УДК 519.635.1

Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния тонкой изотропной пластины

Попов В.Н., Гермидер О.В.

Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова

Аннотация: Предложена и реализована новая модификация метода коллокации для построения решения неоднородного бигармонического уравнения в рамках моделирования напряженно-деформированного состояния тонкой изотропной пластины. Предложенная модификация основывается на полиномиальной аппроксимации Чебышева смешанной частной производной искомой функции. В качестве базисных функций использованы многочлены Чебышева первого рода. Предложенный метод применен для моделирования изгиба упругой изотропной пластины, находящейся под действием поперечной нагрузки. Проведен анализ результатов, полученных методом коллокации с применением интегрального подхода и в его отсутствии при использовании нулей многочленов Чебышева первого рода в качестве точек коллокации.

Ключевые слова: многочлены Чебышева первого рода, метод коллокации, изотропная пластина, напряженно-деформированное состояние

1. Введение

Многие конструктивные элементы представляют собой пластины различной формы и структуры с переменными геометрическими и физико-механическими параметрами [1]. При описании напряженно-деформированного состояния этих пластин возникает необходимость решения неоднородного бигармонического уравнения [1–8]. Построение решения этого уравнения вызывает ряд трудностей, оказывающих существенное влияние на обусловленность краевых задач в механике деформируемого твердого тела и теории упругости и связанных, в частности, порядком уравнения в частных производных [8]. При этом достижение требуемой степени детализации области интегрирования предполагает решение систем линейных уравнений очень высокого порядка с неразреженной матрицей [7]. Одним из перспективных подходов к решению проблемы является развитие методов полиномиальной аппроксимации.

Представленная работа посвящена построению решения неоднородного бигармонического уравнения с использованием системы ортогональных многочленов Чебышева первого рода в рамках моделирования напряженно-деформированного состояния тонкой изотропной пластины. Выбор в качестве базисных функций многочленов Чебышева обусловлен тем, что такое приближение минимизирует количество членов усеченного ряда, необходимых для аппроксимации решения [9,10]. В представленной работе предложена и реализована новая модификация метода коллокации на основе аппроксимации смешанной производной искомой функции с использованием многочленов Чебышева и выбора в качестве точек коллокации нулей этих многочленов.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу моделирования напряженно-деформированного состояния изотропной пластины, защемленной по краям $x = 0$, $x = d_1$ и $y = 0$ и свободной на крае $y = d_2$, которая находится под действием поперечной нагрузки $q(x, y)$. Предполагаем, что пластина является тонкой. Для описания изгиба ее срединной поверхности $\omega(x, y)$ используем бигармоническое уравнение Софи Жермен–Лагранжа, которое запишем в виде [11]:

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \tag{1}$$

где $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость пластины, h – толщина пластины, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона изотропного материала пластины.

3. Построение решения краевой задачи

Для построения решения краевой задачи представляем смешанную производную функции $\omega(x, y)$ в виде усеченного ряда по полиномам Чебышева первого рода [9]

$$\{T_{j_i}(x_i) = \cos(j_i \arccos x_i),\ j_i = \overline{0, n_i}\} \tag{2}$$

по каждой введенной новой переменной $x_i \in [-1,\, 1]$ $(n_i \in \mathbb{N},\ i = 1, 2)$:

$$x_1 = \frac{2}{d_1}x - 1,\ x_2 = \frac{2}{d_2}y - 1. \tag{3}$$

Записываем уравнение (1) в новых переменых x_1 и x_2. Последовательно интегрируя по переменным x_1 и x_2 конечную сумму ряда по полиномам Чебышева смешанной производной функции $\omega(x, y)$, восстанавливаем искомую функцию $\omega(x, y)$ методом коллокации с использованием нулей многочленов Чебышева первого рода $T_{n_i+1}(x_i)$ [9] в качестве точек коллокации

$$x_{i,j_i} = \cos\left(\frac{\pi(2n_i - 2j_i + 1)}{2(n_i + 1)}\right), \quad j_i = \overline{0, n_i},\ i = 1, 2. \tag{4}$$

Уравнения коллокации при этом представляем в матричной форме. Для приведения матрицы системы линейных алгебраических уравнений к разреженной и уменьшения числа вычислений при ее заполнении применяем свойство конечных сумм многочленов Чебышева в точках (4) [9]:

$$\sum_{j_i=0}^{n_i} T_{l_i}(x_{i,j_i}) T_{q_i}(x_{i,j_i}) = \gamma_{l_i} \delta_{l_i,q_i},\ i = 1, 2,$$

где δ_{l_i,q_i} – символ Кронекера, коэффициент $\gamma_{l_i} = \dfrac{1}{2}$, если $l_i = 0$, иначе $\gamma_{l_i} = 1$. При проведении вычислений используем значения физических параметров из [1, 2]: $d_1 = d_2 = 10$ м, $h = 0.1$ м, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0.28$.

4. Заключение

В работе получено решение задачи моделирования напряженно-деформированного состояния тонкой изотропной пластины под действием заданной поперечной нагрузки для случая защемления краев этой ластины и свободного края методом коллокации в матричной нотации с использованием предложенного и реализованного интегрального подхода. Для верификации полученных результатов проведен ряд вычислительных экспериментов при различных видах закрепления, способах нагружения и относительных размерах изотропной пластины.

Литература

1. Голушко С.К., Идимешев С.В., Шапеев В.П. Метод коллокаций и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин // Вычисл. технологии. 2013. Т.18. № 6. С. 31-43.

2. Belyaev V.A., Bryndin L.S., Golushko S.K., Semisalov B.V., Shapeev V.P. H-, p-, and HP-versions of the least-squares collocation method for solving boundary value problems for biharmonic equation in irregular domains and their applications // Comput. Math. Math. Phys. 2022. V.62. No.4. P. 517-537.

3. Mai-Duy N., Strunin D., Karunasena W. A new high-order nine-point stencil, based on integrated-RBF approximations, for the first biharmonic equation // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2022. V.143. P. 687-699.

4. Shao W., Wu X. An effective Chebyshev tau meshless domain decomposition method based on the integration-differentiation for solving fourth order equations // Appl. Math. Model. 2015. V.39. No.9. P. 2554-2569.

5. Ye X., Zhang Sh. A family of H-div-div mixed triangular finite elements for the biharmonic equation // Results in Applied Mathematics. 2022. V.15. 100318.

6. Карчевский А.Л. Вычисление напряжений в угольном пласте с учетом диффузии газа // Сиб. журн. индустр. математики. 2016. Т.19. № 4. С. 31-43.

7. Ряжских В.И., Слюсарев М.И., Попов М.И. Численное интегрирование бигармонического уравнения в квадратной области // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. 2013. Т.1. С. 52-62.

8. Шапеев В.П., Брындин Л.С., Беляев В.А. Hp-Вариант метода коллокации и наименьших квадратов с интегральными коллокациями решения бигармонического уравнения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т.26. № 3. С. 556-572.

9. Mason J., Handscomb D. Chebyshev polynomials. Florida: CRC Press. 2003.

10. Baseri A., Abbasbandy S., Babolian E. A collocation method for fractional diffusion equation in a long time with Chebyshev functions // Applied Mathematics and Computation. 2018. V.322. P. 55-65.

11. Timoshenko S., Woinowsky–Krieger S. Theory of Plates and Shells. New York: McGraw-Hill Book Comp. 1959.

MSC 65D40, 31A30

Mathematical modeling of the stress-strain state of a thin isotropic plate

V.N. Popov, O.V. Germider

Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov

Abstract: A new modification of the collocation method is proposed and implemented for constructing a solution to an inhomogeneous biharmonic equation in the framework of modeling the stress-strain state of a thin isotropic plate. The proposed modification is based on the Chebyshev polynomial approximation of the mixed partial derivative of the desired function. Chebyshev polynomials of the first kind are used as basis functions. The proposed method is used to simulate the bending of an elastic isotropic plate under the action of a transverse load. An analysis is made of the results obtained by the collocation method using the integral approach and in its absence when using the zeros of Chebyshev polynomials of the first kind as collocation points.

Keywords: Chebyshev polynomials of the first kind, collocation method, isotropic plate, stress-strain state.

References

1. Golushko S.K., Idimeshev S.V., Shapeev V.P. The method of collocations and least residuals in applications to problems in the mechanics of isotropic plates // Vychisl. technologies. 2013. V.18. No.6. P. 31-43.

2. Belyaev V.A., Bryndin L.S., Golushko S.K., Semisalov B.V., Shapeev V.P. H-, p-, and HP-versions of the least-squares collocation method for solving boundary value problems for biharmonic equation in irregular domains and their applications // Comput. Math. Math. Phys. 2022. V.62. No.4. P. 517-537.

3. Mai-Duy N., Strunin D., Karunasena W. A new high-order nine-point stencil, based on integrated-RBF approximations, for the first biharmonic equation // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2022. V.143. P. 687-699.

4. Shao W., Wu X. An effective Chebyshev tau meshless domain decomposition method based on the integration-differentiation for solving fourth order equations // Appl. Math. Model. 2015. V.39. No.9. P. 2554-2569.

5. Ye X., Zhang Sh. A family of H-div-div mixed triangular finite elements for the biharmonic equation // Results in Applied Mathematics. 2022. V.15. 100318.

6. Karchevskiy A.L. Vychislenie napryazheniy v ugolnom plaste s uchetom diffuzii gaza // Sib. zhurn. industr. matematiki. 2016. T.19. No.4. P. 31-43.

7. Ryazhskih V.I., Slyusarev M.I., Popov M.I. Chislennoe integrirovanie bigarmonicheskogo uravneniya v kvadratnoy oblasti // Vestn. S.- Peterburg. un-ta. Ser. 10. Prikl. matem. Inform. Proc. upr. 2013. T. 1. P. 52-62.

8. Shapeev V.P., Bryndin L.S., Belyaev V.A. Hp-Variant metoda kollokacii i naimenshih kvadratov s integralnymi kollokaciyami resheniya bigarmonicheskogo

uravneniya // Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.- mat. nauki. 2022. T.26. No.3. P. 556-572.

9. Mason J., Handscomb D. Chebyshev polynomials. Florida: CRC Press. 2003.

10. Baseri A., Abbasbandy S., Babolian E. A collocation method for fractional diffusion equation in a long time with Chebyshev functions // Applied Mathematics and Computation. 2018. V.322. P. 55-65.

11. Timoshenko S., Woinowsky–Krieger S. Theory of Plates and Shells. New York: McGraw-Hill Book Comp. 1959.