XVI Международная научная конференция
«Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании»
Саранск, 17-20 августа 2023 года

УДК 517.957

О моделировании и идентификации параметров распределенных формаций*

Косов А.А., Семенов Э.И., Толстихин А.А.

Институт динамики систем и теории управления имени В.М.Матросова СО РАН

Аннотация: Рассматриваются вопросы моделирования и идентификации параметров для формаций с распределенными характеристиками. Дано развитие методов построения точных решений нелинейных систем типа реакции-диффузии, которые можно использовать для моделирования распределенных формаций. Предложено использовать био-инспирированные алгоритмы для решения задач идентификации параметров формаций с распределенными характеристиками.

Ключевые слова: уравнения параболического типа, точные решения, математическое моделирование формаций, идентификация параметров, мониторинг полей.

1. Введение

В последнее десятилетие происходит быстрое развитие таких новых типов управляемых систем, как беспилотные летательные аппараты, автономные подводные роботы и другие системы взаимодействующих динамических объектов, образующих движущиеся формации [1]. Они находят применение во многих областях техники. При этом наблюдается тенденция к миниатюризации подвижных объектов, необходимость их организации в рои или стаи, включающие очень большое число объектов, что неизбежно приведет к появлению описания их моделей в терминах макропараметров (таких, как плотности, концентрации и т. п.), аналогично тому, как это происходило на этапе становления гидро- и газодинамики, термодинамики, химической кинетики и т. д. Математические модели такого рода систем с распределенными параметрами обычно описываются системами дифференциальных уравнений в частных производных. Дифференциальные уравнения в частных производных начали использоваться при моделировании движения формаций подвижных объектов с распределенными характеристиками. В [2] приводится одномерное уравнение в частных производных Фоккера-Планка, описывающее диффузию плотности агентов. Здесь же указано также, что для описания изменения плотности роя используют линейное одномерное уравнение реакции-диффузии. В [3] для моделирования формации с управлением по принципу отклонения от движения лидера применялось одномерное уравнение параболического типа.

Ранее авторами была предложена [4] математическая модель процесса распространения двух взаимодействующих распределенных формаций роботов с некоторой базы в окружающее пространство, описываемая системой двух уравнений параболического типа. Были построены параметрические семейства точных решений, которые можно использовать для отыскания законов управления граничными условиями, обеспечивающих распространение формаций на область заданных размеров за заданное время. В докладе будет представлена модель более общего вида, в которой коэффициенты амортизации могут зависеть от текущей плотности формации.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 22-29-00819

Используя точные решения модели, можно получать описание процесса распространения взаимодействующих формаций с базы на прилегающую территорию. При этом интерес представляют такие основные параметры формации, как расположение базы и линий уровня постоянной плотности, показывающих форму уже освоенной области и темпы расселения.

С другой стороны, идентификация таких основных параметров распределенной формации важна и независимо от наличия математической модели. Решение подобной задачи может выполняться другой формацией, состоящей из конечного числа роботов, действующих согласованно. Кроме того, определение линий уровня для какого-либо количественного показателя само по себе может представлять значимую роль. Типичным примером является продолжительный мониторинг заданной области конечной формацией автономных роботов с целью отслеживания концентраций загрязняющих веществ или плотностей редких или эндемичных биологических видов. В докладе будут представлены результаты по моделированию, идентификации и управлению формациями с распределенными характеристиками.

2. Моделирование распространения распределенных формаций

Рассматривается параболическая система уравнений типа реакции-диффузии

$$\begin{aligned} u_t &= \nabla \cdot \left(u^{\lambda} \nabla u\right) + \alpha u^{1-\lambda} v^{\mu} + \left(\sigma_1 u^{\lambda} - k_1\right) u, \\ v_t &= \nabla \cdot \left(v^{\mu} \nabla v\right) + \beta v^{1-\mu} u^{\lambda} + \left(\sigma_2 v^{\mu} - k_2\right) v. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — вектор пространственных переменных, $t \geq 0$ — время, $u = u(\mathbf{x}, t)$, $v = v(\mathbf{x}, t)$ — искомые функции, ∇ — оператор градиента по пространственным переменным; $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$ — вещественные параметры нелинейности среды; $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, σ_1, σ_2, k_1, k_2 — вещественные постоянные коэффициенты.

При моделировании распространения формаций мобильных роботов с распределенными характеристиками используются аналогичные (1) подходы к описанию диффузионных процессов [5]. При этом $u = u(\mathbf{x}, t)$, $v = v(\mathbf{x}, t)$ трактуются как плотности (количества в единице объема) роботов в пространстве. Как отмечается в обзоре [3], в последнее время уравнения с частными производными стали применяться для моделирования движения формаций взаимодействующих роботов в роевой робототехнике, при этом основная трудность состоит в том, что «analytical solutions of PDEs are available only for a small number of special cases». Поэтому развитие методов построения точных решений будет полезно при построении и исследовании моделей распространения формаций с распределенными характеристиками в роевой робототехнике.

Утверждение 1. *Пусть $\lambda = \mu \neq -1$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Тогда система* (1) *имеет точное решение вида*

$$u(\mathbf{x}, t) = \left[\psi_1(t)\right]^{1/\lambda} \left[\Omega(\mathbf{x})\right]^{1/1+\lambda}, \quad v(\mathbf{x}, t) = \left[\psi_2(t)\right]^{1/\lambda} \left[\Omega(\mathbf{x})\right]^{1/1+\lambda},$$

где $\Omega(\mathbf{x})$ удовлетворяет линейному уравнению Гельмгольца $\Delta\Omega(\mathbf{x}) = -(1+\lambda)\sigma\Omega(\mathbf{x})$, а функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ находятся из линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{\psi}_1 = -k_1 \lambda \psi_1 + \alpha \lambda \psi_2, \quad \dot{\psi}_2 = \beta \lambda \psi_1 - k_2 \lambda \psi_2.$$

Систему (1) можно использовать для моделирования распространения двух распределенных взаимодействующих формаций мобильных роботов с границы некоторой базы на окружающую территорию. Знание точных решений в соответствии с утверждением 1 позволяет в каждый момент времени точно определять линии уровня одинаковой плотности и границу области распространения каждой формации (фронты волн распространения).

3. Задача идентификации фронта волны распространения распределенной формации по территории (Задача обследования полей концентрации)

Задача обследования полей концентрации, также известная в иностранной литературе как Sampling problem, представляет в настоящее время повышенный интерес в научном сообществе. Обычно в ее рамках выделяют три основных цели обследования [6]:

1) локализация одного или нескольких экстремумов функции (источников), описывающей поле концентрации, в случае нестационарного поля часто сопровождается последующим отслеживанием их перемещений в пространстве (мониторинг);

2) восстановление линий уровня, частным и наиболее интересным случаем которого является поиск нулевой линии уровня (фронта), отделяющей область с положительными значениями величины поля от области с нулевыми значениями;

3) картографирование обследуемой области, зачастую носящее вспомогательный характер для рассматриваемой задачи и смежных с ней.

Очевидно, что параллельное решение нескольких из вышеописанных подзадач может значительно сократить финансовые, временные и иные затраты на проведение подобных обследований. В данной работе предлагается мультиагентная стратегия управления, обеспечивающая одновременную локализацию источника поля, а также восстановление любой заданной линии уровня. При этом, разработанный подход также предусматривает возможность их дальнейшего мониторинга на продолжительном отрезке времени. В качестве агентов, производящих обследование поля концентрации, будем использовать интеграторов второго порядка, динамика которых описывается следующей системой:

$$\dot{q}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = u_1, \quad i \in \Gamma = \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{2}$$

$$||v_i|| \leq v_{max}, \quad ||u_i|| \leq u_{max},$$

$$u_i = c_1 F_i^c + c_2 F_i^g, \tag{3}$$

$$F_i^g = \sum_{j \in \Gamma_{base},\, j \neq i} \frac{q_{ij}}{||q_{ij}||} \left(f(t, q_j) - f(t, q_i) \right), \tag{4}$$

$$F_i^c = - \sum_{j \in \Gamma_{base},\, j \neq i} \nabla_{q_i} U_{ij}^c \left(||q_{ij}|| \right), \tag{5}$$

$$U_{ij}^c \left(||q_{ij}|| \right) = \alpha \left(\frac{1}{2} \left(||q_{ij}|| - d_{ij}^A \right)^2 + \beta \ln ||q_{ij}|| + \beta \frac{d_{ij}^A}{||q_{ij}||} \right), \tag{6}$$

где $q_i \in \mathbb{R}^p$, $v_i \in \mathbb{R}^p$, $u_i \in \mathbb{R}^p$ — соответственно, положение, скорость и управление i–го агента, v_{max}, u_{max} — предельно допустимые значения скорости и управления, Γ — множество доступных агентов мощностью n, c_1, $c_2 \in \mathbb{R}^+$ — некоторые положительные коэффициенты, α, $\beta \in \mathbb{R}^+$ — некоторые управляющие параметры, $||q_{ij}||$ — евклидова норма вектора $q_{ij} = q_i - q_j$, d^A_{ij} — желаемое расстояние между агентами. Каждый агент способен с заданной периодичностью измерять величину поля концентрации в точке своего текущего местоположения. Помимо этого, будем считать, что каждый агент может связаться с любым другим для того, чтобы запросить его текущие координаты и значение последнего произведенного замера.

В основе подхода лежит разделение множества агентов на две подгруппы: Γ_{base} и Γ_{front}, отвечающие, соответственно, за поиск источника и обнаружение границ фронта. Управление агентами первой подгруппы строится, как взвешенная сумма (3) двух сил: градиентной (4) и кооперирующей (5). Первая, как следует из названия, отвечает за приближенное вычисление градиента поля, основываясь на разнице произведенных замеров величины поля. Кооперирующая сила отвечает за выдерживание агентами стационарных или локально стационарных (при $|\Gamma_{base}| > p + 1$) формаций, благодаря чему обеспечивается отсутствие столкновений между ними, а также повышение точности оценки градиента.

Аналогичным образом строится управление агентами второго множества. Однако, силы, действующие на них (граничная и релаксирующая), имеют другой физический смысл. Так, граничная сила отталкивает агентов от текущей оценки местоположения источника, основанной на координатах агентов множества Γ_{base} , если текущее значение замера выше искомой линии уровня, и притягивает в обратном случае, обеспечивая тем самым решение задачи. Подход близок к управлению с переключениями, но сглаживающая функция позволяет избежать разрывов управления и гарантирует его гладкость. С другой стороны, релаксирующая сила отвечает за отсутствие столкновений между агентами, а также равномерно распределяет их по периметру искомой линии уровня. Проведенные серии экспериментов в рамках специально разработанной тестирующей программной среды демонстрируют способность предложенного подхода решать поставленные задачи. При этом, стратегия управления обладает достаточно высокой точностью и скоростью получения решения, а также устойчивостью к изменениям поля концентрации, вызванных его нестационарной природой.

References

1. Shahzad M.M., Saeed Z., Akhtar A., Munawar H., Yousaf M.H., Baloach N.K., Hussain F. A Review of Swarm Robotics in a NutShell // Drones 2023. 7. 269. https://doi.org/10.3390/drones7040269

2. Purushotham Muniganti, Albert Oller Pujol. A Survey on Mathematical models of Swarm Robotics. Conference Paper. January 2010. URL: https://www.researchgate.net/publication/230793772

3. Wei J., Fridman E., Johansson K.H. A PDE approach to deployment of mobile agents under leader relative position measurements // Automatica. 2019. Vol.106. P. 47-53. DOI: 10.1016/j.automatica.2019.04.040.

4. Kosov A.A., Semenov E.I. Distributed model of space exploration by two types of interacting robots and its exact solutions // Journal of Physics: Conf. Ser. 2021. Vol.1847, No.1. 012007 p. doi:10.1088/1742-6596/1847/1/012007.

5. Karthik Elamvazhuthi and Spring Berman. Mean-field models in swarm robotics: a survey. Bioinspiration & Biomimetics // 2019. Vol.15. No.1. 15 015001 DOI 10.1088/1748-3190/ab49a4.

6. Hwang J., Bose N., Fan S. AUV Adaptive Sampling Methods // Applied Sciences. 2019. Vol.9. P. 1-30.

MSC 35K57, 35K55, 35Q35

On modeling and identification of parameters of distributed formations

A.A. Kosov, E.I. Semenov, A.A. Tolstikhin

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (ISDCT SB RAS)

Abstract: Issues of modeling and parameter identification for formations with distributed characteristics are considered. The development of methods of construction of exact solutions of nonlinear systems of reaction-diffusion type, which can be used for modeling distributed formations, is given. It is suggested to use bio-inspired algorithms for solving problems of identification by formations with distributed characteristics.

Keywords: parabolic type equations, exact solutions, mathematical modeling of formations, parameter identification, field monitoring.

References

1. Shahzad M.M.; Saeed Z.; Akhtar A.; Munawar H.; Yousaf M.H.; Baloach N.K.; Hussain F. A Review of Swarm Robotics in a NutShell // Drones 2023. 7. 269. https://doi.org/10.3390/drones7040269

2. Purushotham Muniganti, Albert Oller Pujol. A Survey on Mathematical models of Swarm Robotics. Conference Paper. January 2010. URL: https://www.researchgate.net/publication/230793772

3. Wei J., Fridman E., Johansson K.H. A PDE approach to deployment of mobile agents under leader relative position measurements // Automatica. 2019. Vol. 106. p. 47–53. DOI: 10.1016/j.automatica.2019.04.040.

4. Kosov A.A., Semenov E.I. Distributed model of space exploration by two types of interacting robots and its exact solutions // Journal of Physics: Conf. Ser. 2021. V. 1847, No. 1. P. 012007. doi:10.1088/1742-6596/1847/1/012007.

5. Karthik Elamvazhuthi and Spring Berman. Mean-field models in swarm robotics: a survey. Bioinspiration & Biomimetics // 2019. Vol. 15. No 1. 15 015001 DOI 10.1088/1748-3190/ab49a4.

6. Hwang J., Bose N., Fan S. AUV Adaptive Sampling Methods // Applied Sciences. 2019. Vol. 9. P. 1–30.