

УДК 517.958:531.12; 534.11

Поперечные колебания вязкоупругого каната переменной длины, лежащего на упругом основании

В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов, И.В. Корпен, С.Н. Косинова

Самарский государственный технический университет,
филиал в г. Сызрань

Аннотация: Используя метод Канторовича - Галеркина находится приближенное решение задачи о поперечных колебаниях вязкоупругого каната с движущейся границей, лежащего на упругом основании. Зависимость силы сопротивления движению каната принимается пропорциональной его скорости. Учитывается изгибная жесткость каната. Приводятся результаты, полученные для амплитуды колебаний, соответствующих n -ной динамической моде. Исследуется явление установившегося резонанса и прохождения через резонанс. Решение получено для наиболее распространенного на практике случая, когда внешние возмущения действуют на движущейся границе.

Ключевые слова: колебания систем с движущимися границами, изгибная жесткость, вязкоупругость, упругое основание, сопротивление среды, резонансные свойства, амплитуда колебаний.

Системы, границы которых движутся, широко распространены в технике (канаты грузоподъемных установок [1-3], гибкие звенья передач [4], железнодорожная контактная сеть [5, 6], ленточные конвейеры [7] и т.д.). Наличие движущихся границ вызывает значительные затруднения при описании таких систем. Точные методы решения ограничены волновым уравнением и сравнительно простыми граничными условиями [8-9]. Из приближенных методов наиболее эффективен метод Канторовича – Галеркина, описанный в работах [10-12]. Данный метод позволяет учитывать действие на систему сил сопротивления среды [13, 19], изгибную жесткость [14, 17, 19], вязкоупругие свойства колеблющегося объекта [2, 14, 15], а также жесткость подложки [16, 17].

Дифференциальное уравнение, описывающее колебания каната, будет иметь вид:

$$U_{tt}(x,t) - a^2 U_{xx}(x,t) + \frac{\lambda}{\rho} U_t(x,t) + \frac{EI}{\rho} U_{xxxx}(x,t) + \frac{\mu I}{\rho} U_{xxxxt}(x,t) + \frac{k_0}{\rho} U(x,t) = 0. \quad (1)$$

Граничные условия можно записать следующим образом:

$$U(0, t) = 0; U_{xx}(0, t) = 0; \quad (2)$$

$$U(l_0(t), t) = B \cos W_0(\omega_0 t); U_x(l_0(t), t) = 0. \quad (3)$$

Начальные условия на резонансные свойства влияния не оказывают, поэтому в данном случае они не рассматриваются.

В задаче (1) – (3) используются следующие обозначения:

$U(x, t)$ – поперечное смещение точки каната с координатой x в момент времени t ; E – модуль упругости материала каната; I – осевой момент инерции сечения каната; μ – параметр, характеризующий вязкоупругость объекта; λ – сила сопротивления среды, действующая на единицу длины каната при единичной скорости поперечного движения; k_0 – жесткость подложки; $a = \sqrt{T / \rho}$ – минимальная скорость распространения волн, T – сила натяжения, ρ – линейная плотность массы каната; $l_0(t) = L_0 - v_0 t$ – закон движения границы каната; L_0 – начальная длина каната; $W_0(z)$ – функция класса C^2 ; B, ω_0 – постоянные величины.

Введем в задачу (1) – (3) безразмерные переменные:

$$\xi = \omega_0 x / a; \tau = \omega_0 t + \frac{\omega_0 L_0 - a}{-v_0}; U(x, t) = Bu(\xi, \tau),$$

и новую функцию $u(\xi, \tau) = e^{-\alpha \tau} V(\xi, \tau)$, где $\alpha = \lambda / (2\omega_0 \rho)$.

Тогда задача (1) – (3) примет вид:

$$V_{\tau\tau}(\xi, \tau) - V_{\xi\xi}(\xi, \tau) - \sigma^2 V(\xi, \tau) + (\beta^2 - \alpha\gamma^2) V_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) + \gamma^2 V_{\xi\xi\xi\xi\tau}(\xi, \tau) = 0; \quad (4)$$

$$V(0, \tau) = 0; V_{\xi\xi}(0, \tau) = 0; \quad (5)$$

$$V(l(\varepsilon\tau), \tau) = e^{\alpha\tau} \cos W(\tau); V_{\xi}(l(\varepsilon\tau), \tau) = 0, \quad (6)$$

где

$$\beta^2 = \frac{EI}{\rho} \frac{\omega_0^2}{a^4}; \gamma^2 = \frac{\mu I}{\rho} \frac{\omega_0^3}{a^4}; l(\varepsilon\tau) = 1 + \varepsilon\tau; \sigma^2 = \alpha^2 - \eta;$$

$$\eta = \frac{k_0}{\rho\omega_0^2}; W(\tau) = W_0(\tau - \gamma_0); \gamma_0 = \frac{\omega_0 L_0 - a}{-v_0}; \varepsilon = -v_0 / a.$$

Решение задачи (4) – (6) будем вести в безразмерных переменных в соответствии с методикой, изложенной в [10].

Введем обозначения $\delta^2 = (\beta^2 - \alpha\gamma^2)$ и $\Omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) = \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) - \sigma^2$, где $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$ – собственные частоты задачи (4) – (6).

Из решения задачи:

$$\delta^2 X_{n\xi\xi\xi\xi}(\xi, \varepsilon\tau) - X_{n\xi\xi}(\xi, \varepsilon\tau) - \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) = 0;$$

$$X_n(0, \varepsilon\tau) = 0; X_{n\xi\xi}(0, \varepsilon\tau) = 0;$$

$$X_n(l(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) = 0; X_{n\xi}(l(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) = 0$$

найдем выражение для динамических мод $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$ и функций $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$:

$$X_n(\xi, \varepsilon\tau) = A_n \{ \sin[k_1(\varepsilon\tau)\xi] + c_n(\varepsilon\tau) \operatorname{sh}[k_2(\varepsilon\tau)\xi] \};$$

$$\omega_{0n}(\varepsilon\tau) = [\omega_{1n}(\varepsilon\tau) + d_n(\varepsilon\tau)] \sqrt{1 + \delta^2 [\omega_{1n}(\varepsilon\tau) + d_n(\varepsilon\tau)]^2},$$

где

$$A_n = 1 / \max \{ \sin[k_1(\varepsilon\tau)\xi] + c_n(\varepsilon\tau) \operatorname{sh}[k_2(\varepsilon\tau)\xi] \};$$

$$k_1(\varepsilon\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + 4\delta^2 \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)}};$$

$$k_2(\varepsilon\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 4\delta^2 \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)}};$$

$$c_n(\varepsilon\tau) = -\frac{\sin[k_1(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)]}{\operatorname{sh}[k_2(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)]}; \quad \omega_{1n}(\varepsilon\tau) = \frac{\pi n}{l(\varepsilon\tau)};$$

$$d_n(\varepsilon\tau) = \frac{1}{l(\varepsilon\tau)} \operatorname{arctg} \frac{\delta \omega_{1n}(\varepsilon\tau)}{\sqrt{1 + \delta^2 \omega_{1n}^2(\varepsilon\tau)}}.$$

Решение задачи будем искать в виде

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau),$$

где $\mu_n(\tau) = A_{0n}(\varepsilon\tau) y_n(\tau)$, а функция $y_n(\tau)$ удовлетворяет следующему уравнению, записанному с точностью до величин порядка ε^2 :

$$y_n''(\tau) + \Omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) y_n(\tau) = -\frac{\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) Q_{n_2}(\varepsilon\tau)}{A_{0n}(\varepsilon\tau)} e^{\alpha\tau} \cos W(\tau). \quad (7)$$

Производя вычисления, для функций $Q_{n_{21}}(\varepsilon\tau)$, A_{0n} получим:

$$Q_{n_{21}}(\varepsilon\tau) = \frac{-k_1(\varepsilon\tau)\sqrt{1+4\delta^2\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)}}{\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)} \cos[k_1(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)];$$

$$A_{0n}(\varepsilon\tau) = 1/\sqrt{A_{1n}(\varepsilon\tau)};$$

$$A_{1n}(\varepsilon\tau) = \frac{1}{2}l(\varepsilon\tau)[1-c_n^2(\varepsilon\tau)] - \frac{\sin[2k_1(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)]}{4k_2(\varepsilon\tau)\omega_{0n}(\varepsilon\tau)\delta}.$$

Два линейно независимых решения однородного уравнения, соответствующего (7), имеют вид:

$$y_{1n}(\tau) = a_n(\varepsilon\tau) \cos w_n(\tau); \quad y_{2n}(\tau) = a_n(\varepsilon\tau) \sin w_n(\tau),$$

где

$$a_n(\varepsilon\tau) = 1/\sqrt{\Omega_{0n}(\varepsilon\tau)}; \quad w_n(\tau) = \int_0^\tau \Omega_{0n}(\varepsilon\zeta) d\zeta.$$

Амплитуда колебаний, соответствующая n -ой динамической моде, имеет следующий вид:

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\varepsilon\tau) \left\{ \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\},$$

где

$$E_n^2(\varepsilon\tau) = \frac{e^{-2\alpha\tau}}{4A_{1n}(\varepsilon\tau)\Omega_{0n}(\varepsilon\tau)}; \quad \Phi_n(\zeta) = w_n(\zeta) - W_n(\zeta);$$

$$F_n(\varepsilon\zeta) = \omega_{0n}^2(\varepsilon\zeta)Q_{n_{21}}(\varepsilon\zeta)e^{\alpha\zeta} \sqrt{A_{1n}(\varepsilon\zeta)/\Omega_{0n}(\varepsilon\zeta)}.$$

Используя методику, изложенную в [17], рассмотрим явление установившегося резонанса и прохождение через резонанс.

Установившийся резонанс в рассматриваемой системе наблюдается, если

$$W_n(\tau) = w_n(\tau) + \gamma_1,$$

где γ_1 – постоянная величина. Амплитуда при этом имеет вид

$$A_n(\tau) = E_n(\varepsilon\tau) \int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) d\zeta.$$

При действии на систему гармонического возмущения с частотой ω_0 , когда $W(\tau) = \tau$, на любой из динамических мод может возникнуть явление прохождения через резонанс.

Точка резонансной области τ_0 , в которой $\Phi'_n(\tau_0) = 0$, приближенно определяется по следующей формуле:

$$\tau_0 = \frac{1}{\varepsilon} \left[\sqrt{\frac{2\delta^2}{-1 + \sqrt{1 + 4\delta^2(1 + \sigma^2)}}} \cdot \pi n - 1 \right].$$

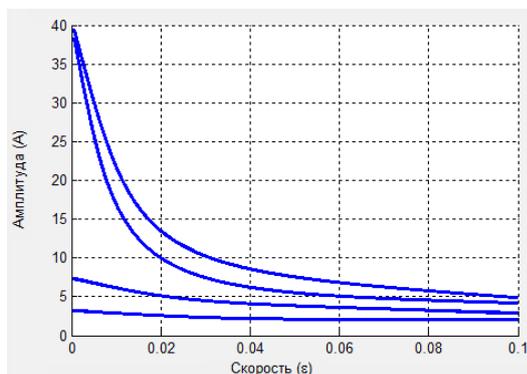
Выражение для максимально возможной амплитуды при прохождении через резонанс имеет вид:

$$A_n^2(\tau_1, \tau_2) = E_n^2(\varepsilon\tau_2) \left\{ \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}.$$

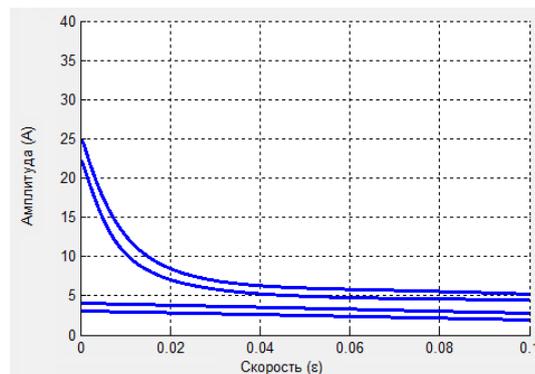
Для сравнения на рисунке 1 показаны построенные с помощью разработанного программного комплекса [18] графики зависимости максимальной амплитуды поперечных колебаний каната от относительной скорости движения границы при прохождении через резонанс на первой динамической моде при различных значениях безразмерного коэффициента α , характеризующего сопротивление среды (сверху вниз: $\alpha = 0$; $\alpha = 0,01$; $\alpha = 0,05$; $\alpha = 0,1$) со следующими параметрами модели (безразмерный коэффициент жесткости объекта $\beta = 0,1$):

– безразмерные коэффициенты γ и η , характеризующие вязкоупругость и жесткость подложки, имеют нулевые значения (рисунок 1, а);

– безразмерный коэффициент, характеризующий вязкоупругость $\gamma = 0,02$, безразмерный коэффициент, характеризующий жесткость подложки $\eta = 0,03$ (рисунок 1, б).



а)



б)

Рис.1. Графики зависимости максимальной амплитуды колебаний каната от относительной скорости движения границы ε при различных значениях безразмерных коэффициентов, характеризующих сопротивление среды, вязкоупругость и жесткость подложки

Анализ графиков, изображенных на рисунке 1, показывает, что амплитуда колебаний при нулевых значениях безразмерных коэффициентов, характеризующих сопротивление среды, вязкоупругость и жесткость подложки является оценкой сверху для амплитуд колебаний, в случае, когда соответствующие коэффициенты не равны нулю.

Литература

1. Весницкий А.И., Потапов А.И. Поперечные колебания канатов в шахтных подъемниках // Динамика систем. Горьковский университет. 1975. №7. С. 84-89.
2. Анисимов В.Н. Продольные резонансные колебания вязкоупругого каната грузоподъемной установки // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2016. Т. 18. № 4-1. С. 128-133.
3. Литвинов В.Л. Продольные колебания каната переменной длины с грузом на конце // Вестник научно-технического развития. 2016. № 1 (101). С. 19-24.
4. Самарин Ю.П., Анисимов В.Н. Вынужденные поперечные колебания гибкого звена при разгоне // Изв. вузов. Машиностроение, 1986, (12), С. 17-21.
5. Ryue J., Thompson D. Decay rates of propagating waves in railway tracks at high frequencies // J. Sound and Vibr. No. 4-5.
6. Lei Xiao-yan. Влияние резких изменений жесткости основания железнодорожного полотна на его вибрацию при движущейся нагрузке // Journal of Vibration Engineering. № 2.
7. Мулухов К.К. Особенности динамического расчета ленточно-колесных конвейеров // Труды Северо-Кавказского государственного технологического университета. № 7. 2000.
8. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М.: Физматлит. 2001. 320 с.
9. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л., Корпен И. В. Об одном методе получения точного решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Вестн. Сам. гос. техн. унта. Сер. Физ.-мат. Науки, 2012. № 3 (28). С. 145-151.
10. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами: монография // Самар. гос. техн. ун-т, Самара, 2009. 131 с.
11. Лежнева А.А. Изгибные колебания балки переменной длины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1970. № 1. С. 159-161.

12. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л. Исследование резонансных свойств механических объектов при помощи метода Канторовича-Галёркина // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки, 2009. №1 (18). С. 149–158.
13. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Анализ влияния движения границ при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки, 2009. №2 (19). С. 147–152.
14. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Вычисление собственных частот поперечных колебаний вязкоупругого каната, движущегося в продольном направлении и имеющего изгибную жесткость // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Пятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. Самара: СамГТУ, 2008. 358 с.
15. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Математические модели продольно-поперечных колебаний объектов с движущимися границами // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки, 2015. Т. 19, № 2. С. 382-397.
16. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Исследование волновых процессов в одномерной системе, лежащей на упруго-инерционном основании, с движущейся нагрузкой // Вестник научно–технического развития. 2013. № 6 (70). С. 18–29.
17. Литвинов В. Л., Анисимов В. Н. Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами: монография // Самар. гос. техн. ун-т, 2017. 149 с.
18. Литвинов В.Л., Яшагин Н.С., Анисимов В.Н. Свидетельство о регистрации электронного ресурса «Автоматизированный исследовательский комплекс «ТВ–ANALISYS» в ОФЭРНиО № 19517 от 26.09.2013 г. и ФГАНУ ЦИТиС № 130912114653 от 30.09.2013 г.
19. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л. Вычисление собственных частот каната движущегося в продольном направлении // Журнал Средневолжского математического общества. 2017. Т. 19, № 1. С. 130–139.

MSC 35R37 35G30 35Q70

Transverse vibrations of a viscoelastic rope of variable length lying on an elastic base

V.L. Litvinov, V.N. Anisimov, I.V. Korpen, S.N. Kosinova
Syzran' Branch of Samara State Technical University

Abstract: Using the Kantorovich-Galerkin method, an approximate solution of the problem of transverse vibrations of a viscoelastic rope with a moving boundary lying on an elastic base is found. The dependence of the drag force on the movement of the rope is assumed to be proportional to its speed. The flexural rigidity of the rope is taken into account. The results obtained for the amplitude of the oscillations corresponding to the n -th dynamical mode are presented. The phenomenon of steady resonance and passage through resonance is investigated. The solution is obtained for the most common case in practice, when external perturbations act on a moving boundary.

Keywords: oscillations of systems with moving boundaries, flexural rigidity, viscoelasticity, elastic base, medium resistance, resonance properties, vibration amplitude.

References

1. Vesnitsky A.I., Potapov A.I. Poperechnye kolebaniya kanatov v shakhtnykh pod"emnikakh [Transverse vibrations of ropes in mine hoists] // *Dinamika sistem. Gor'kovskiy universitet* [Dynamics of systems. Gorky University]. 1975. No. 7. P. 84-89.
2. Anisimov V.N. Prodol'nye rezonansnye kolebaniya vyzkouprugogo kanata gruzopod"emnoy ustanovki [Longitudinal resonance oscillations of a viscoelastic rope of a load-lifting installation] // [Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra Rossiyskoy akademii nauk] *Izvestiya Samara Scientific Center, Russian Academy of Sciences*. 2016. Vol. 18. No. 4-1. P. 128-133.
3. Litvinov V.L. Prodol'nye kolebaniya kanata peremennoy dliny s gruzom na kontse [Longitudinal oscillations of a rope of variable length with a load at the end] // *Vestnik nauchno–tekhnicheskogo razvitiya* [Vestnik of scientific and technical development]. No. 1 (101), 2016. P. 19-24.
4. Samarin Yu.P., Anisimov V.N. Vynuzhdennye poperechnye kolebaniya gibkogo zvena pri razgone [Forced transverse vibrations of a flexible link during acceleration], *Izv. vuzov. Mashinostroenie* [Izv. Universities. Mechanical Engineering], 1986. 12. P.17-21.
5. Ryue J., Thompson D. Decay rates of propagating waves in railway tracks at high frequencies // *J. Sound and Vibr.* No. 4-5.
6. Lei Xiao-yan. Influence of sharp changes in the rigidity of the railroad bed base on its vibration with a moving load // *Journal of Vibration Engineering*. No. 2.
7. Muluhov K.K. Osobennosti dinamicheskogo rascheta lentochno-kolesnykh konveyerov [Features of dynamic calculation of belt-wheel conveyors] // *Trudy Severo-Kavkazskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo universiteta* [Proceedings of the North-Caucasian State Technological University] №. 7. 2000.

8. Vesnitsky A.I. Volny v sistemakh s dvizhushchimisya granitsami i nagruzkami [Waves in systems with moving boundaries and loads]. Moscow: Fizmatlit, 2001. 320 p.
9. Anisimov V.N., Litvinov V.L., Korpen IV. Ob odnom metode polucheniya tochnogo resheniya volnovogo uravneniya, opisyvayushchego kolebaniya sistem s dvizhushchimisya granitsami [About one method of obtaining the exact solution of the wave equation describing the oscillations of systems with moving boundaries] // Vestn. Sam.Gos. Tech. Una. Ser. Phys.-Math. Science, 2012. № 3 (28). P. 145-151.
10. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Rezonansnye svoystva mekhanicheskikh ob"ektov s dvizhushchimisya granitsami [Resonance properties of mechanical objects with moving boundaries: monograph] // Samar. gos. tekhn. un-t, Samara [Samar. State. Tech. Un-t, Samara], 2009. P. 131.
11. Lezhneva A.A. Izgibnye kolebaniya balki peremennoy dliny [Flexural oscillations of a beam of variable length], Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela [Izv. Academy of Sciences of the USSR. Mechanics of a solid]. 1970. No. 1. 159-161 p.
12. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Issledovanie rezonansnykh svoystv mekhanicheskikh ob"ektov pri pomoshchi metoda Kantorovicha-Galerkina [Investigation of the resonance properties of mechanical objects using the Kantorovich-Galerkin method]. Vestn. Sam.Gos. Tech. University. Ser. Phys.-Math. Science, 2009. No. 1 (18). P. 149-158.
13. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Analiz vliyaniya dvizheniya granits pri issledovanii rezonansnykh svoystv sistem s dempfirovaniem [Analysis of the influence of the motion of boundaries in the study of the resonance properties of systems with damping] // Bulletin of the Samara State Technical University. Ser. "Physics and mathematics". No. 2 (19). 2009. 147–152 p.
14. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Vychislenie sobstvennykh chastot poperechnykh kolebaniy vyazkouprugogo kanata, dvizhushchegosya v prodol'nom napravlenii i imeyushchego izgibnuyu zhestkost' [Calculation of the natural frequencies of transverse vibrations of a viscoelastic rope moving in the longitudinal direction and having flexural rigidity] // Matematicheskoe modelirovanie i kraevye zadachi: Trudy Pyatoy Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem. Ch. 1: Matematicheskie modeli mekhaniki, prochnosti i nadezhnosti elementov konstruktsiy. Samara: SamGTU [Mathematical Modeling and Boundary-Value Problems: Proceedings of the Fifth All-Russian Scientific Conference with International Participation. Part 1: Mathematical models of mechanics, strength and reliability of structural elements. Samara: SamSTU], 2008. - 358 p.
15. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Matematicheskie modeli prodol'no-poperechnykh kolebaniy ob"ektov s dvizhushchimisya granitsami [Mathematical models of longitudinal-transverse oscillations of objects with moving boundaries], Vestn. Sam.Gos. Tech. University. Ser. Physical mat. Science, 2015. V. 19, No. 2. P. 382-397.
16. Erofeev V.I., Kolesov D.A., Lisenkova E.E. Issledovanie volnovykh protsessov v odnomernoy sisteme, lezhashchey na uprugo-inertsionnom osnovanii, s dvizhushcheysya nagruzkoy [Investigation of wave processes in a one-dimensional system lying on an elastic-inertial base, with a moving load] // Vestnik nauchno–tekhnicheskogo razvitiya [Bulletin of Scientific and Technical Development]. No. 6 (70), 2013. P. 18-29.
17. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Matematicheskoe modelirovanie i issledovanie kolebaniy odnomernykh mekhanicheskikh sistem s dvizhushchimisya granitsami:

monografiya [Mathematical modeling and investigation of oscillations of one-dimensional mechanical systems with moving boundaries: monograph] // Samar. gos. tekhn. un-t [Samar. State. Tech. Univ.], 2017. 149 p.

18. Litvinov VL, Yashagin NS, Anisimov VN. Svidetel'stvo o registratsii elektronnoogo resursa «Avtomatizirovannyi issledovatel'skiy kompleks «TB–ANALISYS» v OFERNiO [The certificate on registration of the electronic resource "Automated Research Complex" TB-ANALISYS "in OFERNiO] No. 19517 dated 26.09.2013 and FGANU CITiS No. 130912114653 of 30.09.2013.

19. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Vychislenie sobstvennykh chastot kanata dvizhushchegosya v prodol'nom napravlenii [Calculation of the natural frequencies of the rope moving in the longitudinal direction] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Middle-Volga Mathematical Society Journal]. 2017. V. 19. No 1. P. 130-139.