УДК 517.938

Необходимое условие сопряженности диффеоморфизмов Смейла-Виеториса *

Н.В. Исаенкова [1], Е.В. Жужома [2]

Нижегородская академия Министерства внутренних дел Российской Федерации[1],
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»[2]

Аннотация: В докладе получено необходимое условие сопряженности диффеоморфизмов Смейла-Виеториса на базовых многообразиях. Получены также некоторые достаточные условия существования сопряженности диффеоморфизмов Смейла-Виеториса. Все условия связаны с сопряжением соответствующих эндоморфизмов.

Ключевые слова: сопряженность, коммутативная диаграмма, топологическая эквивалентность, соленоид, неособый эндоморфизм.

В 1967 году Смейл ввел в теорию динамических систем соленоиды [2]. Им был построен пример диффеоморфизма полнотория в себя с притягивающим инвариантным множеством, гомеоморфным соленоиду с гиперболической структурой. Р. Вильямс первым получил конструкцию, которая являлась обобщением данного примера. В дальнейшем он изучал обобщенные соленоиды [3] - [5] и получил их внутреннюю классификацию.

В работе [1] вводится новый класс диффеоморфизмов Смейла-Виеториса, содержащих инвариантные соленоидальные множества и включающих в себя классический пример Смейла. Одним из главных результатов статьи [1] является описание всех возможных инвариантных, так называемых, базисных множеств. В данной статье представлено необходимое условие сопряженности ограничений диффеоморфизмов данного класса на базовых многообразиях. Этот шаг представляет собой начальный этап решения задачи классификации. Как будет показано далее одним из необходимых условий сопряженности диффеоморфизмов Смейла-Виеториса является сопряженность соответствующих неособых эндоморфизмов окружности.

Рассмотрим Λ, Λ' – инвариантные множества для диффеоморфизмов f, f'. Ограничения $f|_\Lambda$ и $f'|_{\Lambda'}$ называются *сопряженными*, также можно говорить, что диффеоморфизмы f и f' *сопряжены на инвариантных множествах* Λ, Λ', если существует гомеоморфизм $\varphi : M \to M$ такой, что
$$\varphi(\Lambda) = \Lambda' \quad \text{и} \quad f'|_\Lambda = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}|_{\Lambda'},$$
В случае, когда $\Lambda = NW(f)$, $\Lambda' = NW(f\prime)$, f и f' называются Ω-*сопряженными*, для случая $\Lambda = \Lambda' = M$, диффеоморфизмы f и f' называются *сопряженными*.

Диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$, который удовлетворяет аксиоме A Смейла, некоторого замкнутого n-многообразия M^n, называется диффеоморфизмом *Смейла-Виеториса* [1], если существует вложенное в M^n *базовое многообразие* $\mathcal{B}^n = S^1 \times D^{n-1}$ такое, что ограничение $f|_{\mathcal{B}^n} \stackrel{\text{def}}{=} F$ является диффеоморфизмом $F : \mathcal{B}^n \to F(\mathcal{B}^n) \subset \mathcal{B}^n$ на свой образ, удовлетворяющим следующим условиям:

- F имеет вид
$$F(t, z) = (g(t), w(t, z)), \quad t \in S^1, \quad z \in D^{n-1}, \tag{1}$$
где $g : S^1 \to S^1$ является неособым C^1 эндоморфизмом окружности степени $d \geq 2$;

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ проекты (15-01-03687-а и 16-51-10005-Ко_а) и в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2017 году (проект 90).

- при фиксированном $t \in S^1$ преобразование $w|_{\{t\}\times D^{n-1}} : \{t\} \times D^{n-1} \to \mathcal{B}^n$ – равномерно сжимающее C^1 вложение

$$\{t\} \times D^{n-1} \to int\left(\{g(t)\} \times D^{n-1}\right) \quad (2)$$

т.е. существуют некоторые константы $0 < \lambda < 1$, $C > 0$ такие, что верна оценка

$$diam\ (F^k(\{t\} \times D^{n-1})) \leq C\lambda^k diam\ (\{t\} \times D^{n-1}),\ \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Сформулируем теорему, которая является необходимым условием существования гомеоморфизма, сопрягающего диффеоморфизмы Смейла-Виеториса F_1 и F_2 на базовых многообразиях $\mathcal{B}_1^n$ и $\mathcal{B}_2^n$.

Теорема 1. Если F_1 и F_2 – диффеоморфизмы Смейла-Виеториса сопряжены на базовых многообразиях $\mathcal{B}_1^n$ и $\mathcal{B}_2^n$, то существует такое гомеоморфизм

$$\psi_* : \mathcal{B}_1^n \setminus \mathrm{int}F_1(\mathcal{B}_1^n) \to \mathcal{B}_2^n \setminus \mathrm{int}F_2(\mathcal{B}_2^n)$$

для которого выполнены следующие условия:

- ψ_* имеет вид:
$$\psi_*(t, z) = (\psi(t), w_*(t, z)), \quad t \in S^1, \quad z \in D^{n-1}, \quad (4)$$

- $\psi : S^1 \to S^1$ сопрягает эндоморфизмы g_1 и g_2, т.е. верно равенство
$$g_2 \circ \psi = \psi \circ g_1 \quad (5)$$

Из теоремы следует, что сопряженность диффеоморфизмов Смейла-Виеториса необходимо влечет сопряженность соответствующих эндоморфизмов.

Рассмотрим теперь теорему, в которой получены некоторые достаточные условия существования гомеоморфизма, сопрягающего диффеоморфизмы Смейла-Виеториса на базовых многообразиях. Вместе с теоремой 1 это дает частичное решение задачи топологической эквивалентности. В дальнейшем этот результат будет необходим для получения инвариантов сопряженности диффеоморфизмов рассматриваего класса на базовых многообразиях.

Теорема 2. Диффеоморфизмы Смейла-Виеториса F_1 и F_2 сопряжены на базовых многообразиях $\mathcal{B}_1^n$ и $\mathcal{B}_2^n$ тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм

$$\psi_* : \mathcal{B}_1^n \setminus \mathrm{int}F_1(\mathcal{B}_1^n) \to \mathcal{B}_2^n \setminus \mathrm{int}F_2(\mathcal{B}_2^n)$$

такой, что верны следующие условия:

- ψ_* имеет вид:
$$\psi_*(t, z) = (\psi(t), w_*(t, z)), \quad t \in S^1, \quad z \in D^{n-1}, \quad (6)$$

- ψ_* сопрягает F_1 и F_2 на границах базовых многообразий $\partial\mathcal{B}_1^n$ и $\partial\mathcal{B}_2^n$,

- $\psi : S^1 \to S^1$ сопрягает неособые эндоморфизмы g_1 и g_2, т.е. верно равенство
$$g_2 \circ \psi = \psi \circ g_1 \quad (7)$$

Чтобы доказать эту теорему, необходимо построить сопрягающий гомеоморфизм для F_1 и F_2 на базовых многообразиях. Пересечения для соответствующих диффеоморфизмов Смейла-Виеториса $\cap_{k\geq 0} F_i^k(\mathcal{B}_i^n) {=} Sol\ (F_i)$, где $i = 1, 2$ будут соленоидомами. Поскольку соленоид обладает сложной динамикой, то искомый гомеоморфизм строится отдельно на соленоидальных множествах и на дополнении к ним.

Литература

1. Жужома Е.В., Исаенкова Н.В. О нульмерных соленоидальных базисных множествах // Матем. сб. 2011. Т. 202. № 3. С. 47-68.

2. Smale S. Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. P. 747-817.

3. Williams R.F. One-dimensional non-wandering sets // Topology. 1967. V. 6. P. 473-487.

4. Williams R.F. Classification of subshifts of finite type // Annals of Math. 1973. V. 9. P. 120-153.

5. Williams R.F. Expanding attractors // Publ. Math. IHES. 1974. V. 43. P. 169-203.

MSC 37D20 37G30

A necessary condition for conjugacy of diffeomorphisms of Smale-Vietoris

N.V. Isaenkova [1], E.V. Zhuzhoma [2]

Nizhniy Novgorod Academy of the Ministry of the Interior of the Russian Federation [1],
National research University "Higher school of Economics"[2]

Abstract: In the report, one gets the necessary condition of conjugacy of Smale-Vietoris diffeomorphisms on basic manifolds. One gets also some sufficient conditions of the existence of conjugacy of Smale-Vietoris diffeomorphisms. All conditions connect with the conjugacy of corresponding endomorphisms.

Keywords: conjugacy, commutative diagram, topological equivalence, solenoid, nonsingular endomorphism.

References

1. Zhuzhoma E.V., Isaenkova N.V. O nul'mernyh solenoidal'nyh bazisnyh mnozhestvah [Zero-dimensional solenoidal base sets] // Matem. sb. [Sb. Math.] 2011. V. 202. No 3. P. 351–372.

2. Smale S. Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. P. 747-817.

3. Williams R.F. One-dimensional non-wandering sets // Topology. 1967. V. 6. P. 473-487.

4. Williams R.F. Classification of subshifts of finite type // Annals of Math. 1973. V. 9. P. 120-153.

5. Williams R.F. Expanding attractors // Publ. Math. IHES. 1974. V. 43. P. 169-203.