравнениях. Сделана попытка использовать термодинамический подход расчёта выделения растворённого газа в свободное состояние [9], но при этом необходимо знать давление среды (для этого необходимо знать объём свободного газа). Описанные способы хорошо использовать при решении поставленной задачи методом пограничного слоя. Однако, при решении численным методом определение содержания попутного нефтяного газа термодинамическим подходом существенным образом увеличивает время расчёта, иногда по техническим возможностям не удаётся получить конечный результат.

## Литература

1. РД 153-39.4-113-01. Нормы технологического проектирования магистральных нефтепроводов.
2. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. М.: Физматгиз, 1960. 715 с.
3. Алемасов В. Е., Глебов Г. А., Козлов А. П., Щёлков А. Н. Турбулентные струйные течения в каналах. Казань: Казанский филиал АН СССР, 1988. 172 с.
4. Петров В. В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и оболочек. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1975. 120 с.
5. Петров В. Н., Шабалин А. С., Сопин В. Ф., Петров С. В., Малышев С. Л. Анализ чувствительности аэродинамических характеристик структуры течения спутных струй в канале к параметрам ANSYS Fluent // Вестник технологического университета. 2016. Т. 19. № 19. С. 16-19.
6. Холли Дэвид. Анализ чувствительности аэродинамических характеристик профиля NASA-66 к параметрам сетки // Сборник ANSYS Advantage. Русская редакция. 2012. № 17. С. 41-44.
7. Постановление Правительства РФ от 16 мая 2014г. № 451 «Об утверждении Правил учёта нефти».
8. Приказ Министерства энергетики РФ от 15 августа 2014г. № 530 «Об утверждении Порядка определения коэффициентов, учитывающих наличие свободного и растворённого газа в нефти».
9. Тонконог М. И., Левин К. А., Фишман И. И. Анализ методов определения коэффициентов, учитывающих растворённый газ в нефти // Измерительная техника. 2016. № 10. С. 60-64.



MSC 76T10

## **Mathematical modeling of gas-liquid mixture flow**

V.N. Petrov <sup>1</sup>, V.I. Anfinogentov <sup>2</sup>, S.L. Malyshev <sup>1</sup>, L.A. Akhmetzyanova <sup>1</sup>,  
S.V. Petrov <sup>3</sup>

Federal State Unitary Enterprise All-Russian Research Institute of Flow  
Metering <sup>1</sup>, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher  
Education «Kazan National Research Technical University named after A. N.  
Tupolev-KAI» <sup>2</sup>, Ltd. "BRiZ" <sup>3</sup>

*Abstract:* The paper presents a mathematical flow model describing the transportation of crude oil from a licensed area to a petroleum production facility. Dissolved associated petroleum gas during transportation of oil is released into free state, forming a gas-liquid mixture, which leads to additional systemic error. The proposed method of calculation makes it possible to determine the structure of the investigated flow and to understand the physics of the formation of a systematic error.

*Keywords:* mathematical model, error, crude oil, free oil gas.

## **References**

1. RD 153-39.4-113-01. Normy tehnologicheskogo proektirovaniya magistral'nyh nefteprovodov [Norms of technological design of main oil pipelines].
2. Abramovich G. N. Teorija turbulentnyh struj [The theory of turbulent jets]. Moscow: Fizmatgiz, 1960. 715 p.
3. Alemasov V. E., Glebov G. A., Kozlov A. P., Chelkov A. N. Turbulentnye strujnye techenija v kanalah [Turbulent jet flows in channels]. Kazan: Kazan branch of the USSR Academy of Sciences, 1988. 172 p.
4. Petrov V. V. Metod posledovatel'nyh nagruzhenij v nelinejnoj teorii plastin i obolochek [The method of successive loading in the nonlinear theory of plates and shells]. Saratov: Saratov University Publishing House, 1975. 120 p.
5. Petrov V. N, Shabalin A. S., Sopin V. F., Petrov S. V., Malyshev S. L. Analiz chuvstvitel'nosti ajerodinamicheskikh harakteristik struktury techenija sputnyh struj v kanale k parametram ANSYS Fluent [Analysis of the sensitivity of the aerodynamic characteristics of the structure of the flow of wakeful jets in the channel to the ANSYS Fluent parameters] // Vestnik tehnologicheskogo universiteta [Bulletin of the Technological University]. 2016. T. 19. No 19. P. 16-19.
6. Holly David. Analiz chuvstvitel'nosti ajerodinamicheskikh harakteristik profilja NACA-66 k parametram setki [Analysis of the sensitivity of the aerodynamic characteristics of the NACA-66 profile to grid parameters] // ANSYS Advantage. Russian edition. 2012. No. 17. P. 41-44.

7. Decree of the Government of the Russian Federation of May 16, 2014. No 451 "Ob utverzhdenii Pravil uchjota nefti" ["On Approval of the Rules for Accounting for Oil."]
8. Order of the Ministry of Energy of the Russian Federation of August 15, 2014. No. 530 "Ob utverzhdenii Porjadka opredelenija koeficientov, uchityvajushhih nalichie svobodnogo i rastvorjonogo gaza v nefti" ["On approval of the Procedure for determining coefficients that take into account the presence of free and dissolved gas in oil."]
9. Tonkonog M. I., Levin K. A., Fishman I. I. Analiz metodov opredelenija koeficientov, uchityvajushhih rastvorjonnyj gas v nefti [Analysis of methods for determining coefficients that take into account dissolved gas in oil] // Izmeritel'naja tehnika [Measuring technique]. 2016. No. 10. P. 60-64.