

УДК 517.9

## **Разработка новых методов оптимизации портфелей на основе стохастических дифференциальных уравнений**

Мойко Н.В.

Пензенский государственный университет

*Аннотация:* В статье рассмотрена проблема построения оптимального инвестиционного портфеля в условиях неопределенности и риска. Предлагается использование стохастических дифференциальных уравнения для моделирования динамики цен активов и оценки рисков. Для этого применяются различные методы оптимизации, такие как метод Монте-Карло, методы оптимизации на основе градиентного спуска и эволюционные алгоритмы для нахождения оптимального портфеля с минимальным риском при заданной доходности.

*Ключевые слова:* стохастические дифференциальные уравнения, методы оптимизации, инвестиции, прогнозирование цен на акции и облигации

### **Введение**

Существует множество методов оптимизации инвестиционных портфелей, которые можно разделить на три категории: классические методы, методы на основе статистических моделей и методы на основе искусственного интеллекта. Классические методы оптимизации портфелей включают в себя метод минимальной дисперсии Марковица, метод максимального дохода Шарпа и метод минимального риска-прибыли. Эти методы основаны на математических моделях, которые позволяют определить оптимальное соотношение между доходностью и риском портфеля. Методы на основе статистических моделей используются для анализа временных рядов и прогнозирования будущих цен на активы. Методы на основе искусственного интеллекта используются для анализа больших объемов данных и принятия решений на основе алгоритмов машинного обучения. Дифференциальные уравнения могут быть использованы при анализе инвестиционных портфелей для определения оптимального распределения активов и минимизации риска. Для этого можно использовать модели динамического портфеля, которые описывают изменение стоимости активов во времени (модель Блэка-Шоулза для оценки цены опционов на акции). Также можно использовать дифференциальные уравнения для моделирования финансовых рынков и прогнозирования их поведения (модель Гарча-Жоргенсена для моделирования волатильности цен на акции и другие финансовые инструменты).

Таким образом, дифференциальные уравнения могут быть полезны при анализе инвестиционных портфелей для определения оптимального распределения активов и прогнозирования поведения финансовых рынков.

## 1. Методы оптимизации портфелей на основе стохастических дифференциальных уравнений

Метод Эйлера-Маруямы является численным методом решения стохастических дифференциальных уравнений и используется для моделирования случайных процессов. Общий вид такого уравнения:

$$dX(t) = a(X(t), t)dt + b(X(t), t)dW(t), \quad (1)$$

где  $X(t)$  – случайный процесс,  $a(X(t), t)$  и  $b(X(t), t)$  – функции, определяющие динамику процесса,  $dW(t)$  – инкремент винеровского процесса. Суть метода заключается в следующем: сначала задается начальное значение портфеля, а затем вычисляются изменения его стоимости на каждом шаге времени с помощью стохастического дифференциального уравнения. Для этого используется формула Эйлера-Маруямы, которая позволяет оценить изменение стоимости портфеля на очень малых промежутках времени. Далее, на основе полученных данных о изменении стоимости портфеля, производится оптимизация состава портфеля с помощью различных методов оптимизации. Для решения уравнения (1) методом Эйлера-Маруямы необходимо разбить интервал времени на малые шаги  $\Delta t$  и вычислить изменение  $X(t)$  на каждом шаге:

$$\Delta X(t) = a(X(t), t)\Delta t + b(X(t), t)\Delta W(t),$$

где  $\Delta W(t)$  – приращение винеровского процесса на интервале  $\Delta t$ . Затем новое значение  $X(t + \Delta t)$  вычисляется по формуле:

$$X(t + \Delta t) = X(t) + \Delta X(t).$$

Преимущества метода состоит в возможности учета случайных факторов (изменение курсов валют, изменение цен на акции), что позволяет получить более точные результаты. Кроме того, он является достаточно простым и быстрым в вычислении, что позволяет использовать его в режиме реального времени.

Метод Миллера – это метод определения оптимального портфеля инвестиций, который был предложен Уильямом Шарпом и Гарри Миллером в 1970 г. Он основан на теории портфельного выбора Марковица и предполагает выбор портфеля, имеющего наибольшее соотношение доходности и риска. Данный метод использует матрицу ковариаций доходности активов, чтобы определить оптимальное распределение портфеля между активами. Он также учитывает минимальный или максимальный вес каждого актива в портфеле. Метод Миллера использует следующие формулы для определения оптимального портфеля:

1. Расчет ожидаемой доходности портфеля:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^N w_i \cdot E(r_i),$$

где  $E(R_p)$  – ожидаемая доходность портфеля,  $w_i$  – доля инвестиций в  $i$ -ом активе,  $E(r_i)$  – ожидаемая доходность  $i$ -го актива.

2. Расчет ковариации между доходностями активов:

$$COV(R_i, R_j) = \rho_{ij} \cdot \sigma_i \sigma_j,$$

где  $COV(R_i, R_j)$  – ковариация между доходностями  $i$ -го и  $j$ -го активов,  $\rho_{ij}$  – коэффициент корреляции между  $i$ -м и  $j$ -м активами,  $\sigma_i$  и  $\sigma_j$  – стандартные отклонения доходностей  $i$ -го и  $j$ -го активов соответственно.

3. Расчет риска портфеля (стандартного отклонения):

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_i \sum_j w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j},$$

где  $\sigma_p$  – стандартное отклонение доходности портфеля.

Метод позволяет инвестору определить оптимальное соотношение риска и доходности для своего портфеля. Решение этой задачи оптимизации дает оптимальное распределение портфеля между активами.

Метод Япона не использует формулы в строгом смысле, поскольку он основывается на анализе графиков цен с помощью свечных диаграмм. Однако для более точного определения уровней поддержки и сопротивления могут использоваться следующие формулы:

◊ Уровень поддержки = минимальная цена за определенный период времени – (максимальная цена за этот период – минимальная цена за этот период) · коэффициент поддержки. Коэффициент поддержки обычно принимается равным 0.3.

◊ Уровень сопротивления = максимальная цена за определенный период времени + (максимальная цена за этот период – минимальная цена за этот период) · коэффициент сопротивления. Коэффициент сопротивления обычно принимается равным 0.3.

Коэффициенты поддержки и сопротивления могут быть изменены в зависимости от конкретной ситуации на рынке и индивидуальных предпочтений трейдера.

## **2. Применение дифференциальных уравнений при анализе инвестиционных портфелей**

Для решения системы дифференциальных уравнений (СДУ) можно использовать методы математической статистики и теории вероятностей. Одним из таких методов является метод Монте-Карло, который позволяет моделировать случайные процессы и оценивать вероятности различных событий. Другим методом является метод конечных разностей, который заключается в аппроксимации дифференциального уравнения разностным уравнением на сетке. Этот метод позволяет численно решать стохастические дифференциальные уравнения и проводить анализ риска и доходности портфеля.

На данный момент наиболее интересной темой для изучения является использование современных методов для прогнозирования изменения цен на акции и облигации. Это включает в себя и использование новых источников данных (социальные сети и новостные порталы), и разработку интегрированных моделей, которые учитывают как финансовые, так и экономические и политические факторы, влияющие на изменение цен.

Для разработки модели можно выполнить следующие шаги:

◊ Определить список экономических факторов, которые могут влиять на изменение цен на акции и облигации.

◊ Собрать данные по этим факторам за определенный период времени.

◊ Проанализировать данные и определить, какие из факторов имеют наибольшее влияние на изменение цен на акции и облигации.

◊ Разработать модель, которая будет учитывать выбранные экономические факторы и предсказывать изменение цен на акции и облигации.

◇ Интегрировать модель в систему прогнозирования цен на акции и облигации.

Таким образом, разработка модели, учитывающей не только финансовые, но и экономические факторы, может повысить точность прогнозирования изменения цен на акции и облигации и помочь инвесторам принимать более обоснованные решения.

## **Заключение**

Практика подобного использования стохастических дифференциальных уравнений является интересной для дальнейших исследований.

Некоторые перспективы, которые могут быть рассмотрены, включают разработку новых методов оптимизации портфелей на основе СДУ, исследование влияния различных параметров на оптимальное распределение портфеля (включая горизонт инвестирования, рисковые предпочтения и т. д.), применение методов оптимизации портфелей на основе СДУ для решения конкретных проблем инвестирования, таких как управление пенсионными фондами или управление активами и пассивами, разработку новых методов анализа риска и оценки доходности портфелей на основе СДУ.

Таким образом, дифференциальные уравнения могут быть полезны при анализе инвестиционных портфелей для определения оптимального распределения активов и прогнозирования поведения финансовых рынков.

## **Литература**

1. Elton., Edwin J., Gruber., Martin J., Brown., Jeffrey S. Modern portfolio theory and investment analysis. New Jersey USA : John Wiley, Sons, 2014. 738 p.
2. William F., Sharpe. Mutual Fund Performance. The Journal of Business, University of Chicago Press, 1965. Vol.39. 119 p.
3. Fama E.F., French K.R. Common risk factors in the returns on stocks and bonds. Journal of Financial Economics, 1993. 33(1). P. 3-56.

MSC 60H10

## Development of new portfolio optimization methods based on stochastic differential equations

N.V. Moiko

Penza state university

*Abstract:* The paper considers the problem of building an optimal investment portfolio under conditions of uncertainty and risk. The use of stochastic differential equations for modeling the dynamics of asset prices and risk assessment is proposed. To do this, various optimization methods are applied, such as the Monte Carlo method, gradient descent-based optimization methods, and evolutionary algorithms, to find the optimal portfolio with minimal risk for a given return.

*Keywords:* stochastic differential equations, optimization methods, investments, stock and bond price forecasting

### References

1. Elton., Edwin J., Gruber., Martin J., Brown., Jeffrey S. Modern portfolio theory and investment analysis. New Jersey USA : John Wiley, Sons, 2014. 738 p.
2. William F., Sharpe. Mutual Fund Performance. The Journal of Business, University of Chicago Press, 1965. Vol.39. 119 p.
3. Fama E.F., French K.R. Common risk factors in the returns on stocks and bonds. Journal of Financial Economics, 1993. 33(1). P. 3-56.