УДК 517.977.56, 519.71

Оптимизация двумерных процессов нагрева с учетом фазовых ограничений

Морозкин Н.Д., Ткачев В.И., Морозкин Ю.Н.

Уфимский университет науки и технологий

Аннотация: Исследуются задачи оптимального по быстродействию управления процессами внешнего нагрева призмы прямоугольного сечения и цилиндра конечной длины при ограничениях на наибольшую температуру и на термонапряжения. Учитываются зависимости пределов прочности на сжатие и растяжение от температуры, которые аппроксимируются выпуклыми функциями. Исходная бесконечномерная задача аппроксимируется конечномерной задачей оптимального быстродействия с выпуклыми фазовыми ограничениями. Выписаны оценки погрешности аппроксимаций по состоянию в пространстве . В случае отсутствия ограничений на термонапряжения, показана сходимость конечномерных приближений по функционалу быстродействия и слабая сходимость последовательности управлений к оптимальному управлению.

Ключевые слова: оптимальный нагрев, термонапряжения, быстродействие, прямоугольная призма, цилиндр конечной длины.

1. Введение

В настоящее время в промышленности все больше используются материалы, прочностные характеристики которых претерпевают в процессе нагрева значительные изменения. Так, например, у сплава ЖС6У предел прочности на сжатие в диапазоне температур от 20 до 1000 градусов Цельсия уменьшается почти в пять раз, а предел прочности на растяжение более пяти раз.

В научной литературе при исследовании подобных задач, как правило, не учитывают зависимости пределов прочности на сжатие и растяжение от температуры. Если же эти зависимости учитываются, то задача решается с применением метода конечных элементов и сводится к достаточно сложной и трудоемкой задаче нелинейного программирования [1,2].

В настоящей работе задача оптимального нагрева бесконечной призмы прямоугольного сечения и цилиндра конечной длины с учетом ограничений на термонапряжения и наибольшую температуру аппроксимируется конечномерной задачей оптимального управления, а зависимости прочностных характеристик от температуры аппроксимируются выпуклыми функциями. Для решения полученной конечномерной задачи оптимального быстродействия с выпуклыми фазовыми ограничениями предлагается использовать метод, типа метода поворота опорной гиперплоскости, который был разработан одним из авторов и апробирован на задаче оптимального одномерного нагрева [3].

При этом решение тепловой задачи с помощью метода интегральных преобразований выписывается в виде ряда с неизвестными коэффициентами, определяемыми из решения линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Задача термоупругости рассматривается в квазистатической постановке [4] и ее решение выписывается также в виде ряда, коэффициенты которой являются решениями бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

2. Постановка задачи

Для удобства уравнения, описывающие процесс нагрева и ограничения на максимальную температуру, запишем в безразмерных единицах. Тогда процесс осесимметричного нагрева бесконечной призмы прямоугольного сечения или цилиндра конечной длины внешними тепловыми источниками описывается следующими уравнениями

$$\frac{\partial \theta(\rho,l,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta(\rho,l,\tau)}{\partial \rho^2} + \frac{q}{\rho}\frac{\partial \theta(\rho,l,\tau)}{\partial \rho} + h_*^2 \frac{\partial^2 \theta(\rho,l,\tau)}{\partial l^2} \tag{1}$$

$$0 < \rho < 1,\ 0 < l < 1,\ 0 < \tau \le T,$$

$$\theta(\rho,l,0) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \theta(1,l,\tau)}{\partial \rho} = Bi_1 \left(u_1(\tau) - \theta(1,l,\tau)\right), \tag{3}$$

$$\rho^q \frac{\partial \theta(\rho,l,\tau)}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=0} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \theta(\rho,1,\tau)}{\partial l} = Bi_2 \left(u_2(\tau) - \theta(\rho,1,\tau)\right), \tag{5}$$

$$\frac{\partial \theta(\rho,0,\tau)}{\partial l} = 0. \tag{6}$$

Здесь $q = 0$ в случае нагрева призмы и $q = 1$ в случае нагрева цилиндра конечной длины, $u(\tau) = (u_1(\tau), u_2(\tau)) \in L_2^2[0,T]$ – безразмерное управление (температура греющей среды) и почти при всех $\tau \in [0,T]$

$$u_i^- \le u_i(\tau) \le u_i^+,\ i = 1,2 \tag{7}$$

Множество таких управлений обозначим через U. Предполагается, что все теплофизические коэффициенты постоянны, а переход к безразмерным единицам осуществлялся аналогично [5].

В процессе нагрева требуется, чтобы нагреваемое тело не получало бы необратимые деформации. Будем предполагать, что нагреваемое тело разрушается хрупко, без скольких-нибудь заметных деформаций. Тогда, согласно первой классической теории прочности [6], в течении всего процесса нагрева должны быть выполнены неравенства

$$-\sigma_c(\theta) \le \sigma_i(\rho,l,\theta) \le \sigma_p(\theta), \tag{8}$$

где $\sigma_p(\theta)$, $\sigma_c(\theta)$ – пределы прочности на сжатие и растяжение (мПа), $\sigma_i(\rho,l,\theta)$ – нормальные компоненты тензора напряжений (мПа). В случае призмы $i = \rho, l$; в случае цилиндра $i = \rho, \varphi, l$.

Кроме выполнения неравенств (8) потребуем также выполнения ограничений на максимальную температуру в теле.

В условиях рассматриваемой задачи из физических соображений ясно, что при нагреве внешними тепловыми источниками, наиболее нагретыми оказываются точки, расположенные на поверхности. Поэтому в дальнейшем ограничения на максимальную температуру будем учитывать в виде

$$\theta(1,0,\tau) \le \overline{\theta},\ \theta(1,1,\tau) \le \overline{\theta},\ \theta(0,1,\tau) \le \overline{\theta}. \tag{9}$$

Задача 1. *Найти управление $u^0(\tau) \in U$, $\tau \in [0, \tau^0]$, позволяющее за минимальное время $\tau^0 \in (0, T]$ довести температуру $\theta(\rho, l, \tau)$ нагреваемого тела до заданной $\tilde{\theta}(\rho, l)$ с фиксированной точностью*

$$\int_0^1 \int_0^1 \rho^q \Big[\theta\left(\rho, l, \tau^0\right) - \tilde{\theta}(\rho, l)\Big]^2 \, dl \, d\rho \le \varepsilon \tag{10}$$

так, чтобы при всех $\tau \in [0, \tau^0]$ были бы выполнены неравенства (8), (9), где $\varepsilon \ge 0$, – заданная точность.

3. Применение метода интегральных преобразований для расчета тепловых полей

Используя конечные интегральные преобразования Фурье-Ханкеля по координатам l и ρ, можно получить эквивалентное представление объекта управления бесконечной системой дифференциальных уравнений для коэффициентов x_n разложения $\theta(\rho, l, \tau)$ в кратный ряд Фурье по собственным функциям тепловой задачи. По координате l применяется конечное косинус-преобразование Фурье, т. е. преобразование [7]

$$[\theta(\rho, l, \tau)]_F = \theta_F(\alpha, l, \tau) = \int_0^1 \theta(\rho, l, \tau) \cos(\alpha\rho) \, d\rho.$$

По координате ρ при $q = 0$ применяется конечное косинус-преобразование Фурье, при $q = 1$ – конечное интегральное преобразование Ханкеля

$$[\theta(\rho, l, \tau)]_H = \theta_H(\alpha, l, \tau) = \int_0^1 \rho\theta(\rho, l, \tau) J_0(\alpha\rho) \, d\rho.$$

В результате применения этих интегральных преобразований к уравнениям (1)–(6), решение этих уравнений можно записать в виде следующего ряда

$$\theta(\rho, l, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} D_{ij} x_{ij} K(\alpha_i \rho) \cos(\beta_i l), \tag{11}$$

$$C_{ij} = \frac{1}{\|K(\alpha_i\rho)\|^2 \|\cos(\beta_j l)\|^2} \tag{12}$$

$$D_{ij} = K_1(\alpha_i) \sin(\beta_j),$$

$$\frac{dx_{ij}}{d\tau} = -\left(\alpha_i^2 + h_*^2 \beta_j^2\right) x_{ij}(\tau) + \frac{\alpha_i}{\beta_j} u_1(\tau) + h_*^2 \frac{\beta_j}{\alpha_i} u_2(\tau) \tag{13}$$

$$x_{ij}(0) = 0, \ i, j = 1, 2, 3, ... \tag{14}$$

Здесь $\|K(\alpha_i\rho)\|^2$, $\|\cos(\beta_j l)\|^2$ определяются по формулам

$$\|K(a_i\rho)\|^2 = \int_0^1 \rho^q K^2(\alpha_i\rho) \, d\rho = \frac{\alpha_i^2 + Bi_1^2 + (1-q) Bi_1}{2Bi_1^2} K_1^2(\alpha_i) \tag{15}$$

$$\left\|\cos\left(\beta_j\right)\right\|^2 = \int\limits_0^1 \cos^2\left(\beta_j l\right) dl = \frac{\sin^2\beta_j\left[\beta_j^2 + \beta_2^2 + Bi_2\right]}{2Bi_2^2}. \tag{16}$$

$$K\left(\alpha\rho\right)\big|_{q=0} = \cos\left(\alpha\rho\right), \;\; K_1\left(\alpha\right)\big|_{q=0} = \sin\left(\alpha\right),$$

$$K\left(\alpha\rho\right)\big|_{q=1} = J_0\left(\alpha\rho\right), \;\; K_1\left(\alpha\right)\big|_{q=1} = J_1\left(\alpha\right),$$

Параметр α выберем так, чтобы он являлся корнем уравнения

$$\alpha K_1\left(\alpha\right) - Bi_1 K\left(\alpha\right) = 0, \tag{17}$$

а параметр β – решением уравнения

$$\beta\sin\left(\beta\right) - Bi_2\cos\left(\beta\right) = 0. \tag{18}$$

4. Конечномерная аппроксимация

Формулы для вычисления термонапряжений выписываются в виде бесконечных рядов, коэффициенты которых находятся из решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений [4, 7].

Ограничившись в соотношении (11) и в формулах для вычисления термонапряжений рассмотрением первых $N \times N$ членов ряда, а в системе (13) первыми N дифференциальными уравнениями исходной бесконечномерной задаче можно поставить в соответствие следующую конечномерную задачу оптимального управления.

Задача 2. *Найти управление $\overline{u} = \left(\overline{u_1}, \overline{u_2}\right) \in U$, переводящее систему*

$$\frac{dx_{ij}\left(\tau\right)}{d\tau} = -\left(\alpha_i^2 + h_*^2\beta_j^2\right)x_{ij}\left(\tau\right) + \frac{\alpha_i}{\beta_j}u_1\left(\tau\right) + h_*^2\frac{\beta_j}{\alpha_i}u_2\left(\tau\right), \; i, j = \overline{1, N},$$

за минимальное время τ^0 из нулевого начального положения в множество

$$\sum_{i,j=1}^{N} C_{ij}\left(D_{ij}x_{ij} - b_{ij}^*\right)^2 \le \varepsilon,$$

так, чтобы для всех $\tau \in \left[0, \tau^0\right]$ были бы выполнены ограничения (8), (9).

Для решения задачи 2 можно использовать модифицированный алгоритм поворота опорной гиперплоскости, изложенный в работе [3].

Можно показать, что в норме пространства $L_2\left(Q_T\right)$ справедлива следующая оценка погрешности аппроксимации по состоянию

$$\left\|\gamma\right\|_{L_2\left(Q_T\right)} \le \frac{2Bi_1Bi_2GT^{1/2}}{\pi^2}\left(\frac{1}{\alpha_1^4} + \frac{1}{\beta_1^4} + \frac{1}{45}\right)^{\dfrac{1}{2}}\left(\frac{\pi^4}{90} - \sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n^4}\right)^{\dfrac{1}{2}},$$

где α_1, β_1 – первые положительные корни уравнений (17), (18),

$$\gamma\left(\rho, l, \tau\right) = \theta\left(\rho, l, \tau\right) - \theta_N\left(\rho, l, \tau\right),$$

$$G = \max\left\{u_1^+, u_2^+\right\}.$$

В случае отсутствия ограничений на термонапряжения при выполнении условий

$$2u_1^-\left(1 + \exp\left(-0.5\right)\right) - u_1^+\left(1 + 2\exp\left(-0.5\right)\right) > 0, \tag{19}$$

$$2u_2^-\left(1 + \exp\left(-0.5\right)\right) - u_2^+\left(1 + 2\exp\left(-0.5\right)\right) > 0,$$

Теорема 1. *Предположим, что задача оптимального по быстродействию управления внешним нагревом с учетом ограничений (9) имеет решение. Тогда при выполнении условий (19) существует последовательность номеров N_p, $p = 1, 2, ...$, такая, что при любом $N = N_p$, $p \geq 1$, решение конечномерной задачи существует и справедливы утверждения*

а) $0 < \tau^{N_1} \leq \tau^{N_2} \leq ... \leq \tau^0$,

б) $\lim\limits_{p\to\infty} \tau^{N_p} = \tau^0$,

в) предел любой слабосходящейся в $L_2^2\left[0, \tau^0\right]$ *(τ^0 – время быстродействия) подпоследовательности из* $\left\{u^{N_p}\left(\tau\right)\right\}$ *является оптимальным управлением.*

Литература

1. Hitzschke R.P., Schulse D. Berechnung van Zeltplansteuerun-gen fur Induktive Erwarmungsprozesse //Elektrowarme International 48 (1990) B4 Oktober. P. 192-198.

2. Бикбулатова Г.С. Оптимальное управление процессом нагрева призмы с учетом ограничений на термонапряжения и наибольшую температуру. Диссертация на соискание ученой степени к.ф.-м.н.Уфа, 1996. 118 с.

3. Голичев И.И., Дульцев А.В., Морозкин Н.Д. Об одном итерационном методе решения задачи оптимального нелинейного нагрева с фазовыми ограничениями// Журнал вычислительной математики и математической физики, 2000. Т.40, №11. С. 1615-1632.

4. Мотовиловец И.А., Козлов В.И. Термоупругость. Киев: Наукова Думка, 1987. 264 с.

5. Морозкин Н.Д. Оптимальное управление процессами нагрева с учетом фазовых ограничений. Учебное пособие, Уфа, 1997. 114 с.

6. Филоненко-Бородич М.И. Механические теории прочности. М.: МТУ, 1961. 92 с.

7. Козлов В.П. Двумерные осесимметричные нестационарные задачи теплопроводности. Минск: Наука и техника, 1986. 392 с.

MSC 34D20

Optimization of two-dimensional heating processes taking into account phase limitations

N.D. Morozkin, V.I. Tkachev, Y.N. Morozkin
Ufa University of Science and Technology

Abstract: The problems of time-optimal control of the processes of external heating of a rectangular prism and a cylinder of finite length are studied under restrictions on the highest temperature and on thermal stresses. Dependences of ultimate compressive and tensile strengths on temperature are taken into account, which are approximated by convex functions. The original infinite-dimensional problem is approximated by a finite-dimensional time-optimal problem with convex phase constraints. Estimates of the error of approximations by the state in space are written out. In the absence of restrictions on thermal stresses, the convergence of finite-dimensional approximations in terms of the speed functional and the weak convergence of the sequence of controls to the optimal control are shown.

Keywords: optimal heating, thermal stresses, speed, rectangular prism, cylinder of finite length.

References

1. Hitzschke R.P., Schulse D. Berechnung van Zeltplansteuerun-gen fur Induktive Erwarmungsprozesse // Elektrowarme International 48 (1990) B4 Oktober. P. 192-198
2. Bikbulatova G.S. Optimal control of the prism heating process, taking into account the limitations on thermal stresses and the highest temperature. Dissertation for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences Ufa, 1996. 118 p.
3. Golichev I.I., Dultsev A.V., Morozkin N.D. On one iterative method for solving the problem of optimal nonlinear heating with phase constraints // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2000. T.40, No.11, P. 1615-1632.
4. Motovilovets I.A., Kozlov V.I. Thermoelasticity. Kyiv: Naukova Dumka, 1987. 264 p.
5. Morozkin N.D. Optimal control of heating processes, taking into account phase restrictions. Textbook, Ufa, 1997. 114 p.
6. Filonenko-Borodich M.I. Mechanical theories of strength. M.: MTU, 1961. 92 p.
7. Kozlov V.P. Two-dimensional axisymmetric non-stationary heat conduction problems. Minsk: Science and technology, 1986. 392 p.