УДК 517.958:536.2

Задача о термодинамическом взаимодействии слоя частиц с параллельной плоскостью

Сыромясов А.О., Еделева Ю.П.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: Ставится задача о взаимодействии слоя редко расположенных идентичных сферических частиц с плоскостью в присутствии неоднородного температурного поля. Особое внимание уделяется случаю, когда невозмущенный градиент температуры постоянен и перпендикулярен плоскости, которая обладает постоянной температурой. Обсуждается подход к определению эффективной теплопроводности слоя частиц. Указаны варианты уточнения условий исходной задачи.

Ключевые слова: термодинамическое взаимодействие, эффективная теплопроводность, мультипольное разложение, фиктивная частица.

1. Общая постановка проблемы

В работе рассматривается неподвижная сплошная среда с теплопроводностью κ_f, заполняющая полупространство, ограниченное плоскостью W. Для удобства вводится декартова прямоугольная система координат $Ox_1x_2x_3$, так что W совпадает с плоскостью Ox_1x_2, а полупространство описывается неравенством $x_3 > 0$; здесь и далее вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ задает произвольную точку среды.

Область $S = \{\vec{x} \,|\, h_1 \le x_3 \le h_2\}$ может содержать инородные сферические частицы Ω_1, Ω_2, ... Для простоты считается, что свойства всех частиц одинаковы: их теплопроводность равна κ_p, а радиус – a. Количество частиц, вообще говоря, может быть бесконечным; центр Ω_k расположен в точке с радиус-вектором $\vec{r}_k$.

Подобные системы могут возникать в различных технологических процессах, в которых слои частиц взвеси вытягиваются вдоль поверхностей сосудов или труб, содержащих дисперсную среду. Соответственно, практический интерес представляет следующий вопрос: как упомянутый слой взвеси может исказить существующее в сплошной среде распределение температуры? Далее, можно ли рассматривать этот слой не как дисперсный, а как однородный, приписав ему некоторую эффективную теплопроводность?

Пусть поведение температуры среды T_f на плоскости W и в отдалении от S известно и является стационарным:

$$T_f(\vec{x}) \to T_\infty(\vec{x}), \quad x_3 \to \infty. \qquad (1)$$

Исходя из вышесказанного, можно сделать вывод, что вне частиц температура удовлетворяет линейному стационарному уравнению теплопроводности:

$$\Delta_x T_f = 0; \qquad (2)$$

здесь Δ_x – оператор Лапласа, вычисляемый по координатам вектора $\vec{x}$. Аналогично, внутри каждой из частиц справедливо уравнение

$$\Delta_y T_p = 0, \qquad (3)$$

где T_p – температура внутри Ω_k, а вектор $\vec{y} = \vec{x} - \vec{r}_k$ откладывается от центра Ω_k.

На поверхности сфер $\partial\Omega_k$ выполняются стандартные условия непрерывности температуры и теплового потока [1]:

$$T_f = T_p, \ \kappa_f \frac{\partial T_f}{\partial n} = \kappa_p \frac{\partial T_p}{\partial n}, \quad \vec{x} \in \partial\Omega_k, \tag{4}$$

где $\partial/\partial n$ есть производная в направлении внешней нормали к поверхности.

Помимо этого, T_p не имеет особенностей внутри частиц:

$$|T_p(\vec{y})| < \infty, \quad \forall\vec{y} \in \Omega_k. \tag{5}$$

2. Система «плоскость плюс одиночная частица»

Если инородные включения внутри S располагаются редко, то для определения общего искажения температурного поля следует предварительно решить задачу о термодинамическом взаимодействии плоскости и единственной частицы.

Известны различные подходы к описанию систем такого рода. В частности, взаимодействие сферы и плоскости может быть описано переходом в цилиндрическую систему координат [2] или методом отражений [3, 4]. В настоящей работе применяется метод мультипольного разложения [5]. Этот подход сочетается с введением фиктивной частицы M, взаимодействие с которой равносильно взаимодействию Ω и плоскости W.

Итак, будем рассматривать частицу Ω с центром в точке $\vec{r} = (0, 0, h)$, где $h > a$. Предположим, что невозмущенная температура в (1) имеет вид

$$T_\infty(\vec{x}) = T_w + T_3 x_3, \tag{6}$$

т. е. в полупространстве, занятом сплошной средой, невозмущенный градиент температуры перпендикулярен ограничивающей плоскости и постоянен. Кроме того, пусть на W задана постоянная температура

$$T_f\Big|_W = T_w; \tag{7}$$

это условие согласуется с (6).

Введем в рассмотрение сферу M, расположенную симметрично Ω относительно W и идентичную Ω по свойствам; тем самым, перейдем от полупространства $x_3 \geq 0$ к пространству $\mathbb{R}_3$, в котором задана та же невозмущенная температура $T_\infty(\vec{x})$. Пусть на поверхности ∂M заданы граничные условия, аналогичные (4).

Температуру вне частиц можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} T_f(\vec{x}) \ = \ & T_\infty(\vec{x}) + H_3^{ext}(\Omega) L_3(\vec{x} - \vec{r}) + F_{33}^{ext}(\Omega) L_{33}(\vec{x} - \vec{r}) + \ldots + \\ & + H_3^{ext}(M) L_3(\vec{x} + \vec{r}) + F_{33}^{ext}(M) L_{33}(\vec{x} + \vec{r}) + \ldots, \end{aligned} \tag{8}$$

а внутри Ω – в виде

$$T_p(\vec{y}) = T_\infty(\vec{r}) + A_0^{int}(\Omega) L_0(\vec{y})|\vec{y}| + H_3^{int}(\Omega) L_3(\vec{y})|\vec{y}|^3 + F_{33}^{int}(\Omega) L_{33}(\vec{y})|\vec{y}|^5 + \ldots \tag{9}$$

Здесь

$$L_0(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|}, \ L_{i \cdots j}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdots \frac{\partial}{\partial x_j} L_0(\vec{x}),$$

коэффициенты $H_3^{ext}(\Omega), F_{33}^{ext}(\Omega), \ldots$ не зависят от $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

Функции (8) и (9) удовлетворяют соотношениям (1)–(3) и (5). При ∇T_∞, перпендикулярном W, подбор специальных соотношений между $H_3^{ext}(\Omega), F_{33}^{ext}(\Omega), \ldots$, с одной стороны, и $H_3^{ext}(M), F_{33}^{ext}(M), \ldots$, с другой стороны, позволяет выполнить условие (7).

Остается найти $H_3^{ext}(\Omega), F_{33}^{ext}(\Omega), \ldots$ и $A_0^{int}(\Omega), H_3^{int}(\Omega), F_{33}(\Omega), \ldots$. Для этого выражения (8) и (9) подставляются в граничные условия (4), а полученные равенства раскладываются по параметру $\dfrac{a}{h} < 1$. После определения коэффициентов этого разложения задачу о термодинамическом взаимодействии одиночной сферы с плоскостью можно считать решенной.

3. Эффективная теплопроводность слоя частиц

Для ответа на основной вопрос исследования (об эффективных свойствах слоя частиц) необходимо выполнить осреднение полученного поля $T_f(\vec{x})$ по $\vec{r}_k$, учитывая, что горизонтальные компоненты этих векторов в общем случае отличны от нуля.

Существенную роль в этом должна играть дополнительная информация о расположении частиц: их центры могут быть распределены внутри слоя S случайным образом или образовывать периодическую решетку. В первом случае необходимо знать плотность распределения $\vec{r}_k$, а во втором – тип решетки (кубическая, гексагональная и т. д.) и ее шаг.

Результаты осреднения следует сравнить с решением задачи о прохождении температурного поля вида (6) через слой S, заполненный однородной средой с теплопроводностью $\kappa^* \neq \kappa_f$. Итогом такого сравнения будет зависимость $\kappa^*(\phi)$, где ϕ – объемная доля частиц взвеси в слое.

4. Варианты уточнения условий задачи

Постановка рассмотренной выше задачи может быть уточнена и дополнена несколькими способами.

Во-первых, можно рассмотреть случай, когда невозмущенный градиент температуры направлен не поперек плоскости W и слоя S, а вдоль них, т. е. T_∞ описывается не уравнением (6), а равенством вида $T_\infty = T_1 x_1$; при этом условие (7) также необходимо будет изменить.

Во-вторых, условие (7), в котором температура плоскости считается известной, можно заменить на условие вида (4); тем самым, будет учтено «проникновение» температурного поля за пределы ограничивающей плоскости W. Это потребует приписать полупространству $x_3 < 0$ некую теплопроводность, отличную от κ_f (в противном случае получится задача о частицах в неограниченном пространстве). Очевидно, условие на бесконечности при этом придется уточнить, а параметры фиктивной частицы – пересмотреть.

Наконец, в-третьих, можно учесть термодинамическое взаимодействие инородных частиц не только с плоскостью, но и друг с другом. Это потребует пропорционального увеличения количества фиктивных частиц. Кроме того, придется ввести в рассмотрение плотность условного парного распределения частиц рядом друг с другом, подобно тому, как это было сделано в [6] при вычислении эффективной вязкости суспензии.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.VI. Гидродинамика. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 736 с.

2. Stillinger F.H. Interfacial. Solutions of the Poisson -Boltzmann equation// Journal of Chemical Physics, 1961. Vol.35. No.5. P. 1584-1589.

3. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 632 с.

4. Hao Y., Haber S. Electrophoretic motion of a charged spherical particle normal to a planar dielectric wall// International Journal of Multiphase Flow, 1998. Vol.24. No.5. P. 793-824.

5. Мартынов С.И. Гидродинамическое взаимодействие частиц // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 1998. № 2. С. 112-119.

6. Batchelor G.K., Green J.T. The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order // Journal of Fluid Mechanics, 1972. Vol.56. No.3. P. 401-427.

MSC 35J25, 35Q79, 80A19, 80M35

On thermodynamic interaction of a particle stratum with a parallel plane

A.O. Syromyasov, Yu.P. Edeleva
National Research Mordovia State University

Abstract: The paper examines interaction of a plane with a slab of rarely placed identical spherical particles in presence of non-uniform temperature field. Special attention is paid to the case when undisturbed temperature gradien is constant and orthogonal to the plane and the plane itself has constant temperature. Approach to calculation of slab's effective thermal conductivity is discussed. Ways to refine initial problem statement are listed.

Keywords: thermodynamic interaction, effective thermal conductivity, multipole expansion, fictitious particle.

References

1. Landau L.D., Lifshitz E.M. Fluid Mechanics. Butterworth–Heinemann, 1987. 539 p.
2. Stillinger F.H. Interfacial Solutions of the Poisson - Boltzmann equation // Journal of Chemical Physics, 1961. Vol.35. No.5. P. 1584-1589.
3. Happel J., Brenner H. Low Reynolds number hydrodynamics. Prentice-Hall, 1965.
4. Hao Y., Haber S. Electrophoretic motion of a charged spherical particle normal to a planar dielectric wall // International Journal of Multiphase Flow, 1998. Vol.24. No.5. P. 793-824.
5. Martynov S.I. Hydrodynamic interaction of particles // Fluid dynamics, 1998. Vol.33. No.2. P. 245-251.
6. Batchelor G.K., Green J.T. The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order c^2// Journal of Fluid Mechanics, 1972. Vol.56. No.3. P. 401-427.