

УДК 517.91

Выбор методов решения задачи флюидодинамического моделирования в коллекторе трещиновато-порового типа*

Узянбаев Р.М.^{1,2}, Бобренёва Ю.О.², Поляков С.В.^{2,3}, Тишкин В.Ф.^{2,3}

Уфимский государственный нефтяной технический университет¹,
Институт нефтехимии и катализа УФИЦ РАН²,
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН³

Аннотация: Работа посвящена численным методам решения задачи моделирования массопереноса двухфазной жидкости в карбонатном коллекторе. Задача осложнена наличием двух сред, вложенных друг в друга (система трещин и поровая часть коллектора), что усложняет ее численный анализ. Для численного решения задачи в одномерном случае рассмотрены и реализованы в виде программного модуля явная и неявная разностные схемы на неравномерной сетке. Выполнены вычислительные эксперименты, на основе которых проведен сравнительный анализ реализованных методов.

Ключевые слова: математическое моделирование, система уравнений двухфазной фильтрации, коллектор трещиновато-порового типа, пьезопроводность, двойная пористость, явные и неявные разностные схемы.

1. Постановка задачи

Применение численных методов для рассматриваемой в данной работе задачи обуславливается невозможностью решения задачи аналитическим методом [1]. Как правило, при решении задач с применением численных методов рассматриваются разные вычислительные алгоритмы с целью определения наиболее эффективного [2-5]. Задача, представленная в статье, в дальнейшем подразумевает пространственное моделирование массопереноса, поэтому на первом этапе стоит цель подобрать наилучший алгоритм для решения в одномерной постановки.

В работе рассматривается фильтрация двухфазной слабо сжимаемой жидкости в рамках модели двойной пористости в трещиновато-пористой среде [6, 7]. Трещиновато-пористую среду будем представлять в виде геометрической модели, которая определяется множеством поровых блоков [8], что необходимо для оценки параметров системы. Размеры трещин превышают размеры пор в поровой части коллектора, но при этом объем их значительно меньше, чем в блоках. В связи с этим будем предполагать, что проницаемость трещин превышает проницаемость поровых блоков, а пористость в системе трещин, наоборот, меньше, чем в поровом коллекторе. Перенос жидкости происходит по трещинам, а поровые блоки только содержат запасы флюида. Массообмен между системами происходит за счет разности давлений.

Математическое описание изотермического процесса массопереноса представлено дифференциальными уравнениями второго порядка и состоит из законов сохранения массы и импульса (закон Дарси).

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 21-71-20047).

$$\frac{\partial(\phi^\alpha \rho_o^\alpha S_o^\alpha)}{\partial t} + \nabla(\rho_o^\alpha \vec{U}_o^\alpha) + q_o^\alpha = 0, \quad q_o^m = -q_o^f = -\rho_o^m \sigma \lambda_o^m (P^f - P^m), \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\phi^\alpha \rho_w^\alpha S_w^\alpha)}{\partial t} + \nabla(\rho_w^\alpha \vec{U}_w^\alpha) - q_w^\alpha = 0, \quad q_w^m = -q_w^f = -\rho_w^m \sigma \lambda_w^m (P^f - P^m), \quad (2)$$

$$\lambda_o^m = \frac{k^m k_{ro}(S_o^m)}{\mu_o}, \quad \lambda_w^m = \frac{k^m k_{rw}(S_w^m)}{\mu_w}, \quad (3)$$

$$U_o^\alpha = -\frac{k^\alpha k_{ro}(S_o^\alpha)}{\mu_o} \text{grad} P^\alpha, \quad U_w^\alpha = -\frac{k^\alpha k_{rw}(S_w^\alpha)}{\mu_w} \text{grad} P^\alpha. \quad (4)$$

Здесь $\alpha = f, m$, где f – система трещин, m – система матриц, $i = o, w$, где o – нефть, w – вода, P^f – пластовое давление в сети трещин (Па), P^m – пластовое давление в матрице (Па), ϕ^f – пористость в трещинах, ϕ^m – пористость в матрице, ρ_o^α – плотность нефти ($\text{г}/\text{м}^3$), ρ_w^α – плотность воды ($\text{г}/\text{м}^3$), S_i^f – насыщенность нефти/воды в системе трещин, S_i^m – насыщенность нефти/воды в матрице, U_i^α – скорость течения нефти/воды, q_j – дебит жидкости ($\text{м}^3/\text{сут}$), q_i^α – функция перетока между матрицей и трещинами, σ – коэффициент трещиноватой породы ($1/\text{м}^2$), k^α – абсолютная проницаемость (м^2), k_{rw} и k_{ro} – относительные фазовые проницаемости, μ_o – вязкость нефти (Па·с), μ_w – вязкость воды (Па·с).

Для поставленной задачи рассматриваются следующие начальные и граничные условия:

$$P^m|_{t=0} = P_0, P^f|_{t=0} = P_0, P^f|_{x=0} = P_w, \left. \frac{\partial P^f}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \quad (5)$$

Для численного решения рассматриваемой системы уравнений двухфазной фильтрации в коллекторе трещиновато-порового типа применялись два метода IMPES (неявный по давлению и явный по насыщенности) и IMPIS (неявный по давлению и неявный по насыщенности) [9].

На первом этапе для решения поставленной задачи проводим расщепление по физическим процессам, в результате которого получаем систему уравнений для первого функционального блока по пьезопроводности. Далее система уравнений линеаризуется по методу хорд. Полученные дифференциальные уравнения, граничные и начальные условия аппроксимируются их сеточными аналогами по неявной схеме [10]. В результате аппроксимации получаем систему линейных алгебраических уравнений, которые сводятся к общему виду:

$$-A_{pk} \delta P_{k-1}^f + C_{pk} \delta P_k^f - B_{pk} \delta P_{k+1}^f = \Phi_{pk}, \quad (6)$$

коэффициенты для (6) выглядят следующим образом:

$$\Phi_{pk} = -F^{fs} - \tau \left\{ \frac{(\rho_w^m \bar{\sigma} \lambda_w^m)^s}{(\rho_w^f)^{(\delta 1f) \approx}} + \frac{(\rho_o^m \bar{\sigma} \lambda_o^m)^s}{(\rho_o^f)^{(\delta 1f) \approx}} \right\} \Phi^{ms}, \quad (7)$$

$$A_{pk} = \frac{\tau}{\left[(\rho_w^f)^{(\delta 1f)} \right]_k} \left\{ \frac{1}{h_{k-1/2}} \left(\frac{\rho_w^f k^f}{\mu_w^f} \right)_{k-1/2} k_{rw}^{ups(k-1/2)} \right\} + \frac{\tau}{\left[(\rho_o^f)^{(\delta 1f)} \right]_k} \left\{ \frac{1}{h_{k-1/2}} \left(\frac{\rho_o^f k^f}{\mu_o^f} \right)_{k-1/2} k_{ro}^{ups(k-1/2)} \right\}, \quad (8)$$

$$B_{pk} = \frac{\tau}{\left[(\rho_w^f)^{(\delta 1f)} \right]_k} \left\{ \frac{1}{h_{k+1/2}} \left(\frac{\rho_w^f k^f}{\mu_w^f} \right)_{k+1/2}^s k_{rw(k+1/2)}^{ups} \right\} + \frac{\tau}{\left[(\rho_o^f)^{(\delta 1f)} \right]_k} \left\{ \frac{1}{h_{k+1/2}} \left(\frac{\rho_o^f k^f}{\mu_o^f} \right)_{k+1/2}^s k_{ro(k+1/2)}^{ups} \right\}, \quad (9)$$

$$C_{pk} = \frac{(S_w^f)^{(\delta 1f)} \approx}{(\rho_w^f)^{(\delta 1f)} \approx} (\bar{\phi}^f \rho_w^f)_{P_f}^{\prime S} + \frac{(1 - S_w^f)^{(\delta 1f)} \approx}{(\rho_o^f)^{(\delta 1f)} \approx} (\bar{\phi}^f \rho_o^f)_{P_f}^{\prime S} + \frac{\tau}{\left[(\rho_w^f)^{(\delta 1f)} \right]_k} \left\{ \frac{1}{h_{k+\frac{1}{2}}} \left(\frac{\rho_w^f k^f}{\mu_w^f} \right)_{k+\frac{1}{2}}^s k_{rw(k+\frac{1}{2})}^{ups} + \frac{1}{h_{k-\frac{1}{2}}} \left(\frac{\rho_w^f k^f}{\mu_w^f} \right)_{k-\frac{1}{2}}^s k_{rw(k-\frac{1}{2})}^{ups} \right\} + \frac{\tau}{\left[(\rho_o^f)^{(\delta 1f)} \right]_k} \left\{ \frac{1}{h_{k+\frac{1}{2}}} \left(\frac{\rho_o^f k^f}{\mu_o^f} \right)_{k+\frac{1}{2}}^s k_{ro(k+\frac{1}{2})}^{ups} + \frac{1}{h_{k-\frac{1}{2}}} \left(\frac{\rho_o^f k^f}{\mu_o^f} \right)_{k-\frac{1}{2}}^s k_{ro(k-\frac{1}{2})}^{ups} \right\} + \left\{ \frac{\tau}{(\rho_w^f)^{(\delta 1f)} \approx} (\rho_w^m \bar{\sigma} \lambda_w^m)^s (1 - \pi_m^s) \right\}_k + \left\{ \frac{\tau}{(\rho_o^f)^{(\delta 1f)} \approx} (\rho_o^m \bar{\sigma} \lambda_o^m)^s (1 - \pi_m^s) \right\}_k. \quad (10)$$

Для решения СЛАУ (6) использовался метод скалярной прогонки. В результате решения СЛАУ получаем значение давления. Полученные значения давления позволяют перейти к решению второго блока относительно переноса насыщенности.

Принято, что насыщенности воды и нефти в сумме дают единицу, поэтому насыщенность нефти выражается через насыщенность воды и все расчеты проводятся относительно воды. Далее, аналогично уравнению для пьезопроводности, система уравнений линейризуется методом хорд. Полученные дифференциальные уравнения аппроксимируются их сеточными аналогами по явной и неявной схеме. Получаем СЛАУ для переноса насыщенностей:

$$-A_{S_{wk}}^f \delta S_{wk-1}^f + C_{S_{wk}}^f \delta S_{wk}^f - B_{S_{wk}}^f \delta S_{wk+1}^f + E_{S_{wk}} \delta S_{wk}^m = 0 - L^{f \approx}, \quad (11)$$

где коэффициенты выглядят следующим образом:

$$A_{S_{wk}}^f = -\tau \left\{ \left[\rho_w^f \frac{k^f}{\mu_w^f} \frac{1}{h} \right]_{k-1/2}^{s+1} (P_k^f - P_{k-1}^f)^{s+1} \left[(k_{rw})'_{S_{wk-1}^f} \right]_{upink}^s \right\}, \quad (12)$$

если $P_k^f < P_{k-1}^f$, $A_{S_{wk}}^f \geq 0$,

$$B_{S_{wk}}^f = \tau \left\{ \left[\rho_w^f \frac{k^f}{\mu_w^f} \frac{1}{h} \right]_{k+1/2}^{s+1} (P_{k+1}^f - P_k^f)^{s+1} \left[(k_{rw})'_{S_{wk+1}^f} \right]_{upink}^s \right\}, \quad (13)$$

если $P_k^f < P_{k+1}^f$, $B_{S_{wk}}^f \geq 0$,

$$C_{S_{wk}}^f = (\bar{\phi}^f \rho_w^f)_k^{s+1} - \tau \left\{ \left[\rho_w^f \frac{k^f}{\mu_w^f} \frac{1}{h} \right]_{k+\frac{1}{2}}^{s+1} (P_{k+1}^f - P_k^f)^{s+1} \left[(k_{rw})'_{S_{wk}^f} \right]_{upink}^s \right\} - \tau \left\{ \left[\rho_w^f \frac{k^f}{\mu_w^f} \frac{1}{h} \right]_{k-\frac{1}{2}}^{s+1} (P_k^f - P_{k-1}^f)^{s+1} \left[(k_{rw})'_{S_{wk}^f} \right]_{upink}^s \right\}. \quad (14)$$

В сеточных аппроксимациях a^{\approx} значения на неявном слое по времени \hat{t} берутся на $s + 1$ уже вычисленной итерации, если они связаны с давлением (P^{s+1}), и s -й итерации, если они связаны с водонасыщенностью (S_w^s), δt – вес по времени.

Здесь выражение в первой квадратной скобке рассматривается для $P_k^f > P_{k+1}^f$, а выражение во второй квадратной скобке – для $P_k^f > P_{k-1}^f$. Очевидно, при достаточно малых шагах по времени $C_{Swk}^f - A_{Swk}^f - B_{Swk}^f > 0$.

Полученное уравнение аналогично уравнению пьезопроводности решается с помощью скалярной прогонки на каждом временном слое. Приращение давления на итерации представляется следующим образом:

$$\delta P^m = \delta P^{ms+1} - P^{ms}, \quad \delta P^f = \delta P^{fs+1} - P^{fs}. \quad (15)$$

Проведены вычислительные эксперименты для тестовой задачи. На рис. 1 представлены кривые изменение водонасыщенности по пространству при различных значениях проницаемости, которые показали, что чем проницаемость выше, тем скорость насыщения водой быстрее.

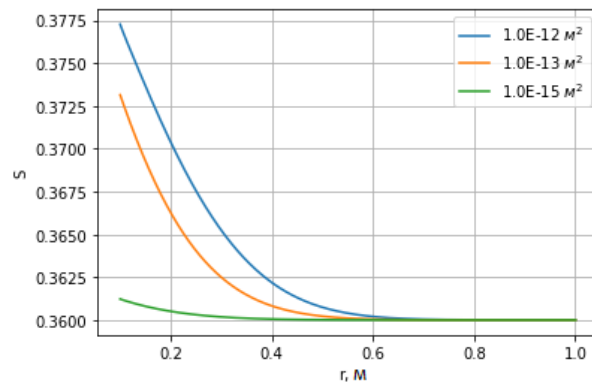


Рис. 1. Изменение водонасыщенности по пространству при различных значениях проницаемости.

2. Сравнение реализованных методов флюидодинамического моделирования в коллекторе трещиновато-порового типа

Неявный метод по сравнению с явным требует дополнительных вычислений и реализуется сложнее. На каждом слое схема представляет собой систему линейных уравнений. Правые части этих уравнений известны, поскольку содержат значения решения с предыдущей итерации. В методе IMPIS при его реализации итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не достигается заданная точность по насыщенности. При этом требуется меньше вычислительного времени (расчет ведется с большими временными шагами), даже с учетом того, что уравнения решаются на каждом временном шаге.

При реализации задачи явным методом (IMPES) требуется вести расчет с малым шагом по времени, чтобы погрешность результата оставалась ограниченной.

Таким образом, реализовав оба метода для рассматриваемой задачи, авторы пришли к выводу, что неявный и явный методы различаются в подходе к выбору временного шага. В IMPIS методе реализация каждого временного шага требует итерационной сходимости, но мы при этом можем задавать более крупные шаги по времени. С другой стороны, в IMPES алгоритме каждый временной шаг не обязан сходиться,

но для того, чтобы решение было точным, приходится выбирать более мелкий шаг по времени.

В рамках исследования расчеты для явной и неявной схемы проводились с одинаковым шагом по времени. В результате расчетов полученные решения при явном и неявном методах отличались несущественно (рис. 2).

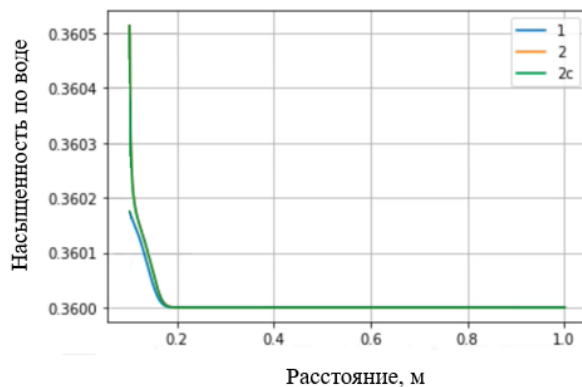


Рис. 2. Изменение насыщенности, рассчитанной по схемам:
1 – неявная, 2 – явная, 2с – симметричная.

Далее были проведены расчеты по симметричной (явно-неявной) схеме. Результаты симметричной схемы полностью совпали с результатами явной схемы (рис. 2). Для дальнейших расчетов будет применена симметричная схема, поскольку для нее область вычислительной устойчивости по сравнению с явной схемой значительно шире.

Литература

1. Голф-Рахт Т.Д. Основы нефтепромысловой геологии и разработки трещиноватых коллекторов. [ред.] Ковалева А.Г. [перев.] Голованова П.К., Власенова В.В., Покровский В.В. Бардина Н.А. М.: Недра, 1986. 608 с.
2. Борисов В.Е., Критский Б.В., Савенков Е.Б. Явные схемы для задач фильтрации многофазного многокомпонентного флюида в пористой среде // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 92. 27 с
3. Люпа А.А., Савенков Е.Б. Модель двухфазной фильтрации с релаксацией потока и анализ эффективности применения явных схем // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 129. 16 с. doi:10.20948/prepr-2016-129
4. Жалнин Р.В., Масягин В.Ф., Пескова Е. Е., Тишкин В. Ф. Применение метода Галеркина с разрывными базисными функциями к исследованию динамики изменения температуры и давления в пласте с нагнетательной скважиной и трещиной гидроразрыва // Инженерные технологии и системы. – 2021. – Т. 31, № 1. – с. 161–174. DOI 10.15507/2658-4123.031.202101.161-174.
5. Блонский А. В., Савенков Е. Б., Моделирование двухфазных течений в трещиноватой среде с кавернами, Матем. моделирование, 31:2 (2019), 78–94; Math. Models Comput. Simul., 11:5, 2019, 778–788

6. Тугарова М.А. Породы-коллекторы: Свойства, петрографические признаки, классификации: учебно-методическое пособие. СПб.: С.-Петербургский гос. университет, 2004. 36 с.
7. Черницкий А.В. Геологическое моделирование нефтяных залежей массивного типа в карбонатных трещиноватых коллекторах. М.: ОАО «РМНТК Нефтеотдача», 2002. 254 с.
8. Warren, J.E., Root, P.J.: The behaviour of naturally fractured reservoirs. *J. Soc. Petrol. Eng.* 3(03), 245–255 (1963)
9. Aziz, H.: *Mathematical Modeling of Reservoir Systems*. Institute for Computer Research, Moscow-Izhevsk (2004)
10. Uzyanbaev, R.; Bobreneva, Yu.; Poveshchenko, Yu.; Podryga, V.; Polyakov, S. Modeling of two-phase fluid flow processes in a fractured-porous type reservoir using parallel computations. *Communications in Computer and Information Science*. Springer, Cham. **2022**, 1618, 276–292.

MSC 34D20

Choice of Methods for Solving the Problem of Fluid Dynamic Modeling in a Fractured-Porous Reservoir

R.M. Uzyanbaev^{1,2}, Y.O. Bobreneva², S.V. Polyakov^{2,3}, V.F. Tishkin^{2,3}

Ufa State Petroleum Technological University¹, Institute of Petrochemistry and Catalysis of the Ufa Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences²,
Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS³

Abstract: The work is devoted to numerical methods for solving the problem of modeling the mass transfer of a two-phase fluid in a carbonate reservoir. The problem is complicated by the presence of two media embedded in each other (a system of fractures and a pore part of the reservoir), which complicates its numerical analysis. For the numerical solution of the problem in the one-dimensional case, explicit and implicit difference schemes on a non-uniform grid are considered and implemented as a software module. Computational experiments were performed, on the basis of which a comparative analysis of the implemented methods was carried out.

Keywords: mathematical modeling, system of equations for two-phase filtration, fractured porous reservoir, piezoconductivity and double porosity, explicit and implicit difference schemes.

References

1. Golf-Racht, T.D.: Fundamentals of Fractured Reservoir Engineering. Elsevier scientific publishing company, A-O-NY (1982) (in Russian)
2. Borisov V.E., Kritskiy B.V., Savenkov E.B. Explicit Schemes for Problems of Filtration of a Multiphase Multicomponent Fluid in a Porous Medium // Preprint of IPM. 2013. № 92. 27 p (in Russian)
3. Lyupa A.A., Savenkov E.B. Two-Phase Flow Model with Flow Relaxation and Effectiveness Analysis of the Explicit Schemes Application // Preprint of IPM. 2016. № 129. 16 p. doi:10.20948/prepr-2016-129 (in Russian)
4. Zhalnin R.V., Masyagin V.F., Peskova E.E., et al. Application of the Discontinuous Galerkin Method to the Study of the Dynamics of Temperature and Pressure Changes in a Formation with an Injection Well and a Hydraulic Fracture. *Inzhenereremye tekhnologii i sistemy = Engineering Technologies and Systems*. 2021; 31(1):161-174. DOI: <https://doi.org/10.15507/2658-4123.031.202101.161-174>
5. Blonsky A.V., Savenkov E.B., “Two-Phase Flow Modelling Within Fractured Vuggy Reservoir”, , 78–94; *Math. Models Comput. Simul.*, 11:5 (2019), 778–788 (in Russian)
6. Tugarova, M.A.: Reservoir Rocks: Properties, Petrographic Features, Classifications. Educational and methodical manual, St. Petersburg University, SPb (2004) (in Russia)
7. Chernitskii, A.V.: Geological Modeling of Oil Fields in Massive Type of Carbonate Fractured Reservoirs. «RMNTK Nefteotdacha», Moscow (2002) (in Russian)

8. Warren, J.E., Root, P.J.: The behaviour of naturally fractured reservoirs. *J. Soc. Petrol. Eng.* 3(03), 245–255 (1963)
9. Aziz, H.: *Mathematical Modeling of Reservoir Systems*. Institute for Computer Research, Moscow-Izhevsk (2004)
10. Uzyanbaev, R.; Bobreneva, Yu.; Poveshchenko, Yu.; Podryga, V.; Polyakov, S. Modeling of two-phase fluid flow processes in a fractured-porous type reservoir using parallel computations. *Communications in Computer and Information Science*. Springer, Cham. **2022**, 1618, 276–292. (in Russian)