

УДК 517.9:539.2

## Исследование устойчивости решения математической модели динамики трубопровода

П.А. Вельмисов<sup>1</sup>, П.А. Шаманаев<sup>2</sup>, О.С. Язовцева<sup>2</sup>

Ульяновский государственный технический университет<sup>1</sup>, Национальный  
исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва<sup>2</sup>

*Аннотация:* Статья посвящена исследованию динамической устойчивости трубопровода, представляющего собой упругий полый стержень с протекающей внутри него жидкостью. В результате применения метода Галеркина к исследуемой модели задача сводится к исследованию устойчивости тривиального положения равновесия нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. С использованием критерия Рауса-Гурвица построена область в пространстве параметров механической системы, обеспечивающих динамическую устойчивость приближённого решения исследуемой модели.

*Ключевые слова:* динамическая устойчивость упругого трубопровода, метод Галеркина, асимптотическая устойчивость по Ляпунову, критерий Рауса-Гурвица

Рассмотрим механическую систему, состоящую из упругого полого стержня длиной  $l$  и протекающей внутри него жидкости. На плоскости  $xOy$  недеформированному стержню соответствует на оси  $Ox$  отрезок  $(0, l)$ . Скорость жидкости равна  $U$  и имеет направление, совпадающее с направлением оси  $Ox$ . Согласно работы [1] динамика трубопровода описывается уравнением

$$\begin{aligned} (m_0 + m_*)\ddot{w} + \left[ EJw'' \left( 1 - \frac{3}{2} (w')^2 \right) \right]'' + m_*U^2w'' \left[ 1 - \frac{3}{2} (w')^2 \right] + \\ + Nw'' \left( 1 + \frac{1}{2} (w')^2 \right) + 2m_*U\dot{w}' \left( 1 + \frac{1}{2} (w')^2 \right) + \alpha\dot{w}'''' - \beta\ddot{w}'' + f(x, t, w, \dot{w}) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

где коэффициенты  $m_0, m_*, J$  вычисляются по формулам:

$$m_0 = \rho_0\pi(R_*^2 - R_0^2), \quad m_* = \rho_*\pi R_0^2, \quad J = \frac{\pi}{4} (R_*^4 - R_0^4).$$

Штрих и точка сверху обозначают частные производные по координате  $x$  и времени  $t$  соответственно. В уравнении (1)  $w(x, t)$  – деформация (прогиб) в сечении  $x$  в момент времени  $t$ ,  $x \in (0, l)$ ,  $t > 0$ ;  $E$  – модуль упругости;  $U, m_*, \rho_*$  – скорость, масса жидкости (газа) на единицу длины и плотность жидкости (газа);  $l$  – длина трубы между опорами;  $R_*, R_0$  – внешний и внутренний радиусы трубопровода;  $m_0, \rho_0$  – масса металла на единицу длины трубы и плотность металла;  $N$  – сжимающая ( $N > 0$ ) или растягивающая ( $N < 0$ ) сила;  $\alpha$  – коэффициент внутреннего демпфирования; коэффициент  $\beta$  учитывает инерцию вращения сечений; функция  $f(x, t, w, \dot{w})$  определяет внешнее управляющее воздействие на трубопровод.

Для нахождения приближённого решения уравнения (1) воспользуемся методом Галёркина, согласно которому

$$w_M(x, t) = \sum_{k=1}^M v_k(t)g_k(x), \quad (2)$$

где  $\{g_k(x)\}_1^\infty$  - полная на  $[0, l]$  система базисных функций, соответствующих условиям закрепления концов трубопровода.

Рассмотрим случай шарнирного закрепления концов

$$w(0, t) = w''(0, t) = 0, \quad w(l, t) = w''(l, t) = 0,$$

в соответствии с которым выберем  $g_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}$  и ограничимся случаем  $M = 2$ . В работах [2], [3] показано, что при исследовании динамической устойчивости трубопровода результаты применения метода Галёркина для случая двух ( $M = 2$ ) и большего числа приближений ( $M = 20$ ) отличаются несущественно. Для случая  $M = 2$  приближённое решение (2) примет вид

$$w_2(x, t) = v_1(t) \sin \left( \frac{\pi x}{l} \right) + v_2(t) \sin \left( \frac{2\pi x}{l} \right).$$

Применяя метод Галёркина для  $M = 2$  и вводя новые переменные

$$y_1 = v_1, \quad y_2 = v_2, \quad y_3 = \dot{v}_1, \quad y_4 = \dot{v}_2,$$

получим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1 = y_3, \\ \dot{y}_2 = y_4, \\ \dot{y}_3 = \frac{(-1)}{B} \left[ Cy_1^3 + 8Cy_1y_2^2 + \frac{2}{3} Ky_1y_2y_3 + \frac{1}{3} Ky_1^2y_4 - \frac{36}{7} Ky_2^2y_4 + \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + Ay_1 + \frac{\pi^4\alpha}{2l^3}y_3 - \frac{8}{3}m_*Uy_4 \right], \\ \dot{y}_4 = \frac{(-2l)}{(2Bl + 3\pi^2\beta)} \left[ \left( 16C - \frac{9\pi^6D}{l^5} \right) y_2^3 + \left( 8C - \frac{9\pi^6D}{2l^5} \right) y_1^2y_2 + \frac{88}{21} Ky_1y_2y_4 + \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{44}{21} Ky_2^2y_3 + Ky_1^2y_3 + \left( 4A + \frac{6\pi^4D}{l^3} \right) y_2 + \frac{8\pi^4\alpha}{l^3} y_4 + \frac{8}{3} m_*Uy_3 \right], \end{array} \right. \quad (3)$$

где

$$A = \frac{\pi^4D}{2l^3} - \frac{\pi^2(m_*U^2 + N)}{2l}; \quad B = \frac{\pi^2\beta}{2l} + \frac{l(m_0 + m_*)}{2}; \\ C = -\frac{3\pi^6D}{16l^5} + \frac{\pi^4(3m_*U^2 - N)}{16l^3}; \quad K = \frac{4\pi^2m_*U}{5l^2}.$$

Система, соответствующая линейному приближению системы (3) имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1 = y_3, \\ \dot{y}_2 = y_4, \\ \dot{y}_3 = \frac{(-1)}{B} \left[ Ay_1 + \frac{\pi^4\alpha}{2l^3} y_3 - \frac{8}{3} m_*Uy_4 \right], \\ \dot{y}_4 = \frac{(-2l)}{(2Bl + 3\pi^2\beta)} \left[ \left( 4A + \frac{6\pi^4D}{l^3} \right) y_2 + \frac{8\pi^4\alpha}{l^3} y_4 + \frac{8}{3} m_*Uy_3 \right]. \end{array} \right. \quad (4)$$

Запишем систему (3) в матричной форме

$$\frac{dy}{dt} = Hy + f(y),$$

где

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ h_{31} & 0 & h_{33} & h_{34} \\ 0 & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$f(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(-1)}{B} \left[ Cy_1^3 + 8Cy_1y_2^2 + \frac{2}{3} Ky_1y_2y_3 + \frac{1}{3} Ky_1^2y_4 - \frac{36}{7} Ky_2^2y_4 \right] \\ \frac{(-2l)}{(2Bl + 3\pi^2\beta)} \left[ \left( 16C - \frac{9\pi^6 D}{l^5} \right) y_2^3 + \left( 8C - \frac{9\pi^6 D}{2l^5} \right) y_1^2y_2 + \frac{88}{21} Ky_1y_2y_4 + \frac{44}{21} Ky_2^2y_3 + Ky_1^2y_3 \right] \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Здесь,

$$h_{31} = -\frac{A}{B}, \quad h_{33} = -\frac{\pi^4\alpha}{2l^3B}, \quad h_{34} = \frac{8}{3B}m_*U, \quad (7)$$

$$h_{42} = -\frac{1}{B} \left( 4A + \frac{6\pi^4 D}{l^3} \right), \quad h_{43} = -\frac{8}{3B}m_*U, \quad h_{44} = -\frac{8\pi^4\alpha}{l^3B}. \quad (8)$$

Для исследования описанной модели были выбраны следующие параметры механической системы [1]:  $E = 210 * 10^9$  – модуль упругости стали;  $\rho_* = 1000$  – плотность воды;  $\rho_0 = 7000$  – плотность стали;  $l = 1$ ;  $R_* = 0,05$ ;  $R_0 = 0,046$ ;  $\alpha = 0,2$ ;  $\beta = 0,5$ .

Исследуем асимптотическую устойчивость тривиального положения равновесия нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида (3) при различных значениях параметров  $U$  и  $N$  с помощью первого метода Ляпунова.

Подставив параметры механической системы, в выражения (7) и (8), получим

$$\begin{aligned} h_{31} &= -1419262.935 + 3.273127330U^2 + 0.4926262943N, & h_{33} &= -0.9714196420, \\ h_{34} &= 1.770526095U, & h_{42} &= -13058653.12 + 7.529019704U^2 + 1.133164922N, \\ h_{43} &= -1.018164321U, & h_{44} &= -8.938042296. \end{aligned}$$

Для исследования асимптотической устойчивости линейной системы (4) в пространстве параметров  $U$  и  $N$  воспользуемся критерием Рауса-Гурвица [5].

Характеристический многочлен для матрицы  $H$  имеет вид

$$\lambda^4 + \sigma_1\lambda^3 + \sigma_2\lambda^2 + \sigma_3\lambda + \sigma_4 = 0, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_4 &= 0.5582268364N^2 - 53428293.02U^2 - 8041294.868N + 24.64344016U^4 + \\ &+ 18533662350000.0 + 7.417986152U^2N, \\ \sigma_3 &= -36.56918814U^2 - 5.503893318N + 25370864.28, \\ \sigma_2 &= -8.999460535U^2 + 14477924.74 - 1.625791216N, & \sigma_1 &= 9.909461938. \end{aligned}$$

Для того чтобы многочлен (9) был многочленом Гурвица необходимо и достаточно выполнения следующих условий

$$\sigma_i > 0, \quad i = \overline{1,4},$$

$$\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3 > 0,$$

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \sigma_1^2\sigma_4 - \sigma_3^2 > 0.$$

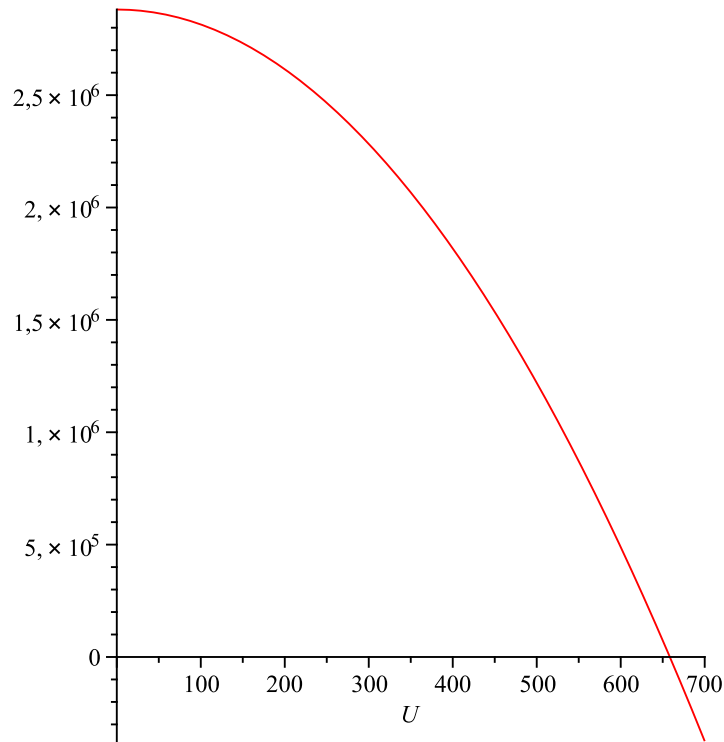
Эти неравенства справедливы при  $N < N_0(U)$ , где

$$N_0(U) = \frac{7.202533401 \cdot 10^6 - 6.644240001U^2 - 7.165545866 \cdot \sqrt{3.637261305 \cdot 10^{11} - 4.24707525 \cdot 10^{-5}U^2 - 4.4598003 \cdot 10^{-11}U^4}}{1}. \quad (10)$$

Таким образом, при  $U$  и  $N$ , выбранных из области

$$G = \{(U, N) : U > 0, N < N_0(U)\},$$

вещественные части корней  $\lambda_i, i = \overline{1,4}$ , многочлена (9) будут отрицательны, что влечёт асимптотическую устойчивость линейной системы (4).



**Рис. 1.** Кривая  $N_0(U)$ , ограничивающая область  $G$  параметров  $U$  и  $N$ .

Таким образом, при выборе параметров  $U$  и  $N$  из области  $G$  выполнены все условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости по первому приближению и, следовательно, тривиальное положение равновесия системы (3) является асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Поскольку приближённое решение исходной модели (1) представлено в виде разложения по базису с коэффициентами, являющимися решениями нелинейной системы (3), то оно обладает свойством динамической устойчивости. Причём, колебания, возникающие в механической системе, являются затухающими.

**Замечание 1.** Подобный результат может быть получен с помощью теоремы 3.2 из работы [4]. Поскольку вещественные части собственных значений отрицательны, то условия теоремы 3.2 выполнены по всем ненулевым наборам степеней полиномов. Кроме того,

данная теорема позволяет исследовать устойчивость нелинейной системы в критическом случае, то есть в случае наличия нулевых вещественных частей собственных значений, отвечающих третьей и четвертой переменной, и локальную асимптотическую эквивалентность нелинейной системы (3) и её линейного приближения (4).

**Замечание 2.** Данная методика может быть применена для других типов закрепления (жёсткого защемления концов:  $w = 0, w' = 0$ ; свободного конца:  $w'' = 0, w''' = 0$ ; шарнирного закрепления:  $w = 0, w'' = 0$ ) в любых сочетаниях этих условий на разных концах  $x = 0, x = l$ . Это повлияет на вид базисных функций при реализации метода Галёркина, однако, для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений методика может быть применена без существенных изменений.

## Литература

1. Вельмисов П. А., Гладун А. В. Об управлении динамикой трубопровода // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18, № 4. С. 89–97.
2. Вельмисов П. А., Корнеев А. В., Киреев С. В. Исследование динамической устойчивости трубопровода // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18, № 2. С. 106–114.
3. Вельмисов П. А., Корнеев А. В. Математическое моделирование в задаче о динамической устойчивости трубопровода // Автоматизация процессов управления. 2015. Т. 1, № 39. С. 63–73.
4. Шаманаев П. А., Язовцева О. С. Достаточные условия локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и ее приложение к устойчивости по части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. 2017. Т. 19, № 1. С. 102–115.
5. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

MSC 34D20 74F10

## Investigation of stability of a solution of mathematical model of a pipeline dynamics

P.A. Velmisov <sup>1</sup>, P.A. Shamanaev <sup>2</sup>, O.S. Yazovtseva <sup>2</sup>

Ulyanovsk State Technical University <sup>1</sup>, National Research Ogarev Mordovia State University <sup>2</sup>

*Abstract:* The article is devoted to investigation of a pipeline dynamics, which is flexible hollow rod with flowing liquid. The explored model is reduced to investigation of stability of trivial equilibrium of nonlinear system of ordinary differential equations by the Galerkin method. The parametric area is constructed, that provides asymptotic stability of the approximate solution of the explored model, by Routh–Hurwitz stability criterion

*Keywords:* dynamic stability of flexible pipeline, Galerkin method, Lyapunov's asymptotic stability, Routh–Hurwitz stability criterion.

### References

1. Velmisov P.A., Gladun A.V. Ob upravlenii dinamikoy truboprovoda [On control of dynamic of a pipeline] // Zhurnal Srenevolskogo matematicheskogo obshchestva [Middle-Volga mathematical society Journal]. 2016. V. 18. No 4. P. 89-97.
2. Shamanaev P. A., Yazovtseva O. S. Dostatochnye usloviya lokalnoy pokomponentnoy asimptoticheskoy ekvivalentnosti nelineynykh sistem obyknovennykh differentsialnykh uravneniy i ee prilozhenie k ustoychivosti po chasti peremennykh [The sufficient conditions of local asymptotic equivalence of nonlinear systems of ordinary differential equations and its application for investigation of stability respect to part of variables // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Middle-Volga mathematical society Journal]. 2017. V. 18. No 4. P. 102-115. (In Russian)
3. Velmisov P.A., Korneev A.V., Kireev S.V. Issledovanie dinamicheskoy ustoychivosti truboprovoda [Investigation of dynamic stability of pipeline] // Zhurnal Srenevolskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of the Middle-Volga mathematical society]. 2016. V. 18, No 2. P. 106–114. (In Russian)
4. Velmisov P.A., Korneev A.V. Matematicheskoe modelirovanie v zadache o dinamicheskoy ustoychivosti truboprovoda [Mathematical modeling in the problem of dynamic stability of a pipeline] // Avtomatizatsiya protsessov upravleniya [Automation of control Processes]. 2015. V. 1, No 39. P. 63–73. (In Russian)
5. Demidovich B.P. Lektsii po matematicheskoy teorii ustoychivosti [Lectures on the mathematical stability theory]. Moscow: Nauka, 1967. 472 p.