

УДК 517.956.4

## Двусторонние оценки решения одномерного уравнения теплопроводности

Рассадин А.Э.

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

*Аннотация:* В статье для решения задачи Коши на прямой для линейного уравнения диффузии-теплопроводности с начальными условиями специального вида получены оценки решения снизу и сверху. С помощью вычислительного эксперимента показано, что по прошествии некоторого промежутка времени в качестве приближённого решения этой задачи можно брать любую из этих оценок.

*Ключевые слова:* интеграл Пуассона, прямое и обратное неравенства Гёльдера, функция ошибок, компактный носитель, функция Хевисайда, относительная погрешность.

### 1. Введение

Задача Коши для линейного дифференциального уравнения в частных производных параболического типа на прямой:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = U(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

находит многочисленные применения в задачах тепломассообмена [1], теории случайных процессов [2] и т. д.

Как хорошо известно, для ограниченного начального условия  $U(x)$  точное решение  $u(x, t)$  задачи Коши (1) выражается интегралом Пуассона [1]:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] U(\xi) d\xi. \quad (2)$$

Очевидно, что интеграл (2) вычисляется точно далеко не для каждой функции  $U(x)$ . Однако часто возникает необходимость знать детали пространственно-временного поведения функции  $u(x, t)$ . Ясно, что для того, чтобы получить эту информацию, кроме условия ограниченности функции  $U(x)$  нужно наложить на неё некие дополнительные условия. В данной работе этими условиями являются требования неотрицательности и финитности функции  $U(x)$ .

Далее статья имеет следующую структуру: в разделе 2 выведены двусторонние оценки для точного решения (2). Раздел 3 посвящён описанию вычислительного эксперимента, иллюстрирующего полученные в разделе 2 соотношения. В Заключении суммированы полученные результаты и обсуждены перспективы дальнейших исследований.

## 2. Вывод основных соотношений

Пусть начальное условие в задаче Коши (1) имеет следующий вид:

$$U(x) = \sum_{i=1}^n c_i U_i(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

где функции  $U_i(x) \geq 0$  и обладают компактным носителем:  $\text{supp } U_i = [a_i, b_i]$ , причём  $b_i \leq a_{i+1}$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ , а постоянные  $c_i > 0$ .

Подставив сумму (3) в интеграл Пуассона (2), получим:

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n c_i u_i(x, t), \quad (4)$$

где введены новые неизвестные функции:

$$u_i(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{a_i}^{b_i} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] U_i(\xi) d\xi. \quad (5)$$

Далее, выберем  $2n$  вещественных чисел  $p_i^\pm$  так, чтобы для каждого  $i = \overline{1, n}$  выполнялись неравенства  $0 < p_i^- < 1 < p_i^+$ , и, кроме того, чтобы сошлись все  $2n$  интегралов по отрезкам  $[a_i, b_i]$  в величинах:

$$N_i^\pm = \left( \int_{a_i}^{b_i} U_i^{q_i^\pm}(x) dx \right)^{1/q_i^\pm}, \quad q_i^\pm = \frac{p_i^\pm}{p_i^\pm - 1}. \quad (6)$$

Если все величины (6) конечны, то каждый из интегралов (5) может быть оценен и сверху — с помощью прямого интегрального неравенства Гёльдера, и снизу — с помощью обратного интегрального неравенства Гёльдера [3] — следующим образом:

$$N_i^- v_i^-(x, t) \leq u_i(x, t) \leq N_i^+ v_i^+(x, t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

где

$$v_i^\pm(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left( \int_{a_i}^{b_i} \exp\left[-p_i^\pm \frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] d\xi \right)^{1/p_i^\pm}. \quad (8)$$

Легко видеть, что с помощью известной функции вероятности ошибок функции (8) могут быть выражены следующим образом:

$$v_i^\pm(x, t) = \frac{1}{2} (\pi t)^{-\frac{1}{2q_i^\pm}} (p_i^\pm)^{-\frac{1}{2p_i^\pm}} \left( \text{erf}\left[\frac{\sqrt{p_i^\pm}(x-a_i)}{2\sqrt{t}}\right] - \text{erf}\left[\frac{\sqrt{p_i^\pm}(x-b_i)}{2\sqrt{t}}\right] \right)^{1/p_i^\pm}. \quad (9)$$

Наконец, умножая каждое из неравенств (7) на константы  $c_i$  из формулы (3) и суммируя их по  $i$ , получим двусторонние оценки для функции (4):

$$u^-(x, t) \leq u(x, t) \leq u^+(x, t), \quad (10)$$

где

$$u^\pm(x, t) = \sum_{i=1}^n c_i N_i^\pm v_i^\pm(x, t). \quad (11)$$

### 3. Вычислительный эксперимент

Оценки (9)-(11) даны для различных моментов времени  $t > 0$ , поэтому для того, чтобы понять, как ведёт себя неравенство (10) с течением времени, необходимо провести вычислительный эксперимент.

Положим  $n = 2$ ,  $a_1 = -2$ ,  $b_1 = -1$ ,  $a_2 = -0.5$ ,  $b_2 = 3$ ,  $U_i(x) = \theta(x - a_i) - \theta(x - b_i)$  ( $i = 1, 2$ ;  $\theta(x)$  — функция Хевисайда),  $c_1 = 3$ ,  $c_2 = 1$ , и сформируем по формуле (3) по этим данным начальное условие к задаче Коши (1). График этой функции приведён на рис. 1.

Далее, выберем  $p_1^+ = p_2^+ = 2$  и  $p_1^- = p_2^- = 0.5$ . Графики оценок решения задачи Коши (1), построенные по формулам (11), приведены на рис. 2-5.

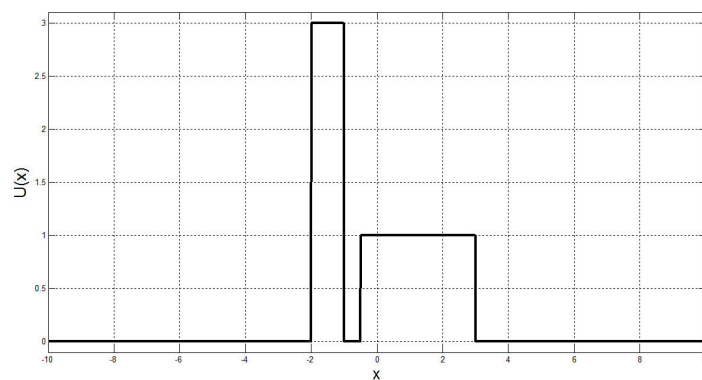


Рис. 1. График начального условия

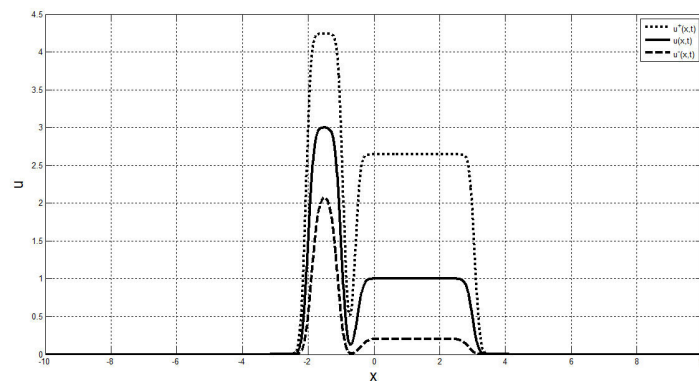


Рис. 2. Графики оценок решения при  $t = 0.01$

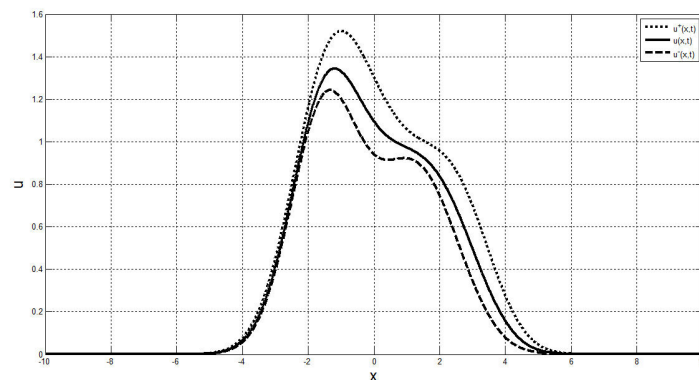
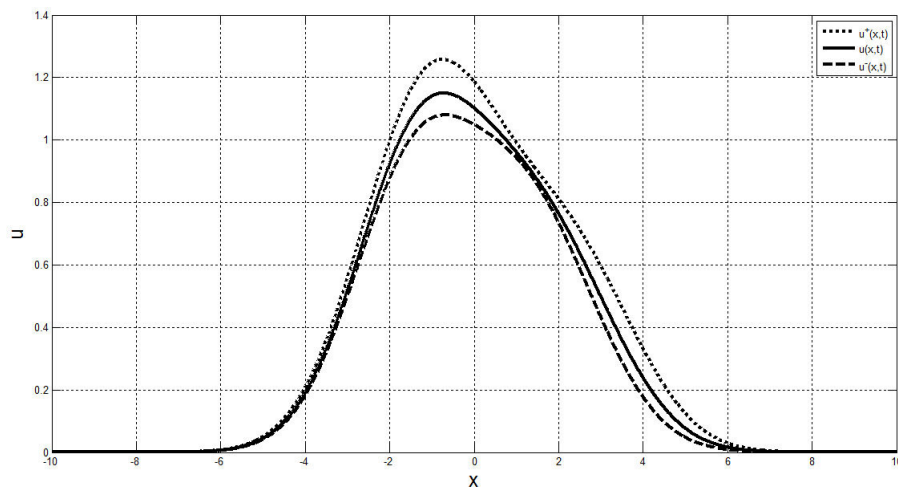
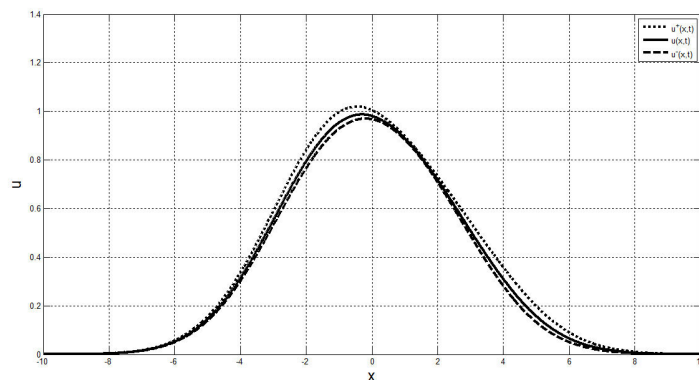


Рис. 3. Графики оценок решения при  $t = 0.5$



**Рис. 4.** Графики оценок решения при  $t = 1.0$



**Рис. 5.** Графики оценок решения при  $t = 2.0$

На рис. 2-5 сплошной линией показано точное решение задачи Коши (1), соответствующее начальному условию, график которого приведён на рис. 1. Это точное решение равно:

$$u(x, t) = \frac{3}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{x+2}{2\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x+1}{2\sqrt{t}} \right) \right] - \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{x+1/2}{2\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x-4}{2\sqrt{t}} \right) \right]. \quad (12)$$

Из рис. 2-5 видно, что с течением времени верхняя и нижняя оценки точного решения (12) неограниченно сближаются друг с другом, следовательно, при заданной относительной погрешности приближения  $\delta$  существует такое значение времени  $t_*$ , что при  $t > t_*$ :

$$\max_{x \in \mathbb{R}} \frac{u^+(x, t) - u^-(x, t)}{u^-(x, t)} < \delta. \quad (13)$$

Другими словами, формула (13) означает, что при  $t > t_*$  вместо точного решения (12) можно пользоваться любой из его оценок (11).

## 4. Заключение

Для начального условия вида (3) в работе получены двусторонние оценки (11) точного решения (2) задачи Коши (1). Для построения этих оценок существенны величины интегрального характера (6) и значения координат левых  $a_i$  и правых  $b_i$  концов носителей функций  $U_i(x)$ , но не вся функция (3) в целом.

В результате вычислительного эксперимента выяснено, что при возрастании времени эти оценки стремятся друг к другу в каждой точке  $x \in \mathbb{R}$ , значит, на больших временах для достижения инженерной точности вместо интеграла Пуассона (2) можно брать любую из оценок (11).

Перспективой развития данной работы является создание вычислительного комплекса в системе компьютерной математики MATLAB с пользовательским интерфейсом, написанным в среде GUIDE [4], на основе развитой выше теории. Кроме того, представляет значительный интерес минимизация функции относительной погрешности приближения (13) по параметрам  $p_i^\pm$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) в области применимости прямого и обратного неравенств Гёльдера при фиксированном значении времени  $t > 0$  как задача многомерной оптимизации (см. [4] и ссылки там).

Двусторонние оценки (11) могут быть применены к оценке решений задач Коши для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, сводящихся к задаче Коши (1) заменой переменных, реализующейся строго монотонной функцией.

Например, рост приведённой высоты поверхности твёрдого тела с цилиндрической образующей  $h(x, t)$  описывается одномерным уравнением Кардара-Паризи-Жанга (см. [5] и ссылки там):

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}. \quad (14)$$

Заменой в виде монотонно возрастающей функции  $h = 2 \ln(1 + u)$  уравнение (14) сводится к одномерному уравнению диффузии-теплопроводности (1).

Наконец, полезно распространить полученные результаты на многомерное уравнение теплопроводности. Однако в этом случае аналоги функций (9) будут гораздо более разнообразными из-за того, что компактные носители функций  $U_i$  будут замкнутыми областями в пространствах  $\mathbb{R}^m$  с  $m \geq 2$ .

## Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
2. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1975. 320 с.
3. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 336 с.
4. Кетков Ю.Л., Кетков А.Ю., Шульц М.М. MATLAB 6.x: программирование численных методов. СПб.: БХВ-Петербург, 2004. 672 с.
5. Rassadin A.E., Sazanova T.S., Stepanov A.V., Fomin L.A. Some notes about scanning probe microscopy, nanoengineering and methods of quantum mechanics // IOP Conference Series: Material Science and Engineering (MSE). 2018. Vol.443.

Article 012027. URL:

<http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/443/1/012027>

MSC 35K05

## Double-sided bounds for solution of one-dimensional heat equation

A.E. Rassadin

HSE University

*Abstract:* In the article, to solve the Cauchy problem on a straight line for a linear diffusion-thermal conductivity equation with initial conditions of a special type, estimates of this solution are obtained from below and from above. Using a numerical test, it is shown that after a certain period of time, any of these estimates can be taken as an approximate solution of this problem.

*Keywords:* Poisson integral, direct and reverse Hölder inequalities, error function, compact support, Heaviside step function, relative error.

### References

1. Tihonov A.N., Samarskii A.A. Equations of mathematical physics, Nauka Publ., Moscow, 1966. 724 p.
2. Ventsel A.D. Course of theory of random processes, Nauka Publ., Moscow, 1975. 320 p.
3. Sobolev S.L. Some applications of functional analysis in mathematical physics, Nauka Publ., Moscow, 1988. 336 p.
4. Ketkov Yu.L., Ketkov A.Yu., Shultz M.M. MATLAB 6.x: programming numerical methods, BHV-Peterburg, Saint-Petersburg, 2004. 672 p.
5. Rassadin A.E., Sazanova T.S., Stepanov A.V., Fomin L.A. Some notes about scanning probe microscopy, nanoengineering and methods of quantum mechanics, *IOP Conference Series: Material Science and Engineering (MSE)*, 2018. Vol.443. Article 012027.  
URL: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/443/1/012027>