УДК 517.93

Структурно устойчивые линейные расширения квазипериодических потоков на торе

Сахаров А.Н.

Нижегородский государственный аграрнотехнологический университет

Аннотация: В статье рассматривается задача о геометрии областей устойчивости (неустойчивости) линейных канонических систем 2-го порядка с квазипериодическими коэффициентами, зависящими от параметров. Любая такая система порождает поток, который принято называть линейным расширением квазипериодического потока на торе. Основой для решения этой задачи является переход к системе на индуцируемом проективном расслоении. Если база тор $\mathbb{T}^2$, то проективное расслоение трехмерный тор $\mathbb{T}^2 \times S^1$. В периодическом случае такой переход приводит к системе на торе, не имеющей особых точек и ячеек Риба, что позволяет использовать классическую теорию Пуанкаре-Данжуа. При изменении паметров области устойчивости чередуются с областями неустойчивости, которым соответствуют целочисленные значения числа вращения. Границы этих областей представляют собой кривые в пространстве параметров, гладкость которых зависит от гладкости изучаемой системы. В квазипериодическом случае также существует характеристика, аналогичная числу вращения А. Пуанкаре, – число вращения слоя. Однако, полной аналогии с периодическим случаем здесь получить невозможно, о чем свидетельствует, например, существование неправильных по Ляпунову канонических систем. Показывается, что структурно устойчивым линейным расширениям соответствуют проективные потоки, имеющие два инвариантных нормально гиперболических тора (устойчивый и неустойчивый). Кроме того, в системах, зависящих от параметра, интервалы постоянства числа вращения слоя соответствуют структурно устойчивым линейным расширениям.

Ключевые слова: линейное расширение, показатели Ляпунова, проективный поток, число вращения слоя, нормально гиперболическое инвариантное многообразие.

1. Введение

Система
$$\dot{\varphi} = \omega, \qquad \dot{x} = A(\varphi)x, \tag{1}$$
где $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ – угловые координаты на торе $\mathbb{T}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$, а матрица $A(\varphi)$ является функцией на торе, определяет поток на $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$, который называется линейным расширением потока на торе. Будем считать, что след матрицы $A(\varphi)$ равен нулю, т.е. она представима в виде
$$A(\varphi) = a(\varphi)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b(\varphi)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c(\varphi)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$
Если компоненты вектора $\omega = (1, \gamma)$ рационально независимы, то поток на торе – квазипериодичекский.

Рассмотрим задачу об условиях структурной устойчивости (грубости) линейного расширения квазипериодического потока. Под структурной устойчивости имеется ввиду следующее: при фиксированном потоке на торе существует окрестность матрицы $A(\varphi)$ такая, что все линейные расширения с матрицами из этой окрестности послойно топологически эквивалентны.

Для каждой точки $(\varphi, x) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$, можно определить четыре показателя Ляпунова траектории (1), проходящей через эту точку:

$$\lambda_s^{\pm}(\varphi, x) = \limsup_{t\to\pm\infty} t^{-1} \ln \|X^t(\varphi)x\|, \qquad \lambda_i^{\pm}(\varphi, x) = \liminf_{t\to\pm\infty} t^{-1} \ln \|X^t(\varphi)x\|. \tag{3}$$

Согласно спектральной теореме ([1], теорема 3) множество всех показателей Ляпунова линейного расширения – *спектр показателей Ляпунова*, представляет собой объединение непересекающихся замкнутых интервалов, причем четыре показателя (3) содержатся в одном и том же спектральном интервале. В нашем случае спектр либо $\{-\beta, \beta\}$, либо $[-\beta, \beta]$, либо $\{0\}$ [2]. Эти свойства спектра позволяют ввести следующую классификацию двумерных линейных расширений квазипериодических потоков на торе.

Определение 1. *Линейное расширение называется*

1) равномерно гиперболическим, если его спектр $\{-\beta, \beta\}$*;*

2) эллиптическим, если спектр $\{0\}$ *и все решения* (1) *ограничены;*

3) параболическим, если спектр $\{0\}$ *и есть как ограниченные, так и неограниченные решения* (1)*;*

4) неравномерно гиперболическим, если спектр невырожденный интервал $[-\beta, \beta]$.

Неравномерно гиперболические квазипериодические системы (неправильные по Ляпунову) были открыты В.М. Миллионщиковым [3]. Таким образом, динамика линейных расширений над квазипериодическим потоком существенно отличается от периодического случая. Предположение о том, что структурно устойчивость эквивалентна равномерной гиперболичности требует дополнительного обоснования. Для этого сведем задачу к изучению динамики индуцируемого проективного потока. Перейдем от однородных координат к аффинным: $w = \dfrac{x_2}{x_1}$, в результате чего получим систему

$$\dot{\varphi} = \omega, \qquad \dot{w} = (a(\varphi) - b(\varphi))w^2 - 2c(\varphi)w + a(\varphi) + b(\varphi). \tag{4}$$

Эта система определяет *проективный поток*, индуцируемый линейной системой. Компактификация фазового пространства системы (4) с помощью замены $w = \operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$ $(-\pi \leq \theta \leq \pi)$ преобразует ее в систему на трехмерном торе $\mathbb{T}^3$:1

$$\dot{\varphi} = \omega, \qquad \dot{\theta} = 2a(\varphi) + 2b(\varphi)\cos\theta - 2c(\varphi)\sin\theta, \tag{5}$$

где (φ, θ) – угловые координаты на торе $\mathbb{T}^3$. Проективный поток описывает угловую эволюцию решений системы (1). Его можно рассматривать как поток на расслоении $\mathbb{T}^2 \times S^1$ с квазипериодическим потоком на базе $\mathbb{T}^2$. Также очевидно, что между системами вида (1) и (5) существует взаимно однозначное соответствие.

Количество публикаций, посвященных динамике линейных расширений над квазипериодическими потоками, необозримо. Мы обратим внимание на работы, непосредственно касающиеся областей устойчивости системы (1). Например, в работе Х. Брура и К. Симо [4] рассматривается уравнение Хилла с двумя параметрами α и β

$$\ddot{x} + (\alpha^2 + \beta p(t))x = 0$$

и квазипериодической функцией $p(t) = \cos t + \cos \gamma t$, где $\gamma = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. Это уравнение эквивалентно системе

$$\dot{\varphi} = (1, \gamma), \qquad \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 - \beta p(\varphi) & 0 \end{pmatrix} x. \tag{6}$$

Соответственно система на трехмерном торе выглядит так

$$\dot{\varphi} = (1, \gamma), \qquad \dot{\theta} = 1 + \alpha^2 + \beta(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) + (\alpha^2 + \beta(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) - 1)\cos\theta \tag{7}$$

Известно, что система (1) всегда может быть приведена линейным преобразованием к так называемой резонансной нормальной форме такой, что матрица коэффициентов не зависит от φ. Это преобразование, представляет собой ряд Фурье, который не всегда является сходящимся. В работе [4] метод нормальной формы используется при малых значениях параметра β. Для больших β в этой работе строится приближенная матрица монодромии, собственные значения которой определяют области гиперболичности[1] системы (1) в пространстве параметров. Результатом численного моделирования является также гипотеза о том, что при достаточно малых значениях β области неустойчивости отделяются друг от друга областями, в которых показатель Ляпунова равен нулю. Мы будем использовать систему (7) для иллюстрации некоторых конструкций теории, излагаемой ниже.

2. Свойства проективного потока

Свойства потока на на расслоении $\mathbb{T}^2 \times S^1$ полностью определяют динамику линейного расширения.

Пусть $\theta(t, \varphi_0, \theta_0)$ – решение (5) с начальными значениями (φ_0, θ_0). Существует предел

$$\varrho = \lim_{t\to\infty} \frac{\theta(t, \varphi_0, \theta_0)}{t},$$

который называется *числом вращения слоя*. Этот предел не зависит от начальных данных и является непрерывной функцией параметров системы [5].

Любой поток на торе имеет минимальные множества. В данном случае проективный поток сохраняет двойное отношение[2], что позволяет оценить число минимальных множеств: поток, порождаемый (5) имеет либо одно минимальное множество, либо два, либо тор $\mathbb{T}^3$ представляет собой несчетное объединение минимальных множеств [1, теорема 8].

Введем еще одно понятие, играющее существенную роль при изучении линейных расширений.

Определение 2. *Резонансом называется равенство*

$$\langle k, \omega\rangle + l\varrho = 0 (\mathrm{mod}\ 1), \quad (k, l) \in \mathbb{Z}^3.$$

---

[1] Острова неустойчивости по терминологии статьи [4].

[2] Пусть $x, y \in \mathbb{R}^2$, $\{x, y\}$ матрица, составленная из вектор-столбцов x и y. Тогда, если x, y, z, w – четыре различных вектора, то величина

$$\frac{\det\{x, y\}}{\det\{z, w\}} \cdot \frac{\det\{x, w\}}{\det\{z, y\}}$$

называется двойным отношением.

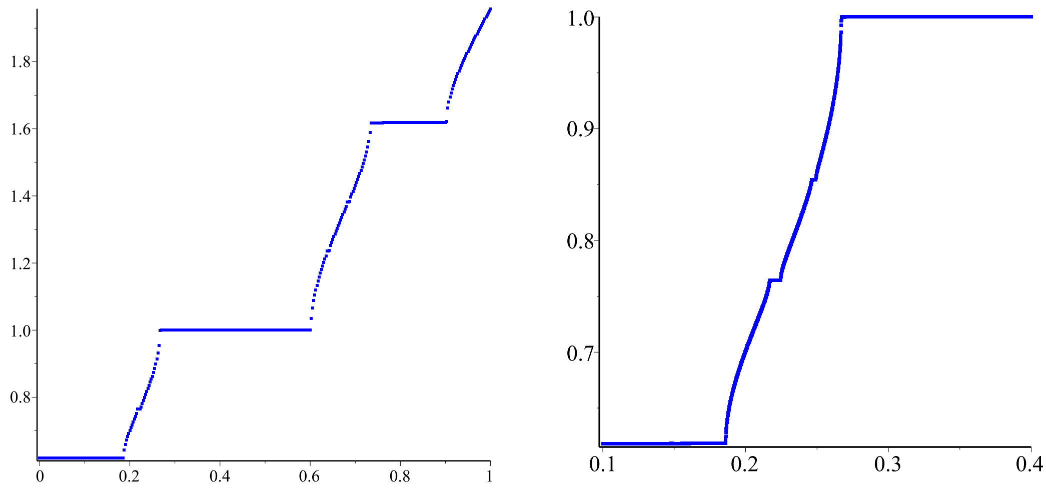

Рис. 1. Число вращения слоя системы (7) при $b = 0.3$ и $a \in [0, 1]$ слева, при $a \in [0.1, 0.4]$ справа.

В нащем случае резонансы существуют только при $l \neq 0$, поэтому соответствующие значения ϱ будем называть резонансными. В разделе 3 мы покажем, что резонансным значениям ϱ могут соответствовать области неустойчивости линейных расширений. Обнаружить существование резонансов можно вычисляя число вращения слоя (рис. 1). Ступеньки соответствуют резонансным значениям ϱ. Однако, численные эксперименты показывают, что не всякому резонансному значению соответствует ступенька. Введем следующее определение.

Определение 3. *Говорят, что интервал (α, β) является интервалом захвата фазы*[1] *для проективного потока, зависящего от параметров, если его число вращения постоянно на этом интервале.*

Для потока на торе $\mathbb{T}^2$ критерием захвата фазы является отсутствие послойной эквивалентности потока линейному

$$\dot{\varphi} = 1, \qquad \dot{\theta} = \varrho,$$

где ϱ – рациональное число [6]. Мы покажем ниже, что в рассматриваемой ситуации критерием захвата фазы является гиперболичность линейного расширения.

Показатели Ляпунова линейного расширения, порождаемого системой (1), вычисляются по формуле

$$\lambda_{\pm}(\varphi_0, \theta_0) = \lim_{t \to \pm\infty} \frac{1}{t} \int_0^t (2c(\omega t + \varphi_0) \cos \theta(s, \varphi_0, \theta_0) + 2b(\omega t + \varphi_0) \sin \theta(s, \varphi_0, \theta_0)) ds, \quad (8)$$

которая является следствием представления решения нетривиального уравнения системы в вариациях для траектории $\theta(t, \varphi_0, \theta_0)$.

[1]Захват фазы – явление, состоящее в том, что автоколебательная система при воздействии на неё периодически изменяющейся по времени внешней силы совершает колебания не с частотой автоколебаний, а с частотой внешнего воздействия для некоторого ограниченного диапазона частотных расстроек, называемых полосой захвата.

3. Формулировка результатов

Мы сформулируем теорему о свойствах проективного потока на трехмерном торе, являющейся обобщением так называемой «Gap Labeling Theorem» Р. Джонсона и Ю. Мозера [7].

Теорема 1. *Линейное расширение квазипериодического потока на торе структурно устойчиво тогда и только тогда, когда*

1) линейное расширение равномерно гиперболично;

2) неблуждающее множество проективного потока состоит из двух инвариантных торов (экспоненциально устойчивого и неустойчивого), являюшихся конечнократным накрытием базы;

3) число вращения слоя резонансное и принадлежит некоторому интервалу захвата фазы.

Доказательство этого результата является применением общих результатов теории проективных потоков Дж. Селгрейда [8].

Литература

1. Sacker R., Sell G.R. A Spectral Theory for Linear Differential Systems // Journal of Diff. Equat. 1978. Vol.27. P. 320-358.

2. Johnson R.A. On a Floquet Theory for Almost-Periodic, Two-Dimensional Linear Systems // Journal of Diff. Equat. 1980. Vol.37. P. 184-205.

3. Миллионщиков В.М. Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 1969. Т.5. № 11. С. 1979-1983.

4. Broer H., Sim'o C. Hill's equations with quasi-periodic forcing: resonance tongues, instability pockets and global phenomena // Bull. Soc. Bras. Math. 1998. Vol.29. P. 253-293.

5. Веременюк В.В. Существование числа вращения уравнения $\dot{x} = \lambda(t, x)$ с периодической по x и почти периодической по t правой частью // Дифференц. уравнения. 1991. Т.27, № 6,С. 1073–1076.

6. Ильяшенко Ю.С., Рыжов Д.А., Филимонов Д.А. Захват фазы для уравнений, описывающих резистивную модель джозефсоновского перехода, и их возмущений // Функциональный анализ и его прил. 2011. Т.45, № 3, С. 41–54.

7. Johnson R., Moser J. The Rotation Number for Almost Periodic Potentials, Commun. Math. Phys. Vol.84. P. 403-438.

8. Selgrade J.F. Isolated invariant sets for flows on vector bundles // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. Vol.203. P. 359-390.

MSC 34D20

Structurally stable linear extensions quasi-periodic flows on the torus

A.N. Sakharov
Nizhny Novgorod State Agrarian and Technological University

Abstract: The paper considers the problem of the geometry of the regions of stability (instability) of linear canonical systems of the 2nd order with quasi-periodic coefficients depending on the parameters. Any such system generates a flow, which is usually called a linear extension of a quasi-periodic flow on a torus. The basis for solving this problem is the transition to a system on an induced projective bundle. If the base torus is $\mathbb{T}^2$, then the projective bundle three-dimensional torus $\mathbb{T}^2 \times S^1$. In the periodic case, such a transition leads to a system on the torus that does not have singular points and Reeb cells, which makes it possible to use the classical theory Poincaré-Denjoy. When changing the parameters, the stability regions alternate with the instability regions, which correspond to integer rotation number values. The boundaries of these regions are curves in the parameter space, the smoothness of which depends on the smoothness the system under study. In the quasi-periodic case, there is also a characteristic similar to A. Poincaré's rotation number: *fiber rotation number*. However, it is impossible to obtain a complete analogy with the periodic case here, as evidenced, for example, by the existence of Lyapunov's wrong canonical systems. It is shown that structurally stable linear extensions correspond to projective flows having two invariant normally hyperbolic torus (stable and unstable). Moreover, in systems depending on the parameter, the intervals of constancy of the rotation number of the layer correspond to structurally stable linear extensions.

Keywords: linear extension, Lyapunov exponents, projective flow, fiber rotation number, normally hyperbolic invariant manifold.

References

1. Sacker R., Sell G.R. A Spectral Theory for Linear Differential Systems // Journal of Diff. Equat, 1978. Vol.27. P. 320-358.

2. Johnson R.A. On a Floquet Theory for Almost-Periodic, Two-Dimensional Linear Systems // Journal of Diff. Equat, 1980. Vol.37. P. 184-205.

3. Millionshchikov V.M. Proof of the existence of irregular systems of linear differential equations with quasi-periodic coefficients // Differential Equations, 1969. T. 5. № 11. P. 1979-1983.

4. Broer H., Sim'o C. Hill's equations with quasi-periodic forcing: resonance tongues, instability pockets and global phenomena // Bull. Soc. Bras. Math, 1998. Vol.29. P. 253-293.

5. Veremenyuk V.V. Existence of the rotation number of the equation $\dot{x} = \lambda(t, x)$ with right-hand side periodic in x and almost periodic in t // Differ. equations, 1991. T.27. № 6,P. 1073–1076.

6. Ilyashenko Yu.S., Ryzhov D.A., Filimonov D.A. Phase lock for equations describing the resistive model of the Josephson junction and their perturbations // Functional Analysis and its applications, 2011.T.45, № 3,P. 41–54.

7. Johnson R., Moser J. The Rotation Number for Almost Periodic Potentials, Commun. Math. Phys. Vol.84. P. 403-438.

8. Selgrade J.F. Isolated invariant sets for flows on vector bundles // Trans. Amer. Math. Soc, 1975. Vol.203. P. 359-390.