УДК 517.9

К вопросу об исследовании вынужденных колебаний линейной системы двух связанных осцилляторов вблизи резонанса

Шаманаев П.А., Осипов Д.А.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: В настоящей работе методом Ляпунова-Шмидта исследуется математическая модель колебаний в системе двух связанных осцилляторов вблизи резонанса с малым параметром при условии, что на систему действует внешняя периодическая сила с тремя соизмеримыми частотами. Разработанный на основе метода Ляпунова-Шмидта алгоритм реализован в математической библиотеке SymPy Python. В качестве примера рассмотрена некоторая система с фиксированными параметрами. Для нее найдено периодическое решение, построены графики компонент периодических решений и фазовых траекторий.

Ключевые слова: связанные осцилляторы, вынужденные колебания, периодические решения, малый параметр, метод Ляпунова-Шмидта, резонанс

1. Вычисление периодического решения линейной системы двух связанных осцилляторов вблизи резонанса

В работах [1–3] приведены результаты исследования вынужденных колебаний одного и двух связанных осцилляторов вблизи резонанса с малым параметром. Настоящая работа продолжает исследование таких систем при условии, что на систему действует внешняя периодическая сила с тремя соизмеримыми частотами.

Рассмотрим математическую модель вынужденных колебаний двух связанных осцилляторов вблизи резонанса с малым параметром [3, 4]

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + (n_1^2 + \varepsilon d_{11})q_1 + \left(-\dfrac{k_3}{m_1} + \varepsilon d_{12}\right) q_2 = F_1(t), \\ \ddot{q}_2 + \left(-\dfrac{k_3}{m_2} + \varepsilon d_{21}\right) q_1 + (n_2^2 + \varepsilon d_{22})q_2 = F_2(t). \end{cases} \tag{1}$$

где q_1, q_2 – обобщенные координаты, $k_i > 0$ $(i = \overline{1,3})$ – коэффициенты жесткости пружин, $n_1^2 = \dfrac{k_1 + k_3}{m_1}$, $n_2^2 = \dfrac{k_2 + k_3}{m_2}$ – парциальные частоты, d_{ij}, $(i, j = 1, 2)$ – некоторые вещественные параметры, ε – малый вещественный параметр, m_1, m_2 – массы грузиков (осцилляторов).

Будем предполагать, что на осцилляторы действуют внешние силы по следующему закону

$$\begin{aligned} F_1(t) &= r_{11}\sin(\omega_1 t + \theta_{11}) + r_{12}\sin(\omega_2 t + \theta_{12}) + r_{13}\sin(\omega_3 t + \theta_{13}), \\ F_2(t) &= r_{21}\sin(\omega_1 t + \theta_{21}) + r_{22}\sin(\omega_2 t + \theta_{12}) + r_{23}\sin(\omega_3 t + \theta_{23}), \end{aligned} \tag{2}$$

где r_{ks}, θ_{ks}, $\omega_k \in \mathbb{R}$, $(k = 1, 2; s = \overline{1,3})$, $\omega_1 = \alpha\omega_2 = \beta\omega_3$, α, $\beta \in \mathbb{Z}$.

Сформулируем задачу для системы (1) [5, 6]: при достаточно малых вещественных ε найти $\dfrac{2\pi}{\omega_1}$-периодическое решение $q_1(t,\varepsilon)$, $q_2(t,\varepsilon)$ системы (1), при условии, что найденное решение $q_1(t,\varepsilon)$, $q_2(t,\varepsilon)$ удовлетворяет условию

$$q_1(t,0) = Q_1(t), \quad q_2(t,0) = Q_2(t),$$

где $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ есть $\dfrac{2\pi}{\omega_1}$-периодическое решение системы

$$\begin{cases} \ddot{Q}_1 + n_1^2 Q_1 - \dfrac{k_3}{m_1} Q_2 = F_1(t), \\ \ddot{Q}_2 - \dfrac{k_3}{m_2} Q_1 + n_2^2 Q_2 = F_2(t). \end{cases} \tag{3}$$

Для нахождения $\dfrac{2\pi}{\omega_1}$-периодического решения система (1) приводится к нормальной форме, после чего применяется метод Ляпунова-Шмидта, изложенный в [6]. Существования $\dfrac{2\pi}{\omega_1}$-периодических решений системы (3) обеспечивается условиями [6], налагаемыми на параметры внешних сил (2). Эти условия имеют вид

$$r_{11} = r_{12} = r_1, \quad \theta_{11} = \theta_1, \quad \theta_{12} = \theta_1 + \pi, \tag{4}$$
$$r_{21} = r_{22} = r_2, \quad \theta_{21} = \theta_2, \quad \theta_{22} = \theta_2, \tag{5}$$

где r_k, θ_k, $(k = 1, 2)$ – произвольные вещественные параметры.

В качестве примера рассмотрим систему (1) со следующими обезразмеренными параметрами

$$m_1 = m_2 = 1, \quad n_1^2 = n_2^2 = 10, \quad k_2 = k_3 = 6, \tag{6}$$
$$d_{11} = -2, \quad d_{22} = 2, \quad d_{12} = d_{21} = 0. \tag{7}$$

Значения частот внешних сил (2) положим равными

$$\omega_1 = 2, \quad \omega_2 = 4, \quad \omega_3 = 8. \tag{8}$$

Для проведения расчетов на основе метода Ляпунова-Шмидта разработан алгоритм, который реализован в математической библиотеке `SymPy Python`.

В результате проведения вычислительного эксперимента для системы (1) с параметрами (4)-(8) получено π-периодическое решение

$$\begin{aligned} q_1(t,\varepsilon) &= -\frac{1}{2\varepsilon} r_1 \sin(2t + \theta_1) - \frac{1}{2\varepsilon} r_2 \sin(4t + \theta_2) - \frac{\varepsilon - 24}{2(\varepsilon^2 - 720)} r_3 \sin(8t + \theta_3), \\ q_2(t,\varepsilon) &= -\frac{1}{2\varepsilon} r_1 \sin(2t + \theta_1) - \frac{1}{2\varepsilon} r_2 \sin(4t + \theta_2) + \frac{\varepsilon + 24}{2(\varepsilon^2 - 720)} r_3 \sin(8t + \theta_3). \end{aligned} \tag{9}$$

Из формул (9) следует, что компоненты $q_1(t,\varepsilon)$ и $q_2(t,\varepsilon)$ π-периодического решения системы (1)

1) непрерывно зависят от параметров r_k, $\theta_k \in \mathbb{R}$ $(k = \overline{1,3})$ внешних сил (2);

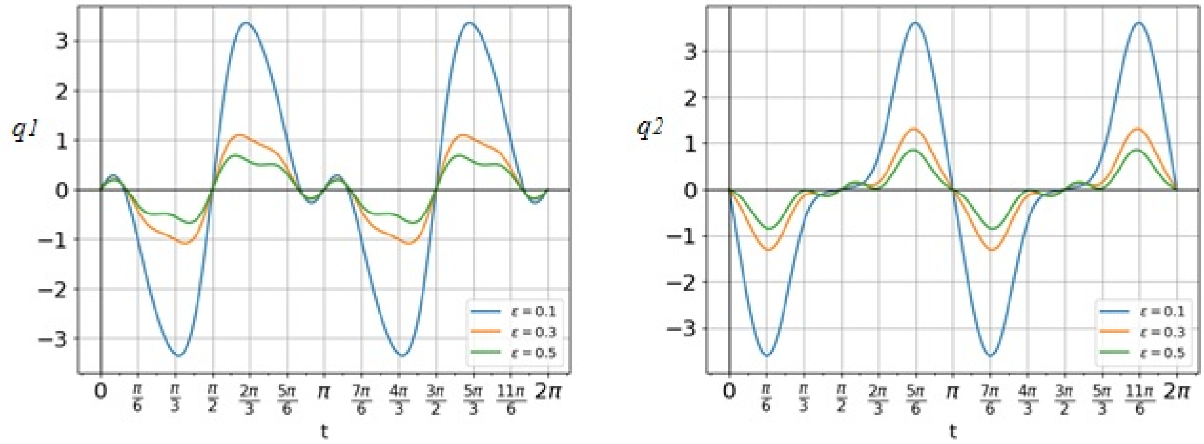
2) имеют полюс первого порядка в точке $\varepsilon = 0$, и, следовательно, при $\varepsilon \to 0$ не стремятся к соответствующим компонентам системы (3).

2. Графики периодических решений и фазовых траекторий

Для построения графиков π-периодических решений и фазовых траекторий системы (1) по формулам (9) в качестве параметров внешних сил (2) выберем следующие

$$\begin{gathered} r_1 = 0.5, \quad r_2 = 0.3, \quad r_3 = 10, \\ \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \theta_3 = \pi. \end{gathered}$$

На рис. 1 и 2 приведены графики компонент $q_1(t,\varepsilon)$ и $q_2(t,\varepsilon)$ π-периодических решений и фазовых траекторий системы (1), соответственно, при значемниях ε, равных 0.1, 0.3 и 0.5.



a) $q_1(t,\varepsilon)$ *b)* $q_2(t,\varepsilon)$

Рис. 1. Графики компонент *a)* $q_1(t,\varepsilon)$ и *b)* $q_2(t,\varepsilon)$ π-периодических решений системы (1) при различных ε.

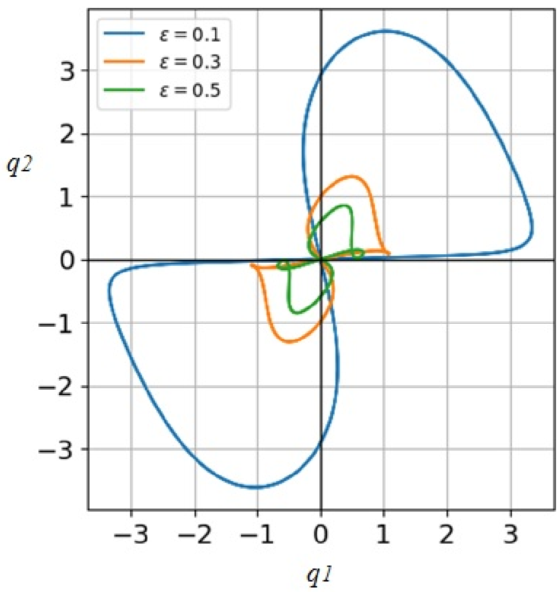


Рис. 2. График фазовой траектории системы (1) в конфигурационном пространстве Oq_1q_2 при различных ε.

Из графиков компонент $q_1(t,\varepsilon)$ и $q_2(t,\varepsilon)$ π-периодических решений и фазовых траекторий системы (1), изображенных на рис. 1 и 2 видно, что при уменьшении параметра ε амплитуда колебаний осцилляторов увеличивается.

Литература

1. Кадрякова М. Р., Логинов Б. В., Шаманаев П. А. О периодических решениях одного класса линейных неоднородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром в резонансном случае // Огарев-online, 2017. № 13. С. 8–17 [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://journal.mrsu.ru/arts/operiodicheskix-resheniyax-odnogo-klassa-linejnyx-neodnorodnyx-sistemobyknovennyx-differencialnyx-uravnenij-s-malym-parametrom-v-rezonansnomsluchae (дата обращения: 30.07.2023).

2. Карчиганов А. Ф., Шаманаев П. А. Исследование вынужденных колебаний одной линейной системы двух связанных осцилляторов с малым параметром // Огарев-online, 2020. № 13. С. 8–17 [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://journal.mrsu.ru/arts/issledovanie-vynuzhdennyx-kolebanij-odnoj-linejnoj-sistemydvux-svyazannyx-oscillyatorov-s-malym-parametrom (дата обращения: 30.07.2023).

3. Шаманаев П.А., Прохоров С.А. Исследование вынужденных колебаний линейной системы с двумя степенями свободы и малым параметром методом Ляпунова–Шмидта // Огарев-online, 2021. № 12. С. 83–91 [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://journal.mrsu.ru/arts/issledovanie-vynuzhdennyx-kolebanij-linejnoj-sistemy-s-dvumya-stepenyami-svobody-i-malym-parametrom-metodom-lyapunovashmidta (дата обращения: 30.07.2023).

4. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. СПб.: Лань, 2005. 440 с.

5. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука. 1964. 524 с.

6. Кяшкин А.А., Логинов Б.В., Шаманаев П.А. О ветвлении периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с вырожденным или тождественным оператором при производной и возмущением в виде малого линейного слагаемого // Журнал Средневолжского математического общества, 2016. Т.18, № 1. С. 45–53.

MSC 34C10, 34C25

On the question of studying forced vibrations of a linear system of two coupled oscillators near resonance

P. A. Shamanaev, D. A. Osipov

National Research Mordovia State University

Abstract: The article presents using of the Lyapunov-Schmidt method to study a mathematical model of vibrations in a system of two coupled oscillators near a resonance with a small parameter. It is assumed that an external periodic force with three comparable frequencies acts on the system. The algorithm developed on the basis of the Lyapunov-Schmidt method is implemented in the SymPy Python mathematical library. As an example, a certain system with fixed parameters is considered. A periodic solution is found for it, plots of the components of periodic solutions and phase trajectories are plotted.

Keywords: coupled oscillators, forced vibrations, periodic solutions, small parameter, Lyapunov-Schmidt method, resonance

References

1. Kadryakova M.R., Loginov B.V., Shamanaev P.A. On periodic solutions for a class of linear inhomogeneous systems of ordinary differential equations with small parameter in resonance case // Ogarev-online, 2017. Issue 13. P. 8–17. URL: http://journal.mrsu.ru/arts/operiodicheskix-resheniyax-odnogo-klassa-linejnyx-neodnorodnyx-sistemobyknovennyx-differencialnyx-uravnenij-s-malym-parametrom-v-rezonansnomsluchae (access date: 30.07.2023). (In Russian).

2. Karchiganov A.F., Shamanaev P.A. Investigation of forced oscillations of a linear system of two coupled oscillators with a small parameter // Огарев-online, 2020. Issue 13. P. 8–17. URL: http://journal.mrsu.ru/arts/issledovanie-vynuzhdennyx-kolebanij-odnoj-linejnoj-sistemydvux-svyazannyx-oscillyatorov-s-malym-parametrom (access date: 30.07.2023). (In Russian).

3. Shamanaev P.A., Prokhorov S.A. Investigation of forced vibrations of a linear system with two degrees of freedom and a small parameter by the Lyapunov-Schmidt method // Огарев-online, 2021. Issue 12. P. 83–91. URL: https://journal.mrsu.ru/arts/issledovanie-vynuzhdennyx-kolebanij-linejnoj-sistemy-s-dvumya-stepenyami-svobody-i-malym-parametrom-metodom-lyapunovashmidta (access date: 30.07.2023). (In Russian).

4. Strelkov S.P. Vvedenie v teoriyu kolebaniy [Introduction to the theory of oscillations]. St. Petersburg: Lan, 2005. 440 p. (In Russian).

5. Vainberg M. M., Trenogin V. A. Teoriya vetvleniya resheniy nelineynykh uravneniy [Branching theory of solutions of nonlinear equations]. M.: Nauka, 1964. 524 p. (In Russian).

6. Kyashkin A.A., Loginov B.V., Shamanaev P.A. [The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with degenerate or identity operator

in the derivative and the disturbance in the form of small linear term] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva, 2016. Vol.18. No.1. P. 45–53 (In Russian).