

УДК 532.5.013

## **Исследование явления резонанса при вытяжке стеклянного цилиндра**

Юрова Т.С., Попов И.Ю.

Университет ИТМО

*Аннотация:* В работе рассмотрен процесс вытяжки стеклянного цилиндра и исследовано явление резонанса при вытяжке – неустойчивости, возникающей в процессе вытяжки и характеризующейся колебательными изменениями в размерах формы цилиндра. Для исследования процесса проведён линейный анализ устойчивости с различными эффектами, такими, как гравитация и локальный нагрев, и проанализирована устойчивость процесса в зависимости от характерных параметров задачи. Также, численно проведён нелинейный анализ устойчивости и показано, что при потере процессом устойчивости в системе возникают устойчивые колебания.

*Ключевые слова:* резонанс при вытяжке, линейный анализ, коэффициент перетяжки.

### **1. Введение**

В различных областях науки и техники возникают задачи по изучению течения вязких жидкостей в тонких структурах. Под «тонкими структурами» понимаются геометрические конфигурации системы, в которых масштаб в одном направлении значительно меньше, чем в другом, за счёт чего можно понизить размерность системы, сохраняя при этом динамику изначальной системы. Приближение тонкого слоя для процесса вытяжки достаточно подробно описано в диссертации [1] для различных конфигураций задач, таких как двумерные вязкие листы (дисплеи), осесимметричные волокна (оптоволокно), неосесимметричные волокна и трехмерные листы. Процесс вытяжки предполагается непрерывным, поэтому при производстве важно следить за его стабильностью, так как это напрямую влияет на качество изделия: если процесс будет нестабильным, то могут возникнуть различные дефекты в структуре, которые впоследствии влияют не только на внешний вид, но и на прочность изделия. Явление, которое описывает потерю стабильности процесса – резонанс при вытяжке – неустойчивости, которая возникает в процессе вытяжки и характеризуется колебательными изменениями в размерах формы цилиндра. Основным параметр этого процесса – коэффициент перетяжки, равный отношению скорости вытяжки на выходе к скорости на входе. Считается, что процесс вытяжки становится нестабильным, когда коэффициент пересекает критическое значение. Это явление можно увидеть при помощи линейного анализа устойчивости. Для каждого процесса критический коэффициент перетяжки свой, на него влияет множество внешних факторов, таких как внешнее давление, влажность, температура и т. д. Поэтому в условиях производства крайне важно знать, какой критический коэффициент перетяжки у данного процесса, какие параметры среды на него влияют, а главное, что происходит после его превышения и насколько критично это превышение для качества изделия, что может показать нелинейный анализ устойчивости.

Резонанс при вытяжке – известное явление в среде моделирования формовки стекла и полимеров, ему посвящено достаточно исследований с различными конфигурациями систем и зависимостей от множества параметров. Например, в статье [2] представлен краткий хронологический отчет об исследовании резонанса при вытяжке и предложен новый метод анализа резонанса вытяжки, основанный на взаимоотношении времен прохождения кинематических волн в системе вытяжки, что позволило более точно определить условия возникновения резонанса и предложить способы его устранения. В статье [3] найдена асимптотика собственных значений, что дает представление о качественной природе собственного спектра; она показывает, что существует бесконечно много собственных значений. Кроме того, некоторые неустойчивости могут быть предсказаны на основе анализа этого предела. В статьях [4, 5] было показано влияние нагрева и охлаждения с вязкостью, зависящей от температуры, и гравитации с инерцией на критический коэффициент перетяжки в модели тонкого листа и рассчитаны значения параметров, при которых эти эффекты добавляют устойчивости процессу вытяжки.

## 2. Извязкое течение

Рассмотрим уравнения Навье-Стокса в  $\mathbb{R}^3$ , описывающие движение вязкой жидкости:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \sigma + \mathbf{f}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости,  $\mathbf{u} = (u, v, 0)$  – поле скоростей,  $\mu = \mu(x, r)$  – переменная вязкость,  $\mathbf{f}$  – поле внешних сил,  $\sigma$  – тензор напряжений,

$$\sigma = -p\mathbf{I} + (\mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)), \quad (3)$$

$p$  – давление,  $\mathbf{I}$  – единичный тензор. Из них при помощи приближения тонкого слоя получаются уравнения для вертикальной вытяжки стеклянного цилиндра:

$$(A)_t + (Au)_x = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(3Au_x\mu) = 0, \quad (5)$$

где  $u$  – компонента скорости вытяжки по  $x$ ,  $A$  – площадь сечения стеклянного цилиндра. Граничные условия:

$$A|_{x=0} = A_0, \quad u|_{x=0} = u_0, \quad u|_{x=L} = u_L \quad (6)$$

Обезразмеренное стационарное решение уравнений вытяжки с такими граничными условиями:

$$u(x) = DR^x, \quad A(x) = DR^{-x}, \quad (7)$$

где  $DR = \frac{u_L}{u_0}$ ,  $x = \frac{x'}{L}$ ,  $u(x) = \frac{u'(x)}{u_0}$ ,  $A(x) = \frac{A'(x)}{A_0}$ .

Для понимания того, как ведёт себя процесс вытяжки при различных коэффициентах перетяжки, необходимо исследовать стационарное решение системы (4)-(5)

на устойчивость. Представим малое возмущение в виде  $u(x, t) = \hat{u}(x)e^{i\omega t}$ ,  $A(x, t) = \hat{A}(x)e^{i\omega t}$ , где  $\hat{u}(x)$  — амплитуда возмущения,  $\omega$  — частота. От знака мнимой части  $\omega$  будет зависеть устойчивость процесса. Нестационарное решение системы ищем как сумму стационарного решения и возмущения:

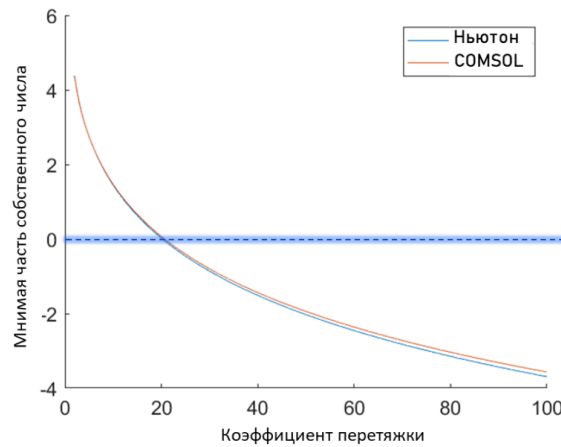
$$u(x, t) = u_{st}(x) + \hat{u}(x)e^{i\omega t} \quad (8)$$

$$A(x, t) = A_{st}(x) + \hat{A}(x)e^{i\omega t}, \quad (9)$$

с граничными условиями  $\hat{u}(0) = \hat{A}(0) = \hat{u}(1) = 0$ ,  $u_{st}(x)$ ,  $A_{st}(x)$  — стационарное решение (7). Далее подставляем нестационарное решение в систему, отбрасываем нелинейные члены, решаем полученную систему и выводим трансцендентное уравнение на  $\omega$ :

$$0 = \left[ \frac{i\omega L}{u_{st} \ln DR} - DR \right] \left[ Ei \left( \frac{i\omega L}{u_{st} \ln DR} \right) - Ei \left( \frac{i\omega L}{u_{st} DR \ln DR} \right) \right] + DR \left[ e^{i\omega L(u_{st} DR)^{-1} \ln^{-1} DR} - e^{i\omega L u_{st}^{-1} \ln^{-1} DR} \right] \quad (10)$$

На рис. 1 показана зависимость мнимой части  $\omega$  от коэффициента перетяжки. Красная кривая соответствует моделированию в COMSOL, синяя — решению уравнения методом Ньютона.



**Рис. 1.** Анализ линейной устойчивости. Критический коэффициент перетяжки  $DR_c = 20.2$

Из графика на рис. 1 видно, что мнимая часть пересекает ноль при критическом коэффициенте перетяжки  $DR_c = 20.2$ . Это значит, что для данной постановки задачи (изовязкое течение без внешних сил), процесс вытяжки теряет устойчивость при коэффициентах перетяжки больше 20.2.

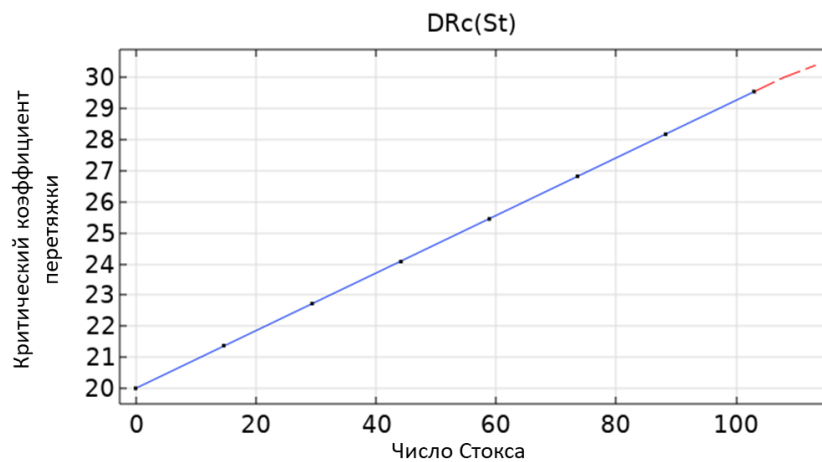
### 3. Изовязкое течение с гравитацией

Потеря устойчивости для модели изовязкого течения без каких-либо внешних сил — значительно упрощенная задача реального процесса. Для того, чтобы приблизить модель к реальному процессу, необходимо добавить внешние силы и проанализировать, как влияют характерные параметры этих воздействий на устойчивость.

Система уравнений вытяжки с гравитацией:

$$\begin{cases} (A)_t + (Au)_x = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}(3Au_x\mu) = -StA, \\ A|_{x=0} = 1, \\ u|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=1} = \frac{u_L}{u_0}. \end{cases} \quad (11)$$

Линейная устойчивость системы (11) исследовалась методом конечных элементов. Результаты представлены на рис. 2.



**Рис. 2.** Зависимость от числа Стокса

На рис. 2 приведена зависимость критического коэффициента перетяжки от числа Стокса. Видно, что критический коэффициент перетяжки увеличивается вместе с увеличением числа Стокса, а это значит, что система становится более устойчивой при увеличении сил гравитации и/или уменьшении вязких сил. Отсюда можно сделать вывод, что сила тяжести стабилизирует поток стекла и менее вязкое течение более устойчиво.

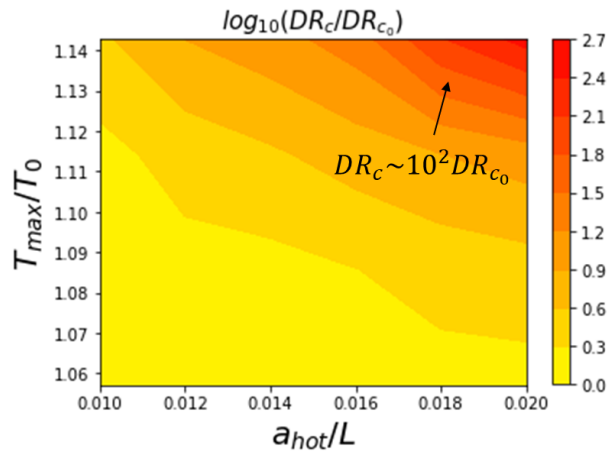
#### 4. Изовязкое течение с теплопередачей

Применяя приближение тонкого слоя, получим дополнительное уравнение в систему, используя уравнения Фурье-Кирхгоффа с радиационным источником излучения:

$$\begin{cases} (A)_t + (Au)_x = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}(3Au_x\mu(T)) = -StA, \\ \text{Pe } A(T_t + uT_x) = (AT_x)_x + a\sqrt{\frac{A}{\pi}}(T_0^4(x) + T^4) \\ A|_{x=0} = 1, \\ u|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=1} = \frac{u_L}{u_0}, \end{cases} \quad (12)$$

где  $\text{Pe} = \frac{\rho c U L}{k_c}$  – число Пекле,  $a = \frac{\sigma_{SB} \epsilon T^3}{k_c}$ .

В этой постановке задачи мы изучали зависимость критического коэффициента перетяжки, изменяя параметры внешней температуры, а именно, максимальную температуру  $T_{max}$  и ширину зоны локального нагрева  $a_{hot}$ . Рис. 3 показывает зависимость логарифма отношения критического коэффициента перетяжки  $DR_c$  при заданных параметрах ( $T_{max}$  и  $a_{hot}$ ) к коэффициенту перетяжки в постановке задачи без дополнительных эффектов  $DR_{c_0}$  от этих параметров. Процесс становится более стабильным с независимым друг от друга увеличением параметров локального нагрева. Стоит отметить, что добавление нагрева в систему делает ее более стабильной примерно в 100 раз в начале красной области.



**Рис. 3.** Зависимость логарифма отношения коэффициента перетяжки задачи к коэффициенту перетяжки задачи без эффектов от параметров локального нагрева.

## 5. Нелинейный анализ: численное моделирование

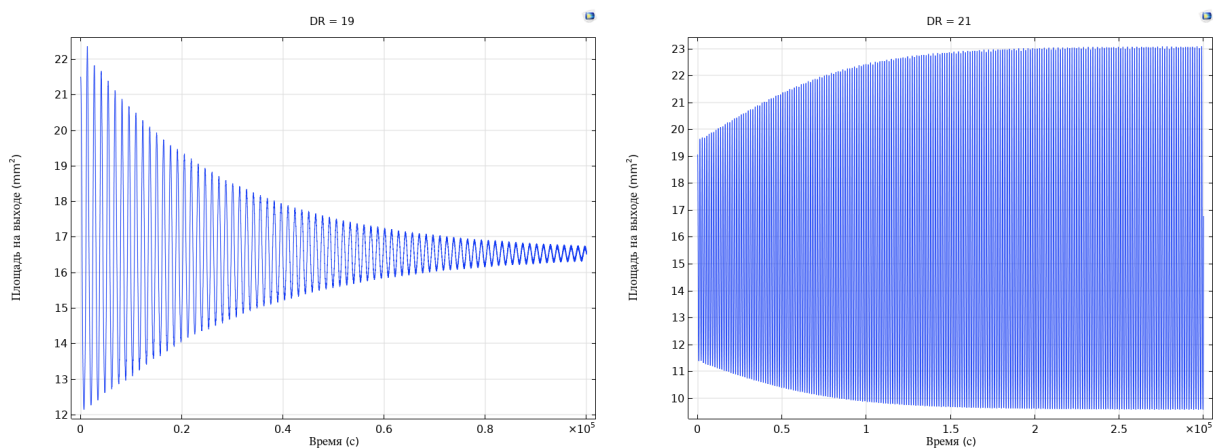
Нелинейный анализ устойчивости покажет, что будет происходить с системой после перехода через критический коэффициент перетяжки: действительно ли возникают экспоненциально растущие колебания. Будем решать уравнения вытяжки (4)-(5) с помощью метода конечных элементов в пакете COMSOL Multiphysics. Рассмотрим нестационарную задачу, для которой в качестве начальных условий будем брать форму собственных функций линейной задачи при разных коэффициентах перетяжки  $DR$ .

На рис. 4 представлена зависимость значения площади  $A(x)$  в конечной точке  $x = 1$  от времени при различных коэффициентах перетяжки.

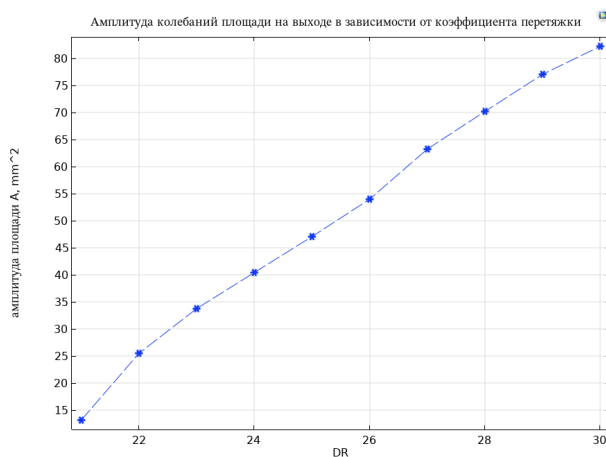
Поскольку критический коэффициент перетяжки  $DR_c = 20.2$ , то мы ожидаем, что при  $DR < DR_c$  нестационарное решение со временем будет сходиться к стационарному, что и можно наблюдать на рис. 4 а для  $DR = 19$ . На остальных графиках мы видим, что колебания достигают определённой амплитуды и дальше не растут, причём, чем больше коэффициент перетяжки, тем больше амплитуда колебаний.

Зависимость амплитуды колебаний площади на выходе от коэффициента перетяжки можно увидеть на рис. 5. Также можно заметить, что при росте коэффициента перетяжки возникают огибающие колебания.

На рис. 6 приведён частотный спектр нестационарных решений (фурье-коэффициент представлен в децибелах). С увеличением коэффициента перетяжки доминирующая частота  $f = 7.2$  мГц сдвигается влево и начинают проявляться кратные



**Рис. 4.** Колебания площади на выходе при а)  $DR = 19$ ; б)  $DR = 21$



**Рис. 5.** Зависимость амплитуды колебаний площади на выходе от коэффициента перетяжки

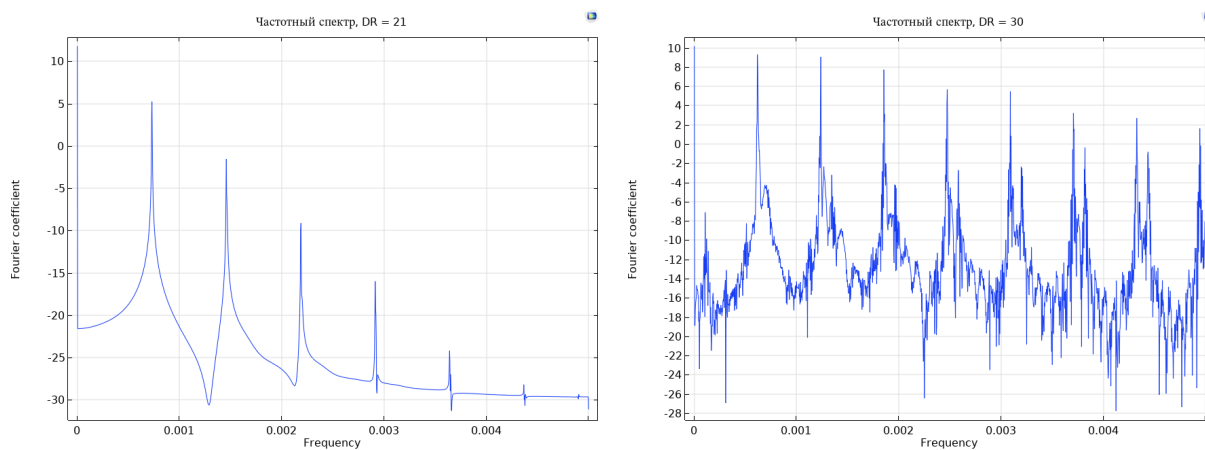
более коротковолновые моды.

## 6. Выводы

Итого, в данной работе получены уравнения вытяжки с помощью приближения тонкого слоя из уравнений Навье-Стокса, проведён анализ линейной устойчивости процесса вытяжки стеклянного цилиндра, найден критический коэффициент перетяжки  $DR_c = 20.2$ , при котором система теряет устойчивость, и показано, что система становится устойчивее при учете как гравитации, так и локального нагрева. Кроме того, с помощью численного моделирования найдена зависимость амплитуд и частотного спектра колебаний при удалении от критического коэффициента перетяжки и показано, что при его превышении в системе возникают постоянные колебания.

## Литература

1. Howell P.D. Extensional thin layer flows. 1994.
2. Hyun J. Draw resonance in polymer processing: A short chronology and a new approach // Korea-Aust. Rheol. J., 1999. 11 p.



**Рис. 6.** Частотный спектр колебаний нестационарной задачи при разных коэффициентах перетяжки  $DR$ : а)  $DR = 21$ ; б)  $DR = 30$

3. Renardy M. Draw resonance revisited // Journal of Physics: Conference Series, 2007. P. 12-16.
4. Scheid B., Quiligotti S., Tran B., Gy R., Stone H. On the (de)stabilization of draw resonance due to cooling // Journal of Fluid Mechanics, 2009. P. 155-176.
5. Cao F., Khayat R., Puskas J. Effect of inertia and gravity on the draw resonance in high-speed film casting of Newtonian fluids // International Journal of Solids and Structures - INT J SOLIDS STRUCT, 2005. P. 5734-5757.

MSC 34D20

## Investigation of the resonance phenomenon during the glass cylinder draw

T.S. Yurova, I.Yu. Popov

ITMO University

*Abstract:* The paper considers the process of a glass cylinder draw and investigates the phenomenon of draw resonance — this is an instability that occurs during drawing and is characterized by oscillatory changes in the size of the cylinder shape. A linear stability analysis with various effects, such as gravity and local heating, was carried out, and the stability of the process was analyzed depending on the characteristic parameters of the problem. Also, a nonlinear stability analysis is numerically carried out and it is shown that when the process loses stability, stable oscillations occur in the system.

*Keywords:* Draw resonance, linear stability, draw ratio.

### References

1. Howell P.D. Extensional thin layer flows. 1994.
2. Hyun J. Draw resonance in polymer processing: A short chronology and a new approach // Korea-Aust. Rheol. J., 1999. 11 p.
3. Renardy M. Draw resonance revisited // Journal of Physics: Conference Series, 2007. P. 12-16.
4. Scheid B., Quiligotti S., Tran B., Gy R., Stone H. On the (de)stabilization of draw resonance due to cooling // Journal of Fluid Mechanics, 2009. P. 155-176.
5. Cao F., Khayat R., Puskas J. Effect of inertia and gravity on the draw resonance in high-speed film casting of Newtonian fluids // International Journal of Solids and Structures - INT J SOLIDS STRUCT, 2005. P. 5734-5757.