УДК 517.91

Об оценке снизу гиперсингулярного оператора перидинамики

Шералиев Ш.Н.

Филиал МГУ имени М.В.Ломоносова в городе Ташкенте

Аннотация: Для гиперсингулярного интегрального оператора типа Кальдерона-Зигмунда, связанного с задачами перидинамики, получена оценка снизу. Тем самым установлено, что найденная ранее оценка сверху является точной.

Ключевые слова: сингулярные операторы, неравенство Кальдерона-Зигмунда, перидинамика.

Основное уравнение перидинамики, предложенное в работе [1], в линеаризованном варианте имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \; - \; A_s u(x,t) \; = \; f(x,t), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

где сингулярный интегральный оператор A_s определяется равенством

$$A_s u(x) \; = \; \int_D K_s(x,y)[u(y) - u(x)]\, dy.$$

В этом уравнении D – ограниченная n-мерная ($n \geq 3$) область с кусочно-гладкой границей, $u : D \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$– неизвестная функция, $n \times n$-матрица-функция K_s, определенная в $D \times D$, является заданным ядром интегрального оператора, функция $f : D \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ представляет собой внешнюю силу.

Ядро $K_s(x,y)$, описывающее распределённое взаимодействие между частицами твёрдого тела D, имеет носитель в ρ-окрестности диагонали $\{x = y\}$, число ρ при этом называется горизонтом взаимодействия. На диагонали ядро $K_s(x,y)$ может иметь неинтегрируемую особенность, компенсируемую разностью $u(y) - u(x)$. В этом случае интегральный оператор A_s является сингулярным и может оказаться неограниченным.

В настоящей работе мы рассматриваем интегральный оператор A_s в виде свёртки в пространстве периодических функций, а именно:

$$A_s u(x) \; = \; \int\limits_{\mathbb{T}^n} K_s(x-y)[u(y) - u(x)]\, dy, \quad x \in \mathbb{T}^n = [-\pi,\pi]^n. \tag{1}$$

Важный класс операторов вида (1) составляют операторы с сингулярным ядром

$$K_s(x) \; = \; \frac{\Omega(x)}{|x|^\lambda}, \quad x \in \mathbb{T}^n,$$

где [1, формула (61)].

$$\Omega(x) \; = \; \frac{x \otimes x}{(x,x)}. \tag{2}$$

Фиксируем ρ из интервала $0 < \rho < \pi$ и обозначим символом $\chi(r)$ неотрицательную функцию, принадлежащую $C^\infty(\mathbb{R})$, равную 1 при $r \leq \dfrac{\rho}{2}$ и нулю при $r \geq \rho$.

Основной целью настоящей работы является изучение интегрального оператора

$$Af(x) \; = \; \int\limits_{\mathbb{T}^n} \frac{\Omega(y)}{|y|^n}\, \chi(|y|)[f(x-y) - f(x)]\, dy. \tag{3}$$

Отметим, что в случае, когда $\Omega(x)$ является произвольной гладкой однородной матрицей-функцией, важную роль играет её среднее значение по единичной сфере

$$\Omega^* \; = \; \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{|x|=1} \Omega(x)\, d\sigma(x), \quad \omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

В случае, когда $\Omega^* = 0$, т. е. все элементы Ω^*_{ij} $(i, j = \overline{1, n})$ этой матрицы равны нулю, интегральный оператор (3) является оператором типа Кальдерона-Зигмунда (см. [2]). Известно, что в этом случае оператор (3) естественным образом определяется в классе гладких функций и продолжается до оператора, непрерывного из $L_p(\mathbb{T}^n)$ в $L_p(\mathbb{T}^n)$. При этом условие $\Omega^* = 0$ является необходимым для справедливости данного утверждения.

В рассматриваемом нами случае среднее значение Ω^* ядра (2) отлично от нуля, вследствие чего оператор (3) не является ограниченным из $L_2(\mathbb{T}^n)$ в $L_2(\mathbb{T}^n)$.

Для того, чтобы сформулировать основной результат, введем функциональное пространство периодических функций с логарифмической гладкостью.

Определим самосопряжённый псевдодифференциальный оператор первого порядка

$$\Lambda f(x) \; = \; \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f_k e^{ikx} \sqrt{1 + |k|^2},$$

где

$$f_k \; = \; (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Иными словами, $\Lambda = \sqrt{1 - \Delta}$, где Δ – самосопряжённое расширение в $L_2(\mathbb{T}^n)$ оператора Лапласа, отвечающее периодическим граничным условиям. Отметим, что областью определения оператора Δ является пространство Соболева $W_2^2(\mathbb{T}^n)$, соответственно $D(\Lambda) = W_2^1(\mathbb{T}^n)$. При этом функция $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^n$ принадлежит пространству вектор-функций $W_2^1(\mathbb{T}^n)$, если каждая компонента $f_j(x)$ принадлежит обычному пространству $W_2^1(\mathbb{T}^n)$.

Для любого натурального m рассмотрим положительный самосопряжённый в $L_2(\mathbb{T}^n)$ оператор $\log^m(1 + \Lambda)$. Область определения этого оператора обозначим символом $H^m_{\log}(\mathbb{T}^n)$:

$$H^m_{\log}(\mathbb{T}^n) \; = \; D(\log^m(1 + \Lambda)).$$

Каждое пространство $H^m_{\log}$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f, g)_m \; = \; \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f_k \overline{g_k} \log^{2m}\left(1 + \sqrt{1 + |k|^2}\right).$$

Ассоциированную с этим скалярным произведением норму элемента $f \in H^m_{\log}(\mathbb{T}^n)$ обозначим $\|f\|_m$.

Положим $H^0_{\log}(\mathbb{T}^n) = L_2(\mathbb{T}^n)$. Очевидно, для любого натурального m выполняется равенство:

$$\log(1+\Lambda)H^m_{\log}(\mathbb{T}^n) \;=\; H^{m-1}_{\log}(\mathbb{T}^n), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Из результатов работ [3] и [4] вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Для любого натурального m оператор A, определённый равенством (3), действует из $H^m_{\log}(\mathbb{T}^n)$ в $H^{m-1}_{\log}(\mathbb{T}^n)$ и удовлетворяет оценке*

$$\|Af\|_{m-1} \;\le\; C\|f\|_m, \quad f \in H^m_{\log}(\mathbb{T}^n). \tag{4}$$

В настоящей работе доказывается справедливость противоположной оценки и, тем самым, показана точность оценки (4). Именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Для любого натурального m и любой функци $f \in H^m_{\log}(\mathbb{T}^n)$ выполняется оценка*

$$\|f\|_m \;\le\; C\|Af\|_{m-1} \;+\; C\|f\|_{m-1}. \tag{5}$$

Замечание 8. *Пример функции $f(x) \equiv 1$ показывает, что второе слагаемое в правой части оценки (5) не может быть исключено.*

Доказательство теоремы 2 основано на методе формулы среднего значения, разработанном В.А. Ильиным (см. [5]).

Литература

1. Silling S.A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces, J. Mech. Phys. Solids 48, 2000. No.1, P. 175–209.

2. Calderon A.P., Zygmund A. On the existence of certain singular integrals, Acta Math. 88, 1952. P. 85-139.

3. Alimov Sh., Sheraliev Sh. On the solvability of the singular equation of peridynamics, Complex Variables and Elliptic Equations, 64:5. P. 873-887.

4. Алимов Ш.А., Шералиев Ш.Н. О гиперсингулярных операторах, связанных с перидинамикой, Дифференциальные уравнения, 59, 2023. № 7. С. 914-918.

5. Ильин В.А. Спектральная теория дифференциальных операторов. Самосопряжённые дифференциальные операторы. М.: Наука, 1991.

MSC 34D20

On the estimation from below of the hypersingular operator of peridynamics

Sh.N. Sheraliev

The branch of Moscow State University named after M.V. Lomonosov in Tashkent

Abstract: For a hypersingular integral operator of the Calderon-Zygmund type associated with peridynamics problems, a lower bound is obtained. Thus, it is established that the estimate found earlier from above is precise.

Keywords: singular operators, Calderon-Zygmund inequality, peridynamics.

References

1. Silling S.A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces, J. Mech. Phys. Solids 48, 2000. No.1. P. 175–209.
2. Calderon A.P., Zygmund A. On the existence of certain singular integrals, Acta Math. 88, 1952. P. 85-139.
3. Alimov Sh., Sheraliev Sh. On the solvability of the singular equation of peridynamics, Complex Variables and Elliptic Equations, 64:5, 2019. P. 873-887.
4. Alimov Sh.A., Sheraliev Sh.N. On hypersingular operators related to peridynamics. Differential Equations, 59, 2023. No.7, P. 914-918.
5. Ilyin V.A. Spectral theory of differential operators. Self-adjoint differential operators. M.: Nauka, 1991.