

УДК 519.6

Исследование разностных методов решения задачи теплопроводности с фазовыми переходами

Кудряшова Н.Ю.¹, Первухина Ю.В.²

Пензенский государственный университет¹,
ООО «ПО Энергоспецтехника»²

Аннотация: В работе построена физико-математическая модель процесса лазерной сварки двух металлических пластин в форме прямоугольных параллелепипедов одинаковой толщины, которые стыкуются боковыми сторонами. При реализации данной модели для трехмерного уравнения теплопроводности с фазовыми переходами была построена трехмерная разностная схема. Представлен численный метод, позволяющий разложить ее в цепочку трех одномерных разностных схем. Приведен алгоритм для нахождения глубины сформированного парового канала. Проведено численное моделирование рассмотренного метода решения задачи теплопроводности с фазовыми переходами.

Ключевые слова: задача Стефана, межфазная граница, лазерная сварка, разностная схема.

Введение

В настоящее время подавляющее большинство проблем теплообмена связаны с изменением состояния вещества.

Следует отметить, что исследования в данном направлении применяются на практике во многих физических процессах: задачи о промерзании и оттаивании влажного грунта, об образовании льда на поверхности воды, о промерзании трубопроводов, о сварке, плавлении, затвердевании металла и др.

Примером физического процесса, иллюстрирующего задачу Стефана в трехмерном случае, является задача о моделировании процесса лазерной сварки металлических пластин [2–6]. В процессе сварки под воздействием больших температур происходит переход из твердой фазы металла в жидкую. При этом происходит формирование межфазной границы. Определение изменения ее положения с течением времени является актуальной научной проблемой.

1. Математическое моделирование процесса лазерной сварки двух металлических пластин

Рассмотрим процесс моделирования лазерной сварки двух металлических пластин в форме прямоугольных параллелепипедов одинаковой толщины, которые стыкуются боковыми сторонами [1].

Горизонтальная ось луча лазера лежит в плоскости, находящейся в месте объединения пластин и направлена перпендикулярно к их поверхности. Введем в нашей модели декартову систему координат, в которой луч лазера является статичным, а металлические пластины находятся в движении вдоль оси x со скоростью v . Скорость движения является постоянной. Ось z направлена вдоль луча лазера по направлению

вниз, ось y – перпендикулярно месту объединения пластин. Точка отсчета системы координат находится на верхних границах металлических пластин в области попадания луча лазера в место их объединения. Заметим, что в данной математической модели введены некоторые упрощения:

1. Примем, что все колебания изменений значений теплофизических параметров области лазерной сварки равны своим средним стационарным значениям;
2. Процесс плавления листов металла описывается в приближении Стефана;
3. Радиус выходного отверстия, образованного лазером, будем считать фиксированным и равным $2r_f$, где r_f – радиус луча лазера.

1.1. Математическая модель процесса лазерной сварки.

Процесс лазерной сварки в твердой и жидкой фазе можно описать следующим трехмерным уравнением [2]

$$c_{ei}v \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_i \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

$$c_{ei} = \begin{cases} c_1 \rho_1, & T < T_e, \\ c_2 \rho_2 \left(1 + \frac{\chi}{c_2} \frac{\partial f_l}{\partial T} \right), & T_e \leq T \leq T_{l0}, \\ c_3 \rho_3, & T_{l0} < T, \end{cases} \quad (2)$$

где c_i – удельная теплоемкость, λ_i – теплопроводность, ρ_i – плотность.

При этом, если

- 1) $i = 1$ – параметры твердой фазы;
- 2) $i = 2$ – параметры межфазной зоны;
- 3) $i = 3$ – параметры жидкой фазы.

В терминах введенных замен (1): T_e и T_{l0} – температура начала и окончания процесса затвердевания сплавленных листов металла, f_l – доля жидкого состояния в межфазной зоне, χ – скрытая теплота плавления, выделяемая в процессе сварки.

На поверхности $z = 0$ в областях твердой и жидкой фаз граничное условие имеет вид:

$$\lambda_i \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = (\alpha_{k1} + \alpha_r)(T|_{z=0} - T_g) - q_1, \quad (3)$$

$$(x - r_f)^2 + y^2 > 4r_f^2.$$

Здесь α_{k1} – коэффициент теплоотдачи, который образуется с помощью обработки зоны сварки инертным газом аргоном, T_g – температура газа, α_r – радиационный коэффициент теплоотдачи при сварке.

Также имеется условие для нижней поверхности пластины, т.е. для $z = h$.

$$\lambda_i \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=h} = (\alpha_{k2} + \alpha_r)(T|_{z=h} - T_g) - q_1, \quad (4)$$

где α_{k2} – коэффициент теплоотдачи от нижней поверхности пластин к поверхности, на которой происходит процесс лазерной сварки, а T_g – температура среды, которая контактирует с нижней поверхностью свариваемых пластин.

На поверхности фазового перехода запишем условие Стефана

$$\left(\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial n} \right)_2 - \left(\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial n} \right)_1 = \rho_1 k n v. \quad (5)$$

На поверхности парового канала $(x - r_f)^2 + y^2 \leq (2r_f)^2$ справедливо уравнение теплового канала

$$-\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial n} = q_l n + q_r + q_v + q_c + q_b. \quad (6)$$

Здесь $n = (n_x, n_y, n_z)$ – единичная нормаль к поверхности парогазового канала,
 $\diamond q_l = q_l e_z$ – поглощенный поток лазерного излучения,
 $\diamond e_z$ – орт оси z ,
 $\diamond q_r$ – поток тепла, возникающий в результате отражений от стенок парогазового канала,
 $\diamond q_v$ – потери тепла за счет испарения металла во время процесса сварки,
 $\diamond q_c$ – моделирует поток тепла от передней стенки парогазового канала на его заднюю стенку.

На достаточно большом расстоянии от луча лазера температура по всей толщине пластин принимается равной температуре окружающей среды:

$$T|_{x \rightarrow \pm\infty} = T_g, \quad T|_{y \rightarrow \pm\infty} = T_g.$$

Для решения вышеописанной задачи применим следующую разностную схему:

$$\frac{T_{ijk}^{n+1} - T_{ijk}^n}{\tau} = \delta(L_x(T_{ijk}^{n+1}) + L_y(T_{ijk}^{n+1}) + L_z(T_{ijk}^{n+1})) + (1 - \delta)(L_x(T_{ijk}^n) + L_y(T_{ijk}^n) + L_z(T_{ijk}^n)), \quad (7)$$

где введены замены

$$L_x = \frac{1}{h_x} \left(\lambda_{ijk}^n \frac{T_{(i+1)jk} - T_{ijk}}{h_x} - \lambda_{ijk}^n \frac{T_{ijk} - T_{(i-1)jk}}{h_x} \right) - b \frac{T_{(i+1)ijk} - T_{(i-1)jk}}{2h_x};$$

$$L_y = \frac{1}{h_y} \left(\lambda_{ijk}^n \frac{T_{i(j+1)k} - T_{ijk}}{h_y} - \lambda_{ijk}^n \frac{T_{ijk} - T_{i(j-1)k}}{h_y} \right);$$

$$L_z = \frac{1}{h_z} \left(\lambda_{ijk}^n \frac{T_{ij(k+1)} - T_{ijk}}{h_z} - \lambda_{ijk}^n \frac{T_{ijk} - T_{ij(k-1)}}{h_z} \right).$$

Здесь $b = c_2 \rho_2 v$, h_x , h_y и h_z – шаги по соответствующим индексу осям координат.

Трехмерную разностную схему (7) заменим последовательностью трех одномерных разностных схем.

$$\frac{T_{ijk}^{n+1/3} - T_{ijk}^n}{\tau} - \delta L_x(T_{ijk}^{n+1/3}) - (1 - \delta)L_x(T_{ijk}^n) = \delta(L_y(T_{ijk}^{n+1/3}) + L_z(T_{ijk}^{n+1/3})) + (1 - \delta)(L_y(T_{ijk}^n) + L_z(T_{ijk}^n)); \quad (8)$$

$$\frac{T_{ijk}^{n+2/3} - T_{ijk}^{n+1/3}}{\tau} - \delta L_y(T_{ijk}^{n+2/3}) - (1 - \delta)L_y(T_{ijk}^{n+1/3}) = \delta(L_x(T_{ijk}^{n+2/3}) + L_z(T_{ijk}^{n+2/3})) + (1 - \delta)(L_x(T_{ijk}^{n+1/3}) + L_z(T_{ijk}^{n+1/3})); \quad (9)$$

$$\frac{T_{ijk}^{n+1} - T_{ijk}^{n+2/3}}{\tau} - \delta L_z(T_{ijk}^{n+1}) - (1 - \delta)L_z(T_{ijk}^{n+2/3}) = \delta(L_x(T_{ijk}^{n+1}) + L_y(T_{ijk}^{n+1})) + (1 - \delta)(L_x(T_{ijk}^{n+2/3}) + L_y(T_{ijk}^{n+2/3})). \quad (10)$$

К каждой из разностных схем (8), (9) и (10) применим метод разностной прогонки.

Была проведена численная реализация описанной выше вычислительной схемы. Полученная форма сварной ванны соответствует прогнозируемой в теоретическом описании форме. Благодаря полученным результатам можно определять глубину и протяженность сварной ванны, что позволит рассчитать время для изготовления сварных изделий различной сложности; затраты на производство, реализуя данную модель, не проводя эксперименты на практике.

Литература

1. Шапеев В.П., Черепанов А.Н. Конечно-разностный алгоритм для численного моделирования процессов лазерной сварки металлических пластин // - Вычислительные технологии, 2006. Т.11-4. С. 102-117.
2. Черепанов А.Н., Шапеев В.П. Численное исследование процесса сварки тонких металлических пластин // Вычислительные технологии, 2009. Т. 14-3. С. 93-103.
3. Рыкалин Н.Н. Расчеты тепловых процессов при сварке. М.: Машгиз, 1951.
4. Черепанов А.Н., Шапеев В.П., Фомин В.М., Семин Л.Г. Численное моделирование теплофизических процессов при лазерной сварке с образованием парового канала // ПМТФ, 2006. Т.11-4. С. 102-117.
5. Черепанов А.Н., Шапеев В.П., Исаев В.И. Численное моделирование лазерной сварки тонких металлических пластин с учетом конвекции в сварочной ванне // Теплофизика и аэромеханика, 2010. Т.17-3. С. 451-466.
6. Черепанов А.Н., Шапеев В.П., Фомин В.М., Семин Л.Г. Численное моделирование теплофизических процессов при лазерно-лучевой сварке // Прикл. механика и техн. физика, 2006. Т.47-55. С. 88-96.
7. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.

MSC 65M06

Investigation of difference methods for solving the problem of thermal conductivity with phase transitions

N.Y. Kudryashova¹, Y.V. Pervuhina²

Penza state university¹, Production Association «Estech»²

Abstract: The paper presents a physical and mathematical model of the laser welding process of two metal plates in the form of rectangular parallelepipeds of the same thickness, which are joined by the sides. When implementing this model, a three-dimensional difference scheme was constructed for a three-dimensional heat equation with phase transitions. A numerical method is presented that allows to decompose it into a chain of three one-dimensional difference schemes. An algorithm for finding the depth of the formed steam channel is given. Numerical modeling of all considered methods for solving the problem of thermal conductivity with phase transitions is carried out.

Keywords: Stefan's problem, interphase boundary, laser welding, difference scheme.

References

1. Shapeev V.P., Cherepanov A.N. Finite-difference algorithm for numerical simulation of laser welding processes of metal plates. Computing technologies, 2006. Vol.11-4. P. 102-117.
2. Cherepanov A.N., Shapeev V.P. Numerical study of the welding process of thin metal plates. Computing technologies, 2009. Vol.14-3. P. 93-103.
3. Rykalin N.N. Calculations of thermal processes during welding. Mashgiz, Moscow, 1951. 296 p.
4. Cherepanov A.N., Shapeev V.P., Fomin V.M., Semin L.G. Numerical simulation of thermophysical processes in laser welding with steam channel formation. Applied Mechanics and technical physics, 2006. Vol. 11-4. P. 102-117.
5. Cherepanov A.N., Shapeev V.P., Isaev V.I. Numerical simulation of laser welding of thin metal plates taking into account convection in the welding bath. Thermophysics and aeromechanics, 2010. Vol.17-3. P. 451-466.
6. Cherepanov A.N., Shapeev V.P., Fomin V.M., Semin L.G. Numerical simulation of thermophysical processes in laser beam welding. Applied Mechanics and technical physics, 2006. Vol.47-5. P. 88-96.
7. Samarski A.A. Theory of difference schemes. M.: Nauka, 1977. 656 p.