УДК 517.95

Линейные обратные задачи для псевдогиперболического уравнения третьего порядка с периодическим и интегральным условиями

Садыхзаде Р.Ш., Мегралиев Я.Т.

Бакинский Государственный Университет

Аннотация: В работе исследуется обратная краевая задача с неизвестной правой частью, зависящей от времени, для псевдогиперболического уравнения третьего порядка с периодическим и интегральным условиями. Решая исходную обратную краевую задачу осуществляется переход от исходной обратной задачи к некоторой вспомогательной задаче. При помощи принципа сжатых отображений доказываются существование и единственность решения вспомогательной задачи. Далее переход к исходной обратной задаче позволяет сделать вывод о ее разрешимости на основе доказанной разрешимости вспомогательной задачи.

Ключевые слова: обратная краевая задача, псевдогиперболическое уравнение третьего порядка, метод Фурье, классическое решение.

1. Введение

Задачи, в которых вместе с решением того или иного дифференциального уравнения надо определить также коэффициенты самого уравнения, либо же его правую часть, в математике называют обратными задачами. Если в обратной задаче неизвестными являются решение и правая часть, то такая обратная задача называется линейной; если же неизвестными являются решение и хотя бы один из коэффициентов, то обратная задача будет нелинейной.

В настоящее время обратные задачи активно развиваются и являются перспективным разделом современной математики. В последнее время они широко применяются в различных областях науки. Обратные задачи для различных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались во многих работах. Отметим работы А.Н. Тихонова [1], М.М. Лаврентьева [2, 3], А.М. Денисова [4], М.И. Иванчова [5] и их последователей.

Псевдогиперболические уравнения возникают в теории нестационарного течения вязкого газа при распространении начальных уплотнений в вязком газе [6], в теории солитонов [7] при описании процесса движения электронов в системе «сверхпроводник-диэлектрик с туннельной проводимостью-сверхпроводник». Разрешимость обратных задач в различных постановках с теми или иными условиями переопределения для псевдогиперболических уравнений была предметом исследования в работах [8-13].

2. Постановка задачи и сведение её к эквивалентной задаче.

Рассмотрим для уравнения

$$u_{tt}(x,t) - \alpha u_{txx}(x,t) - \beta u_{xx}(x,t) = a(t)g(x,t) + f(x,t) \tag{1}$$

в области $D_T = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ 0 \le t \le T\}$ обратную краевую задачу с начальными условиями

$$u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \quad (0 \le x \le 1), \tag{2}$$

периодическим условием

$$u(0,t) = u(1,t) \quad (0 \le t \le T)\,, \tag{3}$$

нелокальным интегральным условием

$$\int\limits_0^1 u(x,t)dx = 0 \quad (0 \le t \le T) \tag{4}$$

и дополнительным условием

$$u(x_0,t) = h(t) \quad (0 \le t \le T)\,, \tag{5}$$

где $x_0 \in (0,1)$,$\alpha > 0, \beta > 0$ – заданные числа, $f(x,t), g(x,t), \phi(x), \psi(x), h(t)$ – заданные функции, а $u(x,t)$ и $a(t)$ – искомые функции.

Введем следующее обозначение $\tilde{C}^2(D_T) = \{u(x,t) :\ u(x,t) \in C^2(D_T)\ , u_{txx}(x,t) \in C(D_T)\}$.

Определение 1. *Пару функций $\{u(x,t),\ a(t)\}$, $u(x,t) \in \tilde{C}^2(\bar{D}_T)$, $a(t) \in C[0,T]$, удовлетворяющих уравнению (1) в D_T, условиям (2) в $[0,1]$, условиям (3)-(5) в $[0,T]$, назовем классическим решением обратной краевой задачи (1)-(5).*

Теорема 1. *Пусть $f(x,t) \in C(\bar{D}_T)$, $\int\limits_0^1 f(x,t)dx = 0\,(0 \le t \le T)$, $g(x,t) \in C(\bar{D}_T)$, $\int\limits_0^1 g(x,t)dx = 0$, $(0 \le t \le T)$, $\phi(x), \psi(x) \in C[0,1]$, $h(t) \in C^2[0,T]$, $g(x_0,t) \ne 0$ $(0 \le t \le T)$, и выполняются условия согласования:*

$$\int\limits_0^1 \phi\,(x)\,dx = 0, \quad \int\limits_0^1 \psi\,(x)\,dx = 0, \tag{6}$$

$$\phi\,(x_0) = h\,(0)\,, \quad \psi\,(x_0) = h'\,(0)\,, \tag{7}$$

Таким образом задача нахождения классического решения задачи (1)-(5) эквивалентна задаче определения функций $u(x,t) \in \tilde{C}^2(\bar{D}_T)$ и $a(t) \in C[0,T]$, из соотношений (1)-(3) и

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) \;\; (0 \le t \le T), \tag{8}$$

$$h''(t) - \alpha u_{txx}(x_0,t) - \beta u_{xx}(x_0\,,t) == a(t)g(x_0,t) + f(x_0,t) \; (0 \le t \le T). \tag{9}$$

3. О разрешимости обратной краевой задачи.

Очевидно, что система функций

$$1, \quad \cos\lambda_1 x, \quad \sin\lambda_1 x, \quad ..., \quad \cos\lambda_k x, \quad \sin\lambda_k x, \quad ... \tag{10}$$

образует базис в $L_2(0,1)$, где $\lambda_k = 2k\pi$ $(k = 0, 1, ...)$. Из этого следует, что для каждого решения$\{u(x,t)\ ,\ a(t)\}$ задачи (1)-(3), (8), (9) первая компонента $u(x,t)$ имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1k}(t)\cos\lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}(t)\sin\lambda_k x \ (\lambda_k = 2\pi k) \tag{11}$$

где

$$u_{10}(t) = \int_0^1 u(x,t)dx, \quad u_{1k}(t) = 2\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x dx \ \ (k = 1, 2, ...)\,,$$

$$u_{2k}(t) = 2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x dx \ \ (k = 1, 2, ...).$$

Таким образом, применяя формальную схему Фурье, из (1) и (2) имеем:

$$u''_{10}(t) = F_{10}(t;a) \ \ (0 \le t \le T), \tag{12}$$

$$u''_{ik}(t) + \alpha\lambda_k^2 u'_{ik}(t) + \beta\lambda_k^2 u_{ik}(t) \ = F_{ik}(t;a)\,(i = 1,2; k \ = \ 1,2,...; \ 0 \ \le \ t \ \le \ T), \tag{13}$$

$$u_{10}(0) = \phi_{10}, \ \ u'_{10}(0) = \psi_{10}, \tag{14}$$

$$u_{ik}(0) = \phi_{ik}, \ \ u'_{ik}(0) = \psi_{ik} \ \ (i = 1,2; k = 1,2,...), \tag{15}$$

где

$$F_{1k}(t,u) = a(t)g_{1k}(t) + f_{1k}(t), \ \ (k = 0,1,...)\ , \quad f_{10}(t) = \int_0^1 f(x,t)dx\ ,$$

$$g_{10}(t) = \int_0^1 g(x,t)dx\ , \quad f_{1k}(t) = 2\int_0^1 f(x,t)\cos\lambda_k x dx \quad \phi_{10} = \int_0^1 \phi(x)dx, \quad \psi_{10} = 2\int_0^1 \psi(x)dx\,,$$

$$\phi_{1k} = 2\int_0^1 \phi(x)\cos\lambda_k x dx, \quad \psi_{1k} = 2\int_0^1 \psi(x)\cos\lambda_k x dx \qquad (k = 1, 2, ...),$$

$$F_{2k}(t,a) = a(t)g_{2k}(t) + f_{2k}(t),\ f_{2k}(t) = 2\int_0^1 f(x,t)\sin\lambda_k x dx,$$

$$g_{2k}(t) = 2\int_0^1 g(x,t)\sin\lambda_k x dx \ (k = 1, 2, ...),$$

$$\phi_{2k} = 2\int_0^1 \phi(x)\sin\lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, ...)\,, \qquad \psi_{2k} = 2\int_0^1 \psi(x)\sin\lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, ...).$$

Теперь предположим, что $\dfrac{\alpha^2\pi^2}{8} - \beta > 0$.

Решая задачу (12)-(13), находим:

$$u_{10}(t) = \phi_{10} + t\ \psi_{10} + \int_0^t (t-\tau)F_{10}(\tau;a)d\tau \ (0 \le t \le T), \tag{16}$$

$$u_{ik}(t)=\frac{1}{\gamma_k}\Bigg[(\mu_{2k}e^{\mu_{1k}t}-\mu_{1k}e^{\mu_{2k}t})\phi_{ik}+(e^{\mu_{2k}t}-e^{\mu_{1k}t})\psi_{ik}+$$
$$+\int\limits_0^t F_{ik}(\tau;a)(e^{\mu_{2k}(t-\tau)}-e^{\mu_{1k}(t-\tau)})d\tau\Bigg]\ (i=1,2;k=1,2,...),\quad (17)$$

где $\mu_{ik}=-\frac{\alpha\lambda_k^2}{2}+(-1)^i\lambda_k\sqrt{\frac{\alpha^2\lambda_k^2}{4}-\beta}$ $(i=1,2)$, $\gamma_k=\mu_{2k}-\mu_{1k}=2\lambda_k\sqrt{\frac{\alpha^2\lambda_k^2}{4}-\beta}$ $(k=1,2,...)$.

Подставляя выражения из (16), (17) в (11), для определения компоненты $u(x,t)$ решения задачи (1)-(3), (8), (9) получаем:

$$u(x,t)=\phi_{10}+t\ \psi_{10}+\int\limits_0^t(t-\tau)F_{10}(\tau;a)d\tau+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{\frac{1}{\gamma_k}\Bigg[(\mu_{2k}e^{\mu_{1k}t}-\mu_{1k}e^{\mu_{2k}t})\phi_{1k}+(e^{\mu_{2k}t}-e^{\mu_{1k}t})\psi_{1k}+$$
$$+\int\limits_0^t F_{1k}(\tau;a)(e^{\mu_{2k}(t-\tau)}-e^{\mu_{1k}(t-\tau)})d\tau\Bigg]\Bigg\}\cos\lambda_k x+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{\frac{1}{\gamma_k}\Bigg[(\mu_{2k}e^{\mu_{1k}t}-\mu_{1k}e^{\mu_{2k}t})\phi_{2k}+(e^{\mu_{2k}t}-e^{\mu_{1k}t})\psi_{2k}+$$
$$+\int\limits_0^t F_{2k}(\tau;a)(e^{\mu_{2k}(t-\tau)}-e^{\mu_{1k}(t-\tau)})d\tau\Bigg]\Bigg\}\sin\lambda_k x.\quad (18)$$

Из (9), с учетом (17), имеем:

$$a(t)=[g\,(x_0,t)]^{-1}\Bigg\{h''\,(t)-f\,(x_0,t)-\sum_{k=}^{\infty}\frac{1}{\gamma_k}\left[\mu_{1k}\mu_{2k}(\mu_{1k}e^{\mu_{1k}t}-\mu_{2k}e^{\mu_{2k}t})\phi_{1k}+\right.$$
$$+(\mu_{2k}^2e^{\mu_{2k}t}-\mu_{1k}^2e^{\mu_{1k}t})\psi_{1k}+\int\limits_0^t F_{2k}(\tau;a)(\mu_{2k}^2e^{\mu_{2k}(t-\tau)}-\mu_{1k}^2e^{\mu_{1k}(t-\tau)})d\tau\Bigg]\cos\lambda_k x_0+$$
$$-\sum_{k=}^{\infty}\frac{1}{\gamma_k}\left[\mu_{1k}\mu_{2k}(\mu_{1k}e^{\mu_{1k}t}-\mu_{2k}\,e^{\mu_{2k}t})\phi_{2\,k}+(\mu_{2k}^2e^{\mu_{2k}t}-\mu_{1k}^2e^{\mu_{1k}t})\psi_{2k}\right.$$
$$+\int\limits_0^t F_{2k}(\tau;a)(\mu_{2k}^2e^{\mu_{2k}(t-\tau)}-\mu_{1k}^2e^{\mu_{1k}(t-\tau)})d\tau\Bigg]\sin\lambda_k x_0.\quad (19)$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3), (8), (9) сведено к решению системы (18), (19) относительно неизвестных функций $u(x,t)$ и $a(t)$.

Допустим, что данные задачи (1)-(3), (8), (9) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \dfrac{\alpha^2}{8} - \beta > 0$.
2. $\phi(x) \in C^2[0,1],\ \phi'''(x) \in L_2(0,1), \phi(0) = \phi(1),\ \phi'(0) = \phi'(1),\ \phi''(0) = \phi''(1)$.
3. $\psi(x) \in C^2[0,1],\ \psi'''(x) \in L_2(0,1)\ ,\ \psi(0) = \psi(1),\ \psi'(0) = \psi'(1),\ \psi''(0) = \psi''(1)$.
4. $f(x,t),\ f_x(x,t), f_{xx}(x,t) \in C(D_T),\ f_{xxx}(x,t) \in L_2(D_T), f(0,t) = f(1,t),\ f_x(0,t) = f_x(1,t),\ f_{xx}(0,t) = f_{xx}(1,t)\ (0 \le t \le T)$.
5. $g(x,t),\ g_x(x,t), g_{xx}(x,t) \in C(D_T),\ g_{xxx}(x,t) \in L_2(D_T), g(0,t) = g(1,t),\ g_x(0,t) = g_x(1,t),\ g_{xx}(0,t) = g_{xx}(1,t)\ (0 \le t \le T)$.
6. $h(t) \in C^2[0,T]\ ,\ g(x_0,t) \neq 0\ \ (0 \le t \le T)$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия 1-6. Тогда задача (1)-(3), (8), (9) имеет единственное решение.*

Из теоремы 2 вытекает однозначная разрешимость задачи (1)-(5) в силу теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть выполняются все условия теоремы 2,*

$$\int_0^1 f(x,t)dx = 0\ ,\ \int_0^1 g(x,t)dx = 0 \quad (0 \le t \le T)$$

и выполнены условия согласования (6),(7). Тогда задача (1)-(5) имеет единственное классическое решение.

Литература

1. Тихонов А.И. Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. 1943. Т. 39, № 5. С. 195-198.
2. Лаврентьев М.М. Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157, № 3. С. 520-521.
3. Лаврентьев М.М. , Романов В.Г., Шишатский С.Т. Некорректные задачи математической физики и анализа. М: Наука. 1980. 288 с.
4. Иванов В.К., Васин В.В., Танина В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
5. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М: МГУ, 1994. 206 с.
6. Войт С.С. Распространение начальных уплотнений в вязком газе // Учёные записки МГУ. Сер.: Механика, 1954. Т. 4, вып. 172. С. 125–142.
7. Лонгрен К., Скотт Э. Солитоны в действии. М.: Мир, 1981.
8. Кожанов А.И., Сафиуллова Р.Р. Об одном классе псевдогиперболических уравнений с неизвестным коэффициентом // Челяб. физ.-матем. журн., 2022. Т. 7, выпуск 2. С. 164–180
9. Lorenzi A., Paparoni E. Identification problems for pseudohyperbolic integrodifferential operetor equation // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 1993. Vol. 5, no. 19. P. 523–548.

10. Асанов А.Р. Обратные задачи для псевдогиперболических уравнений: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Бишкек, 1994.

11. Мегралиев Я.Т. О разрешимости одной обратной краевой задачи для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка с дополнительным интегральным условием // Изв. вузов. Поволж. регион. Сер. Физ.-мат. науки, 2013. № 1. С. 19–33.

12. Elvin I. Azizbayova , Yashar T. Mehraliyev. Inverse Boundary-Value Problem for the Equation of Longitudinal Wave Propagation with Non-self-adjoint Boundary Conditions // Filomat, 2019. V. 33, N 16. DOI: 10.2298/FIL1916259A.

13. Lorenzi A., Paparoni E. Identification problems for pseudohyperbolic integrodifferential operetor equation // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 1993. Vol. 5, no. 19. P. 523–548.

MSC 34D20

Linear inverse problems for third-order pseudo-hyperbolic equation with periodic and integral conditions

R.Sh. Sadikhzada, Y.T. Mehraliyev
Baku State University

Abstract: In this paper we study an inverse boundary value problem with an unknown time-depended right hand side for a third-order pseudo-hyperbolic equation with periodic and integral conditions.When solving the original inverse boundary value problem, the transition from the original inverse problem to some auxiliary inverse problem is carried out. The existence and uniqueness of a solution to an auxiliary problem are proved with the help of contracted mappings. Then the transition to the original inverse problem is again made, as a result, a conclusion is made about the solvability of the original inverse problem.

Keywords: inverse boundary value problem, third-order hyperbolic equation, Fourier method, classical solution.

References

1. A.N. Tikhonov. On stability of inverse problems. Doklady Akademii Nauk SSSR, 1943. V. 39. P. 195–198.
2. M.M. Lavrent'ev. On one inverse problem for the wave equation // Doklady Academii Nauk SSSR. 1964.V. 157. No. 3. P. 520-521.
3. M.M. Lavrent'ev, V.G. Romanov, S.T. Shishatsky, Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis. M.: Nauka, 1980.
4. V.K.Ivanov, V.V.Vasin, V.P.Tanina. Theory of linear ill-posed problems and its applications. M.: Nauka, 1978. 206 p.
5. A.M. Denisov, Introduction to Theory of Inverse Problems, M: MSU, 1994. 206 p.
6. S.C. Voight. Propagation of initial densifications in a viscous gas // Uchenye zapiski MGU, 1954. V. 4, N 125–142.
7. K. Longren and E.Scott. Solitons in Action. M.: Mir, 1981.
8. A.I. Kozhanov and R.R. Safiullova. On a class of pseudo-hyperbolic equations with an unknown coefficient. Chelyab. Fiz.-Mat. Zh., 7:164–180, 2022.
9. A. Lorenzi, E. Paparoni Identification problems for pseudo-hyperbolic integro-differential operetor equation // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 1993. Vol. 5, no. 19. P. 523–548.
10. A.R. Asanov. Inverse Problems for Pseudo-hyperbolic Equations. PhD thesis, Institute of Mathematics of Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, 1994.

11. Y.T. Megraliev. On the solvability of an inverse boundary value problem for a fourth order pseudo-hyperbolic equation with an additional integral condition // News of Higher Educational Institutions Volga Region, 2013. P. 19–33.

12. Elvin I. Azizbayova , Yashar T. Mehraliyev. Inverse Boundary-Value Problem for the Equation of Longitudinal Wave Propagation with Non-self-adjoint Boundary Conditions // Filomat, 2019. V. 3, 16 (2019), 5259–5271 https://doi.org/10.2298/FIL1916259A

13. A. Lorenzi, E. Paparoni Identification problems for pseudo-hyperbolic integro-differential operetor equation // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 1993. Vol. 5, no. 19. P. 523–548.