УДК 519.622

Области абсолютной устойчивости явных методов семейства Рунге-Кутты для задачи Далквиста, преобразованной к наилучшему аргументу и его модификациям

Кузнецов Е.Б.[1], Леонов С.С.[1, 2], Цапко Е.Д.[1]

Московский авиационный институт[1],
Российский университет дружбы народов[2]

Аннотация: В статье исследуются области абсолютной устойчивости явных методов семейства Рунге-Кутты для задачи Далквиста. Область абсолютной устойчивости позволяет получить оценку шага интегрирования, которая дает возможность использовать явные методы для решения ряда жестких начальных задач без существенного возрастания погрешности. Также в статье построены области абсолютной устойчивости для задачи Далквиста, преобразованной к наилучшему аргументу и его экспоненциальной модификации. Полученные результаты хорошо согласуются с уже имеющимися теоретическими исследованиями.

Ключевые слова: область абсолютной устойчивости, явные методы семейства Рунге-Кутты, задача Далквиста, метод продолжения решения, наилучший аргумент, экспоненциальный наилучший аргумент.

1. Области абсолютной устойчивости явных методов семейства Рунге-Кутты

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \tag{1}$$

с начальным условием

$$y(t_0) = y_0. \tag{2}$$

В данной задаче $y(t)$ – искомая функция аргумента $t \in [t_0, T]$, T – заданная правая граница отрезка изменения аргумента задачи, y_0 – значение функции $y(t)$ при $t = t_0$.

Подобными задачами моделируются многие явления и процессы в области физики, механики, экономики и биологии. При этом в большинстве случаев задача (1)-(2) не допускает аналитического решения. В этом случае используются численные методы решения задачи Коши, например одношаговые явные методы семейства Рунге-Кутты.

1.1. Явные методы семейства Рунге-Кутты

Разобьем интервал изменения аргумента t на n частей, в общем случае переменной длины:

$$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots < t_n = T.$$

Пусть известно решение задачи y_k в узле t_k и необходимо найти решение в следующем узле.

К. Рунге предложил вычисление приближенного решения y_{k+1} в виде линейной комбинации [1, с. 56–64]

$$
\begin{gathered}
y_{k+1} = y_k + p_{q1}K_1 + p_{q2}K_2 + \cdots + p_{qq}K_q,\\
K_1 = hf(t_k, y_k), \quad K_2 = hf(t_k + \alpha_2 h, y_k + \beta_{21}K_1),\\
\vdots\\
K_q = hf(t_k + \alpha_q h, y_k + \beta_{q1}K_1 + \cdots + \beta_{q(q-1)}K_{q-1}).
\end{gathered} \tag{3}
$$

Здесь числа $\alpha_2, \ldots, \alpha_q$, $\beta_{21}, \ldots, \beta_{q(q-1)}$ и $p_{q1}, \ldots, p_{qq}$ – настраиваемые параметры.

Семейство методов (3) называется семейством одношаговых явных q-стадийных методов Рунге-Кутты. Для многих начальных задач явные методы Рунге-Кутты позволяют получить решение приемлемой точности. Но для класса задач, называемых жесткими, данные методы малоприменимы из-за неконтролируемого роста погрешности при их использовании. По этой причине для жестких начальных задач особое значение приобретает понятие устойчивости метода решения.

1.2. Абсолютная устойчивость явных методов семейства Рунге-Кутты. Задача Далквиста

Анализ устойчивости численного метода для исходной задачи (1)-(2) может быть трудоемким, в особенности, если рассматривается система дифференциальных уравнений. Воспользуемся линеаризацией исходной задачи [3, с. 25–27]. Пусть известно решение $y = \varphi(t)$ задачи (1)-(2). Разложим в ряд Тейлора правую часть уравнения (1) в окрестности известного решения:

$$
\frac{dy}{dt} = f\Big(t, \varphi(t)\Big) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big(t, \varphi(t)\Big)\Big(y - \varphi(t)\Big) + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big(t, \varphi(t)\Big)\Big(y - \varphi(t)\Big)^2 + o\bigg(\Big(y - \varphi(t)\Big)^2\bigg).
$$

Вводя замену

$$
y = Y + \varphi\big(t\big),
$$

получим уравнение

$$
\frac{dY}{dt} = \frac{\partial f}{\partial y}\Big(t, \varphi(t)\Big)Y + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big(t, \varphi(t)\Big)Y^2 + o\Big(Y^2\Big).
$$

Если погрешность численного решения достаточно мала, то для исследования устойчивости численного метода в окрестности каждой точки интегральной кривой можно заменить исходную задачу (1)-(2) на задачу Коши для линейного уравнения

$$
\frac{dy}{dt} = ay \tag{4}
$$

с начальным условием (2), где параметр a является заданным, в общем случае комплексным, числом. Применительно к исходной задаче (1)-(2) параметр a равняется значению производной $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ в рассматриваемой точке интегральной кривой.

Задача (4), (2) называется задачей Далквиста и является тестовой для определения областей устойчивости численных методов.

Все явные методы семейства Рунге-Кутты для задачи Далквиста могут быть записаны в виде

$$
y_{k+1} = R(z)y_k, \quad z = ah.
$$

Функция $R(z)$ называется функцией устойчивости. Метод называется абсолютно устойчивым для $z \in \mathbb{C}$, если для этого z выполняется условие [3, с. 26]

$$|R(z)| \le 1. \tag{5}$$

В частности, из условия (5) следует, что $|y_{k+1}| \le |y_k|$, т. е. погрешность численного решения не растет. Для жестких начальных задач это условие является ключевым при выборе метода решения.

В монографии Э. Хайрера и Г. Ваннера [3, с. 27] для задачи Далквиста найдена общая формула для функции устойчивости $R(z)$. Доказана

Теорема 1. *Если метод Рунге-Кутты имеет порядок p, то*

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^p}{p!} + O(z^{p+1}).$$

Используя теорему 1 можно доказать следующие следствия.

Рассмотрим явный метод Рунге-Кутты первого порядка точности (явный метод Эйлера), который, в общем случае для задачи (1)-(2), имеет вид [1, с. 58]

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k). \tag{6}$$

Следствие 1. *Область абсолютной устойчивости явного метода Рунге-Кутты первого порядка точности (явного метода Эйлера) вида* (6) *для задачи Далквиста* (4), (2) *задается неравенством*

$$|1 + ha| < 1. \tag{7}$$

При действительных значениях параметра a неравенство (7) *дает ограничение на шаг интегрирования*

$$|h| \le \frac{2}{|a|} \tag{8}$$

при условии $ah \le 0$. При комплексных значениях параметра a, т. е. при $a = \alpha + i\beta,\ \alpha,\ \beta\ \in \mathbb{R}$, неравенство (7) *задает на комплексной плоскости круг единичного радиуса*

$$(\alpha h + 1)^2 + (\beta h) \le 1.$$

Рассмотрим явный метод Рунге-Кутты второго порядка точности (явный метод Эйлера-Коши), который, в общем случае для задачи (1)-(2), имеет вид [1, с. 59]

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}\left(K_1 + K_2\right), \quad K_1 = hf(t_k, y_k), \quad K_2 = hf(t_k + h, y_k + K_1). \tag{9}$$

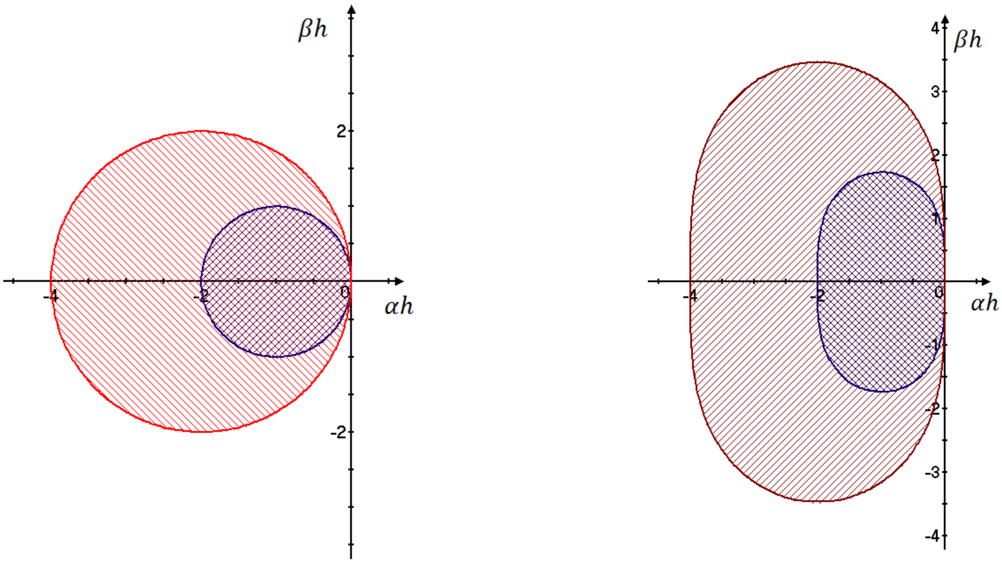
Следствие 2. *Область абсолютной устойчивости явного метода Рунге-Кутты второго порядка точности (явного метода Эйлера-Коши) вида* (9) *для задачи Далквиста* (4), (2) *задается неравенством*

$$\left|1 + ah + a^2\frac{h^2}{2}\right| \le 1. \tag{10}$$

При действительных значениях параметра a неравенство (10) *дает ограничение на шаг интегрирования* (8) *при условии $ah \le 0$. При комплексных значениях параметра a, т. е. при $a = \alpha + i\beta,\ \alpha,\ \beta\ \in \mathbb{R}$, неравенство* (10) *задает на комплексной плоскости область*

$$\left(1 + \alpha h + \alpha^2\frac{h^2}{2} - \beta^2\frac{h^2}{2}\right)^2 + \left(\beta h + \alpha\beta h^2\right)^2 \le 1.$$

Полученные области абсолютной устойчивости изображены на рис. 1 (меньшие по площади из областей на соответствующих рисунках). Отметим, что из теоремы 1 также следует инвариантность области абсолютной устойчивости для всех методов семейства Рунге-Кутты одного порядка точности.



а) б)

Рис. 1. Область абсолютной устойчивости для задачи Далквиста:
а) явный метод Эйлера, б) явный метод Эйлера-Коши

2. Применение наилучшего аргумента

В монографии В.И. Шалашилина и Е.Б. Кузнецова [3, с. 50–53] доказано, что при использовании наилучшего аргумента λ, отсчитываемого вдоль интегральной кривой рассматриваемой задачи Коши, область абсолютной устойчивости явной схемы Эйлера расширяется.

Для задачи Далквиста (4), (2) наилучший аргумент λ удовлетворяет соотношению

$$(d\lambda)^2 = (dy)^2 + (dt)^2 . \tag{11}$$

Преобразовав к аргументу (11) уравнение (4), получим систему уравнений

$$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{ay}{\sqrt{1+|ay|^2}}, \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1+|ay|^2}}. \tag{12}$$

Начальные условия для системы (12) примут вид

$$y(0) = y_0, \quad t(0) = t_0. \tag{13}$$

Обобщим теорему 1 на преобразованную задачу (12)-(13).

Теорема 2. *Если метод Рунге-Кутты имеет порядок* p, *то его функция устойчивости в окрестности каждой точки интегральной кривой преобразованной задачи* (12)-(13) *имеет вид*

$$R(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \dots + \frac{u^p}{p!} + O(u^{p+1}),$$

где $u = \dfrac{ah}{\left(1+|ay_k|^2\right)^{3/2}}$, $y_k = \varphi(\lambda_k)$, $M(t_k, y_k)$ *– рассматриваемая точка интегральной кривой.*

Используя теорему 2, докажем аналоги следствий 1 и 2 для преобразованной задачи Далквиста (12)-(13).

Следствие 3. *Область абсолютной устойчивости явного метода Рунге-Кутты первого порядка точности (явного метода Эйлера) вида* (6) *для преобразованной задачи Далквиста* (12)-(13) *в окрестности каждой точки интегральной кривой задается неравенством*

$$\left|1 + h\frac{a}{\left(1+|ay_k|^2\right)^{3/2}}\right| \leq 1. \tag{14}$$

При действительных значениях параметра a *неравенство* (14) *дает ограничение на шаг интегрирования*

$$|h| \leq \frac{2\left(1+|ay_k|^2\right)^{3/2}}{|a|}, \tag{15}$$

при условии $ah \leq 0$. *При комплексных значениях параметра* a, *т. е. при* $a = \alpha + i\beta$, α, $\beta \in \mathbb{R}$, *неравенство* (14) *задает круг радиуса* $\rho = \left(1+|ay_k|^2\right)^{3/2}$ *с центром в точке* $O_1(-\rho, 0)$:

$$(\alpha h + \rho)^2 + (\beta h)^2 \leq \rho^2.$$

Следствие 4. *Область абсолютной устойчивости явного метода Рунге-Кутты второго порядка точности (явного метода Эйлера-Коши) вида* (9) *для преобразованной задачи Далквиста* (12)-(13) *в окрестности каждой точки интегральной кривой задается неравенством*

$$\left|1 + h\frac{a}{\left(1+|ay_k|^2\right)^{3/2}} + \frac{a^2}{\left(1+|ay_k|^2\right)^{3}}\frac{h^2}{2}\right| \leq 1. \tag{16}$$

При действительных значениях параметра a *неравенство* (16) *дает ограничение на шаг интегрирования* (15) *при условии* $ah \leq 0$. *При комплексных значениях параметра* a, *т. е. при* $a = \alpha + i\beta$, α, $\beta \in \mathbb{R}$, *неравенство* (16) *задает на комплексной плоскости область*

$$\left(\rho^2 + \rho\alpha h + \alpha^2\frac{h^2}{2} - \beta^2\frac{h^2}{2}\right)^2 + \left(\rho\beta h + \alpha\beta h^2\right)^2 \leq \rho^4.$$

Полученные области абсолютной устойчивости для преобразованной задачи Далквиста изображены на рис. 1 (большие по площади из областей на соответствующих рисунках) при $\rho = 2$. Как видно из рис. 1, область абсолютной устойчивости для задачи (12)-(13) совпадает с областью абсолютной устойчивости для задачи (4), (2) только при $a = 0$ или $y_k = 0$. В остальных случаях область устойчивости преобразованной задачи Далквиста превосходит по размерам область исходной задачи, занимая всю левую полуплоскость при $ay_k \to \infty$.

3. Применение модифицированного наилучшего аргумента

Помимо наилучшего аргумента λ, в работах авторов [4, 5] для решения сверхжестких задач предложено использовать экспоненциальный наилучший аргумент

$$(d\kappa)^2 = (dy)^2 + \exp(-2\xi t) \cdot (dt)^2 . \tag{17}$$

Задача Далквиста (4), (2), преобразованная к экспоненциальному наилучшему аргументу (17) примет вид

$$\frac{dy}{d\kappa} = \frac{ay \exp(\xi t)}{\sqrt{1 + a^2 y^2 \exp(2\xi t)}}, \quad \frac{dt}{d\kappa} = \frac{\exp(\xi t)}{\sqrt{1 + a^2 y^2 \exp(2\xi t)}}, \tag{18}$$

а начальные условия для нее запишутся в форме (13).

Для задачи (18), (13) доказана следующая

Теорема 3. *При значениях параметра ξ, удовлетворяющих условию*

$$a \cdot \xi \leq 0,$$

область абсолютной устойчивости явного метода Рунге-Кутты первого порядка точности (явного метода Эйлера) вида (6) *для преобразованной к экспоненциальному наилучшему аргументу к задачи Далквиста* (18), (13) *в окрестности каждой точки интегральной кривой задается неравенством*

$$\left| 1 + \frac{1}{2} \frac{\exp(\xi t_m)}{(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\xi t_m))^{3/2}} h D_{\max} \right| \leq 1, \tag{19}$$

где

$$D_{\max} = \begin{cases} D_1, & a + \xi \geq -\dfrac{2(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\xi t_m))^{3/2}}{h \exp(\xi t_m)}, \\ D_2, & a + \xi < -\dfrac{2(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\xi t_m))^{3/2}}{h \exp(\xi t_m)}, \end{cases}$$

$$D_1 = a + \xi + \sqrt{(a - \xi)^2 - 4a^3 \xi y_m^2 \exp(2\xi t_m)},$$
$$D_2 = a + \xi - \sqrt{(a - \xi)^2 - 4a^3 \xi y_m^2 \exp(2\xi t_m)}.$$

При действительных значениях параметра a неравенство (19) *дает ограничение на шаг интегрирования*

$$|h| \leq \frac{4\left(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\xi t_m)\right)^{3/2}}{|D_{\max}| \exp(\xi t_m)}$$

при условии $aD_{\max} \leq 0$.

Справедливо следующее следствие теоремы 3.

Следствие 5. *При значении параметра $\xi = -a$ условие абсолютной устойчивости явного метода Эйлера вида* (6) *для задачи* (18), (13) *принимает форму*

$$|h| \leq \frac{2\left[\exp(a t_m) + a^2 y_m^2 \exp(-a t_m)\right]}{|a|}. \tag{20}$$

Данное следствие показывает, что при достаточно больших значениях a ограничение (20) позволяет увеличить размер шага интегрирования без потери устойчивости метода.

Литература

1. Арушанян О.Б., Залёткин С.Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд-во МГУ, 1990. 336 с.

2. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. 685 с.

3. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация (в прикладной математике и механике). М.: Эдиториал УРСС, 1999. 224 с.

4. Kuznetsov E.B., Leonov S.S., Tsapko E.D. A new numerical approach for solving initial value problems with exponential growth integral curves // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 927. 012032. DOI:10.1088/1757-899X/927/1/012032

5. Кузнецов Е.Б., Леонов С.С., Цапко Е.Д. Оценка области абсолютной устойчивости численной схемы решения жестких задач Коши методом продолжения решения по параметру // Ж. выч. мат. и мат. физ. 2023. Т. 63. № 4. С. 557-572.

MSC 65L20

Absolute stability domains of explicit methods of the Runge-Kutta family for the Dahlquist problem transformed to the best argument and its modifications

E.B. Kuznetsov[1], S.S. Leonov[1, 2], E.D. Tsapko[1]
Moscow Aviation Institute[1], RUDN University[2]

Abstract: The paper investigates the absolute stability domains of explicit methods of the Runge-Kutta family for the Dahlquist problem. The domain of absolute stability allows us to obtain an estimate of the step size of integration, which enables using explicit methods to get an approximate solution for a number of stiff initial problems without a significant increase in error. Also, the absolute stability domains for the Dahlquist problem transformed to the best argument and its modification constructed in the paper. The obtained results are in good agreement with existing theoretical researches.

Keywords: absolute stability domain, explicit Runge-Kutta methods, the Dahlquist problem, solution continuation method, the best argument, exponential best argument.

References

1. Arushanyan O.B., Zalotkin S.F. Numerical solution of ordinary differential equations belonging to Fortran. Izd-vo MGU. Moscow, 1990. 336 p. (in Russian).

2. Hairer E., Wanner G. Solution of ordinary differential equations. Stiff and differential-algebraic problems. Mir. Moscow, 1999. 685 p. (in Russian).

3. Shalashilin V.I., Kuznetsov E.B. Parametric continuation and optimal parametrization in applied mathematics and mechanics. Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, Boston, London, 2003. 236 p.

4. Kuznetsov E.B., Leonov S.S., Tsapko E.D. A new numerical approach for solving initial value problems with exponential growth integral curves // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 927. 012032. DOI:10.1088/1757-899X/927/1/012032

5. Kuznetsov E.B., Leonov S.S., Tsapko E.D. Estimating the Domain of Absolute Stability of a Numerical Scheme Based on the Method of Solution Continuation with Respect to a Parameter for Solving Stiff Initial Value Problems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2023. Vol. 63. No. 4. P. 528-541.