УДК 517.925

О возмущениях автономных систем ОДУ, сохраняющих некоторые свойства решений

Мусафиров Э.В.

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

Аннотация: Рассматривается неавтономное возмущение автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которое представляет собой правую часть автономной системы, умноженную на скалярную функцию, зависящую от времени. Доказано, что это возмущение сохраняет качественные свойства решений автономной системы, такие как наличие периодических решений и устойчивость решений по Ляпунову. Полученные теоремы позволяют определить вид возмущений, не влияющих на качественное поведение решений при моделировании реальных процессов.

Ключевые слова: отражающая функция Мироненко, периодическое решение, точка равновесия, равномерная асимптотическая устойчивость по Ляпунову, предельный цикл.

1. Введение

В качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений большое внимание уделяется вопросу о существовании, числе и местоположении периодических решений. Иногда на этот вопрос можно ответить, используя отражающую функцию Мироненко (ОФМ) [1–3].

При изучении качественного поведения решений некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений эта система может быть заменена эквивалентной в смысле совпадения ОФМ. Иногда это можно сделать, даже если ОФМ системы неизвестна (см., например, [4–6]). В частности, это можно сделать с помощью следующей теоремы [7].

Теорема 1. *Пусть $\alpha(t)$ — произвольная скалярная непрерывная нечетная функция, тогда любая автономная система*

$$\dot{x} = X(x), \quad t \in \mathbb{R},\ x \in D \subset \mathbb{R}^n \tag{1}$$

эквивалентна (в смысле совпадения ОФМ) неавтономной системе

$$\dot{x} = (1 + \alpha(t))\, X(x). \tag{2}$$

Теорема 1 является частным случаем теоремы 1 из [5], с помощью которой было получено много результатов, обладающих теоретической и практической значимостью.

Целью данного исследования является выяснение связи между свойствами решений систем (1) и (2), где $\alpha(t)$ — произвольная скалярная непрерывная функция (не обязательно нечетная). Отличительной особенностью является то, что мы не требуем, чтобы функция $\alpha(t)$ была нечетной, а это означает, что ОФМ систем (1) и (2) могут не совпадать.

2. Основной результат

Лемма 1. *Если* $\eta(t)$ *— решение системы* (1), *то* $\eta(t+\int\limits_0^t \alpha(s)ds)$ *— решение системы* (2), *где* $\alpha(t)$ *— произвольная скалярная непрерывная функция.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\eta(t)$ является решением системы (1), то $\dot\eta(t) = X(\eta(t))$. Дифференцируя $\eta(t+\int\limits_0^t \alpha(s)ds)$ по t, получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\eta(t+\int\limits_0^t \alpha(s)ds)\right) = (1+\alpha(t))\,\dot\eta(t+\int\limits_0^t \alpha(s)ds).$$

Отсюда, учитывая, что $\dot\eta(t) = X(\eta(t))$, следует

$$\frac{d}{dt}\left(\eta(t+\int\limits_0^t \alpha(s)ds)\right) = (1+\alpha(t))\,X(\eta(t+\int\limits_0^t \alpha(s)ds)).$$

Это означает, что $\eta(t+\int\limits_0^t \alpha(s)ds)$ является решением системы (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о   з а в е р ш е н о.

Теорема 2. *Пусть решение* $\eta(t)$ *системы* (1) *и непрерывная скалярная функция* $\alpha(t)$ ω*-периодичны. Если дополнительно* $\int\limits_0^\omega \alpha(s)ds = 0$, *то решение* $\eta(t+\int\limits_0^t \alpha(s)ds)$ *системы* (2) *является* ω*-периодическим (период* ω *не обязательно минимальный).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что по лемме 1, если $\eta(t)$ является решением системы (1), то $\eta(t+\int\limits_0^t \alpha(s)ds)$ является решением системы (2). Пусть $\alpha(t)$ — скалярная непрерывная ω-периодическая функция. Обозначим $A(t) = \int\limits_t^{t+k\omega} \alpha(s)ds$, где $k \in \mathbb{Z}$. Поскольку $\alpha(t)$ — непрерывная функция, то (по свойствам интеграла с переменным верхним пределом интегрирования) $A(t)$ — дифференцируемая функция и $\dot A(t) = \alpha(t+k\omega) - \alpha(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Так как функция $\alpha(t)$ является ω-периодической, то $\dot A(t) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$, т. е. $A(t) = \text{const}$ $\forall t \in \mathbb{R}$. В частности, $A(t) = A(0)$ $\forall t \in \mathbb{R}$, т. е.

$$\int\limits_t^{t+k\omega} \alpha(s)ds = \int\limits_0^{k\omega} \alpha(s)ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Пусть решение $\eta(t)$ системы (1) является ω-периодическим и $\int\limits_0^\omega \alpha(s)ds = 0$. Поскольку $\eta(t)$ является ω-периодической функцией, то

$$\eta(t+\omega+\int\limits_0^{t+\omega} \alpha(s)ds) = \eta(t+\int\limits_0^{t+\omega} \alpha(s)ds) = \eta(t+\int\limits_0^t \alpha(s)ds + \int\limits_t^{t+\omega} \alpha(s)ds).$$

Используя (3), мы имеем

$$\eta(t+\int\limits_0^t \alpha(s)ds+\int\limits_t^{t+\omega} \alpha(s)ds)=\eta(t+\int\limits_0^t \alpha(s)ds+\int\limits_0^{\omega} \alpha(s)ds)=\eta(t+\int\limits_0^t \alpha(s)ds),$$

т. е. $\eta(t+\omega+\int\limits_0^{t+\omega} \alpha(s)ds)=\eta(t+\int\limits_0^t \alpha(s)ds)$. В свою очередь это означает ω-периодичность функции $\eta(t+\int\limits_0^t \alpha(s)ds)$.

Доказательство завершено.

Замечание 6. *Если $\alpha(t)$ — скалярная непрерывная нечетная ω-периодическая функция, то $\int\limits_0^{\omega} \alpha(s)ds=0$. Следовательно, теорема 2 остается справедливой, если предположение $\int\limits_0^{\omega} \alpha(s)ds=0$ заменить предположением о нечетности $\alpha(t)$.*

Доказательство. Поскольку $\alpha(t)$ — скалярная непрерывная ω-периодическая функция, то выполняется тождество (3). Из тождества (3) для $t=-\omega$ и $k=1$ следует, что $\int\limits_{-\omega}^0 \alpha(s)ds=\int\limits_0^{\omega} \alpha(s)ds$. Поскольку $\alpha(t)$ нечетная функция, то $-\int\limits_{-\omega}^0 \alpha(s)ds=\int\limits_0^{\omega} \alpha(s)ds$ и, следовательно, $\int\limits_0^{\omega} \alpha(s)ds=0$.

Доказательство завершено.

Теорема 3. *Пусть $X(x)$ локально липшицева и $X(0)=0$. Кроме того, пусть $\alpha(t)$ — произвольная непрерывная скалярная функция такая, что*

$$\int\limits_0^t \alpha(s)ds\geq -t \quad \forall t\geq 0. \tag{4}$$

1. *Если точка равновесия $x=0$ системы (1) устойчива по Ляпунову, то точка равновесия $x=0$ системы (2) равномерно устойчива по Ляпунову.*
2. *Если $\int\limits_0^{+\infty} (\alpha(s)+1)\,ds=+\infty$ и точка равновесия $x=0$ системы (1) неустойчива по Ляпунову, то точка равновесия $x=0$ системы (2) неустойчива по Ляпунову.*
3. *Если $\int\limits_0^{+\infty} (\alpha(s)+1)\,ds=+\infty$ и точка равновесия $x=0$ системы (1) асимптотически устойчива по Ляпунову, то точка равновесия $x=0$ системы (2) равномерно асимптотически устойчива по Ляпунову.*

Доказательство. Пусть $X(0)=0$, тогда $x=0$ является точкой равновесия как системы (1), так и системы (2). Заметим, что по лемме 1, если $x(t)$ является решением системы (1), то $x(t+\int\limits_0^t \alpha(s)ds)$ является решением системы (2).

1) Пусть точка равновесия $x = 0$ системы (1) устойчива по Ляпунову, тогда по определению (см. [8, с. 112]): $\|x(0)\| < \delta_1 \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon_1 \; \forall t \geq 0$. По определению (см. [8, с. 149]) точка равновесия $x = 0$ системы (2) равномерно устойчива по Ляпунову, если $\forall \varepsilon_2 > 0 \; \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon_2) > 0$ такое, что если $\left\| x(t_0 + \int\limits_0^{t_0} \alpha(s)ds) \right\| < \delta_2 \Rightarrow \left\| x(t + \int\limits_0^{t} \alpha(s)ds) \right\| < \varepsilon_2 \; \forall t \geq t_0 \geq 0$. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$, условие $\forall t_0 \geq 0 \left\| x(t_0 + \int\limits_0^{t_0} \alpha(s)ds) \right\| < \delta$ подразумевает $\|x(0)\| < \delta \; \forall \delta > 0$. Отсюда по определению устойчивости по Ляпунову точки равновесия $x = 0$ системы (1) следует, что $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \; \forall t \geq t_0 \geq 0$ и так как (в силу (4)) $t + \int\limits_0^{t} \alpha(s)ds \geq 0 \; \forall t \geq 0$, то $\left\| x(t + \int\limits_0^{t} \alpha(s)ds) \right\| < \varepsilon \; \forall t \geq t_0 \geq 0$. Это (по определению) означает, что точка равновесия $x = 0$ системы (2) равномерно устойчива по Ляпунову.

2) Пусть точка равновесия $x = 0$ системы (1) неустойчива по Ляпунову, тогда по определению: $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $\forall \delta > 0 \; \|x(0)\| < \delta$, но $\exists t^* \geq 0$ такое, что $\|x(t^*)\| \geq \varepsilon$. Так как интеграл с переменным верхним пределом интегрирования $\int\limits_0^{t} (\alpha(s) + 1)\, ds$ непрерывен, $\int\limits_0^{0} (\alpha(s) + 1)\, ds = 0$ и $\int\limits_0^{+\infty} (\alpha(s) + 1)\, ds = +\infty$, то $\exists t_1 \geq 0$ такое, что $\int\limits_0^{t_1} (\alpha(s) + 1)\, ds = t^*$ и, следовательно, $\left\| x(t_1 + \int\limits_0^{t_1} \alpha(s)ds) \right\| \geq \varepsilon$. Это означает, что точка равновесия $x = 0$ системы (2) неустойчива по Ляпунову.

3) Пусть точка равновесия $x = 0$ системы (1) асимптотически устойчива по Ляпунову. По определению (см. [8, с. 112]) это означает, что точка равновесия $x = 0$ системы (1) устойчива по Ляпунову и $\exists \delta_1 > 0$ такое, что если $\|x(0)\| < \delta_1 \Rightarrow \lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$. По определению (см. [8, с. 150]) точка равновесия $x = 0$ системы (2) является равномерно асимптотически устойчивой по Ляпунову, если она равномерно устойчива по Ляпунову и $\exists \delta_2 > 0$, не зависящее от t_0, такое, что для всех $\left\| x(t_0 + \int\limits_0^{t_0} \alpha(s)ds) \right\| < \delta_2$ $\Rightarrow \lim\limits_{t \to \infty} x(t + \int\limits_0^{t} \alpha(s)ds) = 0$ равномерно по t_0. Равномерная устойчивость по Ляпунову точки равновесия $x = 0$ системы (2) следует из пункта 1) теоремы.

Из определения асимптотической устойчивости по Ляпунову точки равновесия $x = 0$ системы (1) следует, что $\exists \delta = \delta_1 > 0$ такое, что при $\left\| x(t_0 + \int\limits_0^{t_0} \alpha(s)ds) \right\| < \delta$ $\forall t_0 \geq 0 \Rightarrow \|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$, а так как по условию теоремы $\int\limits_0^{+\infty} (\alpha(s) + 1)\, ds = +\infty$, то $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t + \int\limits_0^{t} \alpha(s)ds) = 0$. Что, по определению, означает, что точка равновесия $x = 0$ системы (2) равномерно асимптотически устойчива по Ляпунову.

Доказательство завершено.

Замечание 7. *Условие* (4) *выполняется, если* $\alpha(t) \geq -1 \quad \forall t \geq 0$.

3. Примеры

Приведенные выше результаты могут быть использованы для изучения качественного поведения решений возмущенных систем.

Пример 1. *Рассмотрим систему [9, с. 138]*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x\left(1 - x^2 - y^2\right), \\ \dot{y} &= x + y\left(1 - x^2 - y^2\right), \quad t, x, y \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{5}$$

и возмущенную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left(1 + \cos\frac{t}{2}\right)\left(-y + x\left(1 - x^2 - y^2\right)\right), \\ \dot{y} &= \left(1 + \cos\frac{t}{2}\right)\left(x + y\left(1 - x^2 - y^2\right)\right), \quad t, x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6}$$

Согласно [9, с. 139], система (5) имеет (орбитально) устойчивый предельный цикл $x^2 + y^2 = 1$. Этот цикл соответствует 2π-периодическому (а значит, и 4π-периодическому) решению $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$ системы (5) с начальными условиями $(x(0), y(0)) = (1, 0)$. Поскольку функция $\alpha(t) = \cos\dfrac{t}{2}$ является 4π-периодической и $\int\limits_0^{4\pi} \alpha(s)ds = 0$, то из теоремы 2 следует, что система (6) имеет 4π-периодическое решение

$$(x(t), y(t)) = \left(\cos\left(t + 2\sin\frac{t}{2}\right), \sin\left(t + 2\sin\frac{t}{2}\right)\right),$$

что соответствует предельному циклу $x^2 + y^2 = 1$.

Пример 2. *Рассмотрим систему Лэнгфорда (см. [10, 11])*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (a-1)x - y + xz, \\ \dot{y} &= x + (a-1)y + yz, \\ \dot{z} &= az - (x^2 + y^2 + z^2), \quad a, t, x, y, z \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{7}$$

Система (7) имеет две точки равновесия $O_1(0, 0, 0)$, $O_2(0, 0, a)$ и очень богатое бифуркационное поведение. Наряду с системой (7) рассмотрим возмущенную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (1 + \alpha(t))\left((a-1)x - y + xz\right), \\ \dot{y} &= (1 + \alpha(t))\left(x + (a-1)y + yz\right), \\ \dot{z} &= (1 + \alpha(t))\left(az - (x^2 + y^2 + z^2)\right), \quad a, t,\ x,\ y, z \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\alpha(t)$ — скалярная непрерывная функция такая, что

$$\int\limits_0^t \alpha(s)ds \geq -t \ \forall t \geq 0 \text{ и } \int\limits_0^{+\infty} \left(\alpha(s) + 1\right) ds = +\infty.$$

Примером такой функции может быть $\alpha(t) = \cos t$. Согласно [11], для системы (7) точка равновесия $O_1(0,0,0)$ асимптотически устойчива по Ляпунову при $a < 0$ и неустойчива по Ляпунову при $a > 0$, а точка равновесия $O_2(0,0,a)$ асимптотически устойчива по Ляпунову при $0 < a < 1/2$ и неустойчива по Ляпунову при $a < 0$ или $a > 1/2$. Из теоремы 3 следует, что для возмущенной системы (8) точка равновесия $O_1(0,0,0)$ равномерно асимптотически устойчива по Ляпунову при $a < 0$ и неустойчива по Ляпунову при $a > 0$, а точка равновесия $O_2(0,0,a)$ равномерно асимптотически устойчива по Ляпунову при $0 < a < 1/2$ и неустойчива по Ляпунову при $a < 0$ или $a > 1/2$.

4. Заключение

Доказано, что неавтономное возмущение $\alpha(t)X(x)$ автономной системы (1) сохраняет качественные свойства решений автономной системы, такие как наличие периодических решений и устойчивость решений по Ляпунову. Эти результаты позволяют узнать, какое возмущение не повлияет на качественное поведение решений при моделировании реальных процессов.

Литература

1. Мироненко В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем. Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины. 2004. 196 с.

2. Мусафиров Э.В. О дифференциальных системах, отражающая матрица которых представляет собой произведение матричных экспонент. // Вести НАН Беларуси. Серия физико–математических наук. 2002. № 1. С. 44–50.

3. Мусафиров Э.В. Двумерные линейные дифференциальные системы с отражающей матрицей, представляющей собой произведение двух матричных экспонент // Вестник фонда фундаментальных исследований. 2006. № 4. С. 75–84.

4. Белокурский М.С., Деменчук А.К. Периодическая отражающая функция нелинейной квазипериодической дифференциальной системы с двухчастотным базисом // Дифференциальные уравнения. 2013. Т.49. № 10. 1356 с.

5. Mironenko V.I., Mironenko V.V. How to construct equivalent differential systems // Applied Mathematics Letters. 2009. Vol.22. No.9. P. 1356-1359.

6. Чжоу Чж. О периодических решениях рациональных дифференциальных уравнений // Проблемы физики, математики и техники. 2014. №.1(18). С. 81-84.

7. Мусафиров Э.В. Временные симметрии дифференциальных систем. Пинск : ПолесГУ. 2009. 191 с.

8. Khalil H.K. Nonlinear Systems. Pearson Education. Upper Saddle River, New Jersey : Prentice Hall. 2002. 750 p.

9. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. М.: Наука. 1987. 160 с.

10. Musafirov E.V. Perturbations of the Lanford system which do not change the reflecting function // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2017. Vol.27. No.0. P. 1750154–1–5.

11. Guo G., Wang X., Lin X., Wei M. Steady-state and Hopf bifurcations in the Langford ODE and PDE systems // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2017. Vol.34. P. 343–362.

MSC 34D10

On perturbations of autonomous ODE systems preserving some properties of solutions

E.V. Musafirov

Yanka Kupala State University of Grodno

Abstract: A non-autonomous perturbation of an autonomous system of ordinary differential equations is considered, which is the right part of an autonomous system multiplied by a scalar function depending on time. It is proved that this perturbation preserves the qualitative properties of solutions of an autonomous system, such as the presence of periodic solutions and the Lyapunov stability of solutions. These results allow us to find out which perturbation will not affect the qualitative behavior of solutions when modeling real processes.

Keywords: Mironenko reflecting function, periodic solution, equilibrium point, uniform asymptotic Lyapunov stability, limit cycle.

References

1. Mironenko V.I. Reflecting function and investigation of multivariate differential systems. Gomel : Gomel University Press. 2004. 196 p. (in Russian).
2. Musafirov E.V. On the systems with a reflective matrix representing by product of exponential matrix // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and mathematics series. 2002. No.1. P. 44–50.
3. Musafirov E.V. Bidimentional linear differential systems with the reflective matrix represented as a product of two exponential matrices // Vestnik of the Foundation for Fundamental Research. 2006. No.4. P. 75–84.
4. Belokurskii M.S., Demenchuk A.K. Periodic reflecting function of a nonlinear quasiperiodic differential system with a two-frequency basis // Differential Equations. 2013. Vol.49. No.10. P. 1323-1327.
5. Mironenko V.I., Mironenko V.V. How to construct equivalent differential systems // Applied Mathematics Letters. 2009. Vol.22. No.9. P. 1356-1359.
6. Zhou Zh. On the periodic solutions of the rational differential equations // Problems of Physics, Mathematics and Technics. 2014. No.1(18). P. 81-84 (in Russian).
7. Musafirov E.V. Time symmetries of differential systems. Pinsk : PolesSU. 2009. 191 p. (in Russian).
8. Khalil H.K. Nonlinear systems. Pearson Education. Upper Saddle River, New Jersey : Prentice Hall. 2002. P. 750.
9. Amel'kin V.V. Differential equations in applications. Moscow : Mir. 1990. Vol.21. 286 p.

10. Musafirov E.V. Perturbations of the Lanford system which do not change the reflecting function // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2017. Vol.27. No.10. P. 1750154–1–5.

11. Guo G., Wang X., Lin X., Wei M. Steady-state and Hopf bifurcations in the Langford ODE and PDE systems // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2017. Vol.34. P. 343–362.