

УДК 519.86

## Моделирование траектории и нормы накопления для модели Солоу

Мамедова Т.Ф., Десяев Е.В.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

*Аннотация:* Представлена модель для вычисления траектории и нормы накопления капитала на основе модели Солоу. Она позволяет анализировать траекторию и норму накопления и оценивать влияние ряда факторов на их рост. Создано программное обеспечение для проведения вычислений на основе численного метода Рунге-Кутты.

*Ключевые слова:* модель Солоу, траектория накопления, норма накопления, метод Рунге-Кутты, технологический прогресс.

В современном мире экономический рост и развитие являются ключевыми факторами для достижения процветания и улучшения уровня жизни населения. Исследование механизмов экономического роста и определение факторов, влияющих на него, являются актуальными задачами в области экономической теории.

Одной из важных моделей, используемых для объяснения экономического роста, является модель Солоу, разработанная Робертом Солоу в 1956 г. Эта модель основана на теории накопления капитала и технического прогресса в процессе производства. Она позволяет анализировать траекторию накопления капитала и оценивать влияние различных факторов на экономический рост.

Модель Солоу, также известная как модель совокупного производства, представляет собой экономическую модель, которая объясняет экономический рост через взаимосвязь между накоплением капитала, техническим прогрессом и производственной функцией. Основные элементы модели Солоу включают компоненты [1]:

◊ Капитал. В модели Солоу капитал является одним из основных факторов производства. Он представляет собой материальные и нематериальные активы, используемые для производства товаров и услуг. Капитал может накапливаться с течением времени и служит источником дохода и производительности.

◊ Технический прогресс. Модель Солоу учитывает влияние технического прогресса на экономический рост. Технический прогресс означает улучшение технологий и методов производства, что приводит к повышению эффективности и производительности. В модели Солоу технический прогресс учитывается через параметры, определяющие производственную функцию.

◊ Производственная функция. Производственная функция в модели Солоу описывает связь между входами (капиталом и трудом) и выходами (производством). Она определяет, какие объемы продукции могут быть получены при заданных уровнях входов. В модели Солоу принята упрощенная форма производственной функции, такая как производственная функция Кобба-Дугласа, которая выражает зависимость продукции от капитала и труда.

В модели Солоу капитал играет ключевую роль в определении уровня производства и экономического роста. Капитал накапливается с течением времени через инвестиции, которые включают в себя вложения в оборудование, машины, здания и другие производственные активы. Чем больше капитала накапливается, тем больше

ресурсов доступно для производства и тем выше уровень производства.

Технический прогресс в модели Солоу представляет собой изменения в технологиях и методах производства. Он может происходить благодаря научным исследованиям, инновациям и развитию новых процессов. Технический прогресс позволяет использовать имеющиеся ресурсы более эффективно, увеличивая производительность и способствуя экономическому росту.

До появления модели Солоу, наиболее распространенной моделью изучения экономического роста была модель Харрода-Домара. Производственная функция Харрода-Домара определяла зависимость между объёмом производства ( $Y$ ), капиталом ( $K$ ) и трудом ( $L$ ). Она может быть представлена следующим образом:

$$Y = F(K, L),$$

где  $F$  представляет функцию производства, которая описывает, какие объёмы продукции могут быть произведены при заданных уровнях капитала и труда.

Однако модель Харрода-Домара была несовершенна, поскольку не учитывала такой показатель, как уровень технологий. В модели Солоу эта проблема исправлена, и производственная функция выглядит так:

$$Y = AF(K, L),$$

где  $A$  представляет уровень технологий.

В модели Солоу часто используется производственная функция Кобба-Дугласа:

$$Y = AK^\alpha \cdot L^\beta,$$

где  $\alpha$  является параметром, отражающим долю капитала в производстве, а  $\beta$  – долю труда.

В модели Солоу важную роль играет уравнение накопления капитала, которое описывает динамику капитала во времени. Уравнение накопления капитала можно записать следующим образом:

$$\frac{dK}{dt} = sY - (n + g)K,$$

где  $K$  – уровень капитала,  $Y$  – уровень производства,  $s$  – норма сбережений,  $n$  – норма прироста населения,  $g$  – норму технологического прогресса.

Правая часть уравнения представляет собой разницу между накоплением капитала ( $sY$ ) и его износом ( $(n + g)K$ ).

Норма сбережений ( $s$ ) определяет долю производства, которая выделяется на инвестиции и накопление капитала. Уровень производства ( $Y$ ) зависит от уровня капитала и труда, а также от технического прогресса. Норма износа  $\delta = (n + g)$  отражает уменьшение капитала из-за физического износа и морального старения производственных активов.

Анализ уравнения движения позволяет определить различные траектории накопления капитала и оценить их влияние на экономический рост. Существуют две основные траектории:

◊ Траектория сходящегося к стационарному состоянию: Если норма сбережений  $s$  больше, чем норма износа  $\delta$ , то скорость накопления капитала будет положительной ( $sY > \delta K$ ), и капитал будет расти со временем. Однако, по мере роста уровня капитала, норма износа будет становиться все более значимой, и скорость накопления капитала будет снижаться. При достижении стационарного состояния, скорость

накопления капитала становится нулевой ( $sY - \delta K = 0$ ), и капитал перестаёт расти. Траектория накопления капитала в этом случае будет сходиться к стационарному значению капитала ( $K^*$ ).

◇ Траектория расходящегося от стационарного состояния: Если норма сбережений  $s$  меньше, чем норма износа  $\delta$ , то скорость накопления капитала будет отрицательной ( $sY < \delta K$ ), и капитал будет уменьшаться со временем. В этом случае, экономика не способна поддерживать уровень капитала, необходимый для стационарного состояния. Траектория накопления капитала будет расходиться от стационарного значения, и экономика будет находиться в состоянии убывающего капитала. Анализ траекторий накопления капитала в модели Солоу позволяет оценить устойчивость экономики и ее способность достичь стационарного состояния. При определениях значениях параметров модели, экономика может достичь устойчивого состояния, где уровень капитала и уровень производства остаются постоянными со временем, обеспечивая устойчивый экономический рост.

Таким образом, траектория модели Солоу представляет собой путь, по которому экономика движется в долгосрочной перспективе.

Норма накопления модели Солоу определяет долю дохода, которую общество выделяет на инвестиции в капитал. Норма накопления определяется как  $\gamma = nK$ , где  $n$  – естественный прирост населения, а  $K$  – уровень капитала.

Уравнение для изменения уровня технологического прогресса может быть записано как:

$$\frac{dA}{dt} = \mu A,$$

где  $\frac{dA}{dt}$  представляет собой скорость изменения уровня технологического прогресса,  $\mu A$  – параметр, определяющий скорость роста, и  $A$  – уровень технологического прогресса.

Для того, чтобы смоделировать траекторию и норму накопления для модели Солоу, необходимо решить систему из двух дифференциальных уравнений, а именно:

$$\begin{cases} \frac{dK}{dt} = sAK^\alpha L^\beta - (n + g)K, \\ \frac{dA}{dt} = \mu A, \end{cases} \quad (1)$$

Для программной реализации вычислений использовался высокоуровневый язык программирования общего назначения Python, включая библиотеку NumPy, а также был выбран численный метод Рунге-Кутты четвёртого порядка как достаточно точный, но при этом не слишком сложный в исполнении [2].

В ходе исследования было выявлено влияние технологического прогресса на экономический рост и развитие для различных примеров. Также был использован численный метод Рунге-Кутты четвёртого порядка для моделирования и анализа различных сценариев и траекторий накопления капитала.

## Литература

1. Базелер У., Сабов З., Хайнрих Й., Кох В. Основы экономической теории: принципы, проблемы, политика. Германский опыт и российский путь. СПб.: Издательство «Питер», 2000. 800 с.

2. Лапчик М.Р, Рагулина М.И., Хеннер Е.К. Численные методы, 5-е изд., стер. М.: Издательский центр «Академия», 2009. 384 с.

MSC 91B02

## Modeling the trajectory and accumulation rate for the Solow model

T.F. Mamedova, E.V. Desyaev

National Research Mordovia State University

*Abstract:* A model for calculating the trajectory and nome of capital accumulation based on the Solow model is presented. It allows to analyze the trajectory and rate of accumulation and evaluate the influence of a number of factors on their growth. Software for carrying out calculations based on the Runge-Kutta numerical method has been created.

*Keywords:* Solow model, accumulation trajectory, accumulation rate, Runge-Kutta method, technological progress.

### References

1. Bazeler U., Sabov Z., Heinrich J., Koch V. Fundamentals of economic theory: principles, problems, politics. German experience and Russian way. St. Petersburg: Piter Publishing House, 2000. 800 p.
2. Lapchik M.P., Ragulina M.I., Khenner E.K. Numerical methods, 5th ed., Sr. M.: Publishing Center "Academy 2009. 384 p.