

УДК 517.925+531.552

Инвариантные дифференциальные формы динамических систем с конечным числом степеней свободы со знакопеременной диссипацией

Шамолин М.В.

МГУ имени М.В. Ломоносова

Аннотация: Для рассматриваемого класса однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким конечномерным многообразиям предъявлены полные наборы тензорных инвариантов – инвариантных дифференциальных форм. Показана связь между наличием данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования рассматриваемых геодезических, потенциальных и диссипативных динамических систем. При этом вводимые силовые поля вносят в системы диссипацию разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система с диссипацией, интегрируемость, трансцендентный тензорный инвариант.

Как известно [1], нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только первых интегралов) позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных систем этот факт естественен, но для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками (см. также [2–4]).

В качестве примеров тензорных инвариантов приведем, прежде всего, скалярные инварианты – первые интегралы системы. Инвариантные векторные поля – поля симметрий (они коммутируют с векторным полем рассматриваемой системы). Фазовые потоки систем дифференциальных уравнений, порождаемых этими полями, переводят решения рассматриваемой системы в решения той же системы. Инвариантные внешние дифференциальные формы (поиск которых, в основном, и проведен в данной работе) порождают интегральные инварианты системы. При этом, очевидно, само векторное поле рассматриваемой системы является одним из инвариантов (тривиальный инвариант). Знание тензорных инвариантов системы дифференциальных уравнений облегчает и ее интегрирование, и качественное исследование. Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы из m дифференциальных уравнений помимо упомянутого тривиального инварианта надо знать еще $m - 1$ независимых тензорных инвариантов.

Как показано ранее, задача о движении $(n + 1)$ -мерного маятника на обобщенном сферическом шарнире в неконсервативном поле сил, который можно образно описать, как «поток набегающей среды, заполняющей объемлющее $(n + 1)$ -мерное пространство», приводит к динамической системе на касательном расслоении к n -мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий [5, 6]. Динамические системы, описывающие движение такого

маятника, обладают знакопеременной диссипацией, полный список первых интегралов состоит из функций, имеющих существенно особые точки, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. То же фазовое пространство естественно возникает в задаче о движении точки по n -мерной сфере с индуцированной метрикой объемлющего $(n + 1)$ -мерного пространства. Отметим также задачи о движении точки по более общим n -мерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского и т. д.

Важные случаи интегрируемых систем с n степенями свободы в неконсервативном поле сил рассматривались в других работах автора. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем.

В данной работе для рассматриваемого класса динамических систем предъявлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм для однородных систем на касательных расслоениях к гладким конечномерным многообразиям (об аналогичных исследованиях для систем меньшей размерности см. [2, 3, 5]). Показана связь между наличием данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля вносят в системы диссипацию разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Сначала изучается задача геодезических, включающая, в частности, геодезические на сфере и других поверхностях вращения, конечномерного пространства Лобачевского. Указываются достаточные условия интегрируемости уравнений геодезических. Затем в системы добавляется потенциальное поле сил специального вида, также указываются достаточные условия интегрируемости рассматриваемых уравнений, на классах задач, аналогичных рассмотренным ранее. В заключение строится усложнение задачи, возникающее в результате добавления неконсервативного поля сил со знакопеременной диссипацией. Указываются достаточные условия интегрируемости.

Литература

1. Козлов В.В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 2019. Т.74. № 1. С. 117-148.
2. Шамолин М.В. Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле. М.: ЛЕНАНД, 2019. 456 с.
3. Шамолин М.В. Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2. Закрепленные маятники разной размерности. М.: ЛЕНАНД, 2021. 400 с.
4. Шамолин М.В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т.495. № 1. С. 84-90.
5. Шамолин М.В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т.497. № 1. С. 23-30.
6. Козлов В.В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. матем. и механ. 2015. Т.79. № 3. С. 307-316.

MSC 37C

Invariant differential forms of various dissipation dynamical systems with a finite number of degrees of freedom

M.V. Shamolin

Lomonosov Moscow State University

Abstract: For the considered class of homogeneous dynamical systems on tangent bundles to smooth finite-dimensional manifolds, complete sets of tensor invariants, i. e. invariant differential forms, are presented. The connection between the presence of these invariants and the full set of the first integrals which necessary for the integration of the considered geodesic, potential, and dissipative dynamical systems is shown. At the same time, the investigated force fields introduce dissipation of different signs into the systems and generalize the previously considered ones.

Keywords: dynamical system with dissipation, integrability, transcendental tensor invariant.

References

1. Kozlov V.V. Tensor invariants and integration of differential equations // Russian Math. Surveys. 2019. V.74. No.1. P. 111-140.
2. Shamolin M.V. Integrable dynamical systems with dissipation. Book 1. Rigid body in nonconservative force field [in Russian]. Moscow, LENAND, 2019. 456 p.
3. Shamolin M.V. Integrable dynamical systems with dissipation. Book 2. Fixed pendulums of different dimensions [in Russian]. Moscow, LENAND, 2021. 400 p.
4. Shamolin M.V. New Cases of Homogeneous Integrable Systems with Dissipation on Tangent Bundles of Three-Dimensional Manifolds // Doklady Mathematics. 2020. V.102. No.3. P. 518-523.
5. Shamolin M.V. New Cases of Homogeneous Integrable Systems with Dissipation on Tangent Bundles of Four-Dimensional Manifolds // Doklady Mathematics. 2021. V.103. No. 2. P. 85-91.
6. Kozlov V.V. Rational integrals of quasi-homogeneous dynamical systems // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2015. V.79. No.3. P. 209-216.