

УДК 519.63

Применение узловых полностью консервативных разностных схем с вязким наполнением для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера на задаче Сода

Ладонкина М.Е.^{1,2}, Повещенко Ю.А.^{1,2}, Чжан Хаочэнь^{1,2}

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН¹, МФТИ²

Аннотация: Для уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных создано семейство двухслойных по времени полностью консервативных разностных схем (ПКРС) с временными весами, переменными по пространству. Значительное внимание в работе уделено применению способов конструирования регуляризованных потоков массы, импульса и внутренней энергии, сохраняющих свойства ПКРС данного класса на классической задаче Сода, анализу их амплитуды и возможности их использования на неравномерных сетках. Построенная схема имеет точность второго порядка и реализуется с помощью простых итерационных процессов. Разработанная программа имеет достаточно высокую точность даже на крупных сетках. Выполнено тестирование классической задачи – задачи Сода для подтверждения эффективности разработанной схемы и методов.

Ключевые слова: полностью консервативные разностные схемы, метод опорных операторов, газовая динамика, задача Сода.

1. Полностью консервативная дифференциально разностная схема

На рис. 1 представлена соответствующая разностная сетка, где ω – узлы разностной сетки, а Ω – ячейки. К узлам ω будем относить термодинамические величины: ρ , ε , P и внутреннюю энергию $E = \rho\varepsilon$, скорость \vec{u} , объём v и приузловую массу $m = \rho v$, а объём V – к ячейкам Ω .

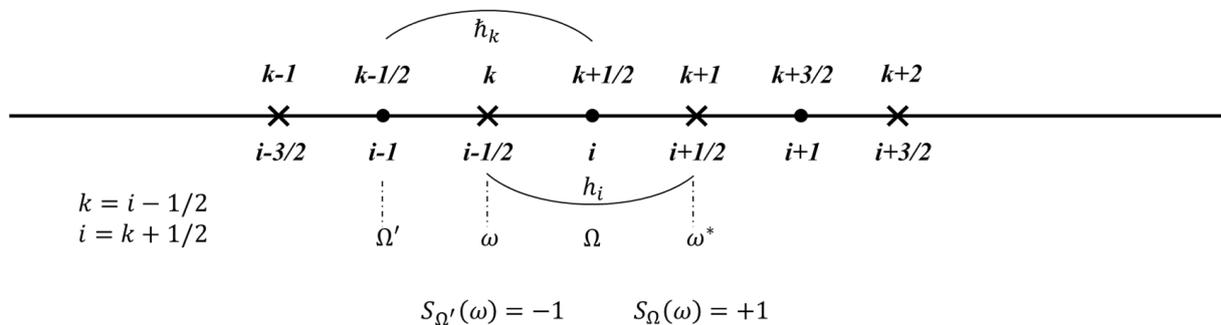


Рис. 1. Разностная сетка.

Очевидно, что $v_\omega = \tilde{h}_k = \frac{h_{k+1/2} + h_{k-1/2}}{2} = \frac{h_i + h_{i-1}}{2}$, $V_\Omega = h_i$, $\rho_\omega = \frac{m_\omega}{v_\omega} = \rho_k$.

Выпишем полностью консервативную [2] разностную схему (ПКРС) в переменных Эйлера:

$$m_t = -\nu DIN_D \vec{\mu}_D^{\sim} \quad (1)$$

$$(mu)_t = -\nu GRAD_\sigma \pi^{\sim} - \nu DIT_D(\vec{\mu}_D^{\sim} \cdot \vec{u}_D^{\sim}) \quad (2)$$

$$(m\varepsilon)_t = -\frac{1}{2} \sum_{\Omega(\omega)} (\pi^{\sim} V DIV_\sigma \vec{u}^{\sim})_\Omega - \nu DIN_D(\vec{\mu}_{ED}^{\sim} + \vec{\chi}_D^{\sim}) \quad (3)$$

$$(m \frac{\vec{u}^2}{2})_t = -\nu(u^{\sim}, GRAD_\sigma \pi^{\sim}) - \nu DIN_D(\vec{\mu}_D^{\sim} \frac{\vec{u}_D^2}{2}) \quad (4)$$

Здесь все величины обозначим следующим образом:

$$\vec{\mu} = \rho \vec{u}, \quad \vec{\mu}_E = \varepsilon \vec{\mu} = E \vec{u}, \quad E = \rho \varepsilon, \quad \rho^{\sim} = \rho^{(\psi_\rho)}, \quad \psi_\rho = const; \quad (5)$$

$$M_D^{\sim} = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} (\rho_\omega u_\omega)^{(0.5)}, \quad \mu_D^{\sim} = M_D^{\sim} - \nu^{\sim} GRAN_D \rho^{\sim}; \quad (6)$$

$$\pi_\Omega^{\sim} = P_\Omega^{(0.5)} - v_u^{\sim} DIV_\sigma(\rho^{\sim} u^{(\psi_u)}), \quad P_\Omega = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} P_\omega, \quad \psi_u = const; \quad (7)$$

$$\vec{\chi}_D^{\sim} = \{\vec{\chi}_{\varepsilon D}^{\sim} | \vec{\chi}_{ED}^{\sim}\}, \quad \vec{\chi}_{\varepsilon D}^{\sim} = -k_\varepsilon GRAN_D \hat{E}, \quad \vec{\chi}_{ED}^{\sim} = -k_E GRAN_D \hat{E}; \quad (8)$$

$$M_{ED}^{\sim} = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} (E_\omega u_\omega)^{(0.5)}, \quad \mu_{ED}^{\sim} = M_{ED}^{\sim} - \nu_E^{\sim} GRAN_D(\rho^{\sim} \varepsilon^{(\psi_\varepsilon)}), \quad \psi_\varepsilon = const. \quad (9)$$

На слоях по времени t и $\hat{t} = t + \tau$ ($\tau > 0$ – шаг по времени) введены разностные производные по времени и пространственно-точечные временные интреполяции:

$$u_t = \frac{\hat{a} - a}{\tau}, \quad a^{(\delta)} = \delta a + (1 - \delta)a.$$

Здесь интерполяционный вес δ может связываться с узлами пространственной сетки ω , например, по закону: $\delta = \frac{\sqrt{\hat{m}}}{\sqrt{\hat{m}} + \sqrt{m}}$, ψ – постоянные интерполяционные веса по времени. Таким образом, отметим, что под произвольной интерполяцией по времени сеточных функций a и \hat{a} между слоями t и \hat{t} будем понимать некоторые интерполяционные величины a^{\sim} , например, для скорости полагаем $u^{\sim} = u^{(\delta)}$. В выражении $\Delta_\sigma \pi$, если узел $\omega = \delta\omega$ – граничный, то добавлено слагаемое $\pi_\delta \omega$ на границе со знаковой функцией $S_\delta \omega$, в зависимости от направления граничной нормали.

Далее для континуальных операций векторного анализа $\text{div } \vec{u}$, $\text{grad } P$, $\text{div } (\vec{\mu} \cdot \vec{u})$ введены их разностные аналоги:

$$DIN_D \vec{\mu}_D = \frac{1}{v} \sum_{\Omega(\omega)} S_\Omega(\omega) \mu_D(\Omega), \quad DIN_D : (\Omega) \rightarrow (\omega), \quad (10)$$

$$DIT_D(\vec{\mu}_D \cdot \vec{u}_D) = \frac{1}{v} \sum_{\Omega(\omega)} S_\Omega(\omega) \mu_D(\Omega) \vec{u}_D(\Omega), \quad DIT_D : (\Omega) \rightarrow (\omega), \quad (11)$$

$$GRAN_D P = \frac{1}{V} \Delta_\Omega P, \Delta_\Omega P = - \sum_{\omega(\Omega)} S_\Omega(\omega) P_\omega, \quad GRAN_D : (\omega) \rightarrow (\Omega), \quad (12)$$

$$GRAD_\sigma \pi = \frac{1}{v} \Delta_\sigma \pi, \Delta_\sigma \pi = \sum_{\omega(\Omega)} S_\Omega(\omega) \pi_\omega + S_{\delta\omega} \pi_{\delta\omega}, \quad GRAD_\sigma : (\Omega) \rightarrow (\omega), \quad (13)$$

$$DIV_\sigma \vec{u} = - \frac{1}{V} \sum_{\omega(\Omega)} S_\Omega(\omega) u_\omega, \quad DIV_\sigma : (\omega) \rightarrow (\Omega). \quad (14)$$

2. Задача Сода

Для тестирования построенной схемы выполнены расчёты классической задачи Сода (Sod problem) о распаде произвольного разрыва. В таблице 1 представлены начальные условия этой задачи. За систему единиц измерения в расчетах принята СИ. Показатель адиабаты $\gamma = 1.4$.

Таблица 1. Начальные условия в задаче Сода

Левая область			Правая область		
ρ	u	P	ρ	u	P
1.0	0.0	1.0	0.125	0.0	0.1

На рис. 2 показаны профили плотности задачи Сода в момент $T = 2.0$ с.

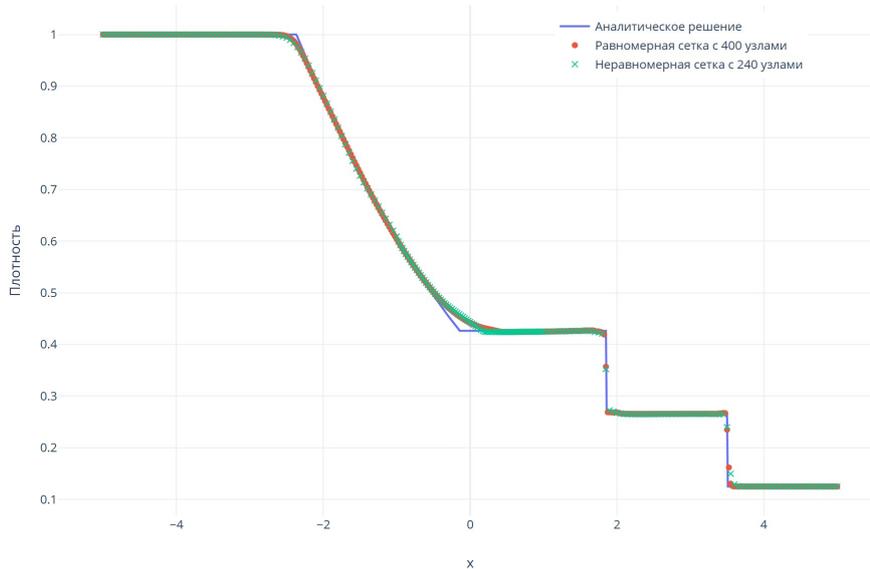


Рис. 2. Профиль плотности в момент $T = 2.0$ с.

На рис. 2 наряду с аналитическим решением (синяя линия), приводятся численные решения на равномерной сетке (красный пунктир) и на неравномерной сетке (зелёная прерывистая линия).

Литература

1. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980.
2. Попов Ю.П., Самарский А.А. Полностью консервативные разностные схемы // ЖВМиМФ, 1969. Т.9, №4, С. 953-958
3. Колдоба А.В., Повещенко Ю.А. Полностью консервативные разностные схемы для уравнений газовой динамики при наличии источников массы // Препринты ИПМ им М.В. Келдыша, АН СССР. номер 160, 1982.
4. Повещенко Ю.А., Ладонкина М.Е., Подрыга В.О., Рагимли О.Р., Шарова Ю.С. Об одной двухслойной полностью консервативной разностной схеме газовой динамики в эйлеровых переменных с адаптивной регуляризацией // Препринты ИПМ им М.В. Келдыша АНБ 2019. № 14. 23 с.
5. Rahimly O., Podryga V., Poveshchenko Y., Rahimly P., Sharova Y. (2020) Two-Layer Completely Conservative Difference Scheme of Gas Dynamics in Eulerian Variables with Adaptive Regularization of Solution. In: Lirkov I., Margenov S. (eds) Large-Scale Scientific Computing. LSSC 2019. Lecture Notes in Computer Science, vol 11958. Springer.
6. Ладонкина М. Е., Повещенко Ю.А., Рагимли О.Р., Чжан Х. Теоретическое исследование устойчивости узловых полностью консервативных разностных схем с вязким наполнением для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера, Журнал СВМО, 24:362022, С. 317–330
7. Sod G. A. A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws, IJournal of Computational Physics, Elsevier, 1978, 27 (1), P. 1-31

MSC 65M22

Application of viscous-filled nodal completely conservative difference schemes to the gas dynamics equations in Euler variables on the Sod problem

M.E. Ladonkina^{1,2}, Yu.A. Poveschenko^{1,2}, H. Zhang^{1,2}

Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS¹,
Moscow Institute of Physics and Technology²

Abstract: For the equations of gas dynamics in Euler variables, a family of two-layer time-dependent completely conservative difference schemes (CCDS) with time weights defined in space is created. Considerable attention is paid to the application of methods of constructing regularized flows of mass, momentum and internal energy preserving the properties of CCDS of this class on the classical Sod problem, to the analysis of their amplitude and the possibility of their use on non-uniform meshes. The constructed scheme has second-order accuracy and is realized by simple iterative processes. Methods and programs based on the constructed scheme for shock wave tube problems are developed. The developed program has high accuracy, even with large meshes. Testing of the classical Sod problem is performed to confirm the effectiveness of the developed scheme and methods.

Keywords: Completely conservative difference scheme, method of reference operators, gas dynamics, Sod problem.

References

1. Samarsky A.A., Popov Yu.P. Difference methods for solving problems of gas dynamics. Moscow, science, 1980.
2. Popov Yu.P., Samarsky A.A. Completely conservative difference schemes // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1969. Vol.9, No.4, P.953-958
3. Koldoba A.V., Poveschenko Yu.A. Completely conservative difference schemes for gas dynamics equations in the presence of mass sources // Preprints of the KIAM, ANSSR. No.160, 1982.
4. Poveschenko Yu.A., Ladonkina M.E., Podryga V.O., Rahimli O.R., Sharova Yu.S. On one two-layer completely conservative difference scheme of gas dynamics in Euler variables with adaptive regularization// Preprints of the KIAM, AN, 2019. No.14. 23 p.
5. Rahimly O., Podryga V., Poveschenko Y., Rahimly P., Sharova Y. (2020) Two-Layer Completely Conservative Difference Scheme of Gas Dynamics in Eulerian Variables with Adaptive Regularization of Solution. In: Lirkov I., Margenov S. (eds) Large-Scale Scientific Computing. LSSC 2019. Lecture Notes in Computer Science. Vol.11958. Springer.
6. Ladonkina M. E., Poveschenko Yu. A., Rahimly O.R., Zhang H. Theoretical study of stability of nodal completely conservative difference schemes with viscous filling for gas dynamics equations in Euler variables, Zhurnal SVMO, 24:3, 2022, P. 317–330

7. Sod G. A. A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws, *IJournal of Computational Physics*, Elsevier, 1978, 27 (1), P. 1-31