

УДК 517.91

Применение метода оптимального демпфирования В.И. Зубова в задаче управления четырёхкарданной гироскопической системой*

Жабко А.П., Жабко Н.А., Яковлев П.В.

Санкт-Петербургский государственный университет

Аннотация: Рассматривается задача построения управления четырёхкарданной гироскопической системой, связанной с кабиной тренажера самолета. Четырёхкарданная система позволяет избежать проблемы наличия в стандартной трёхкарданной гироскопической системе так называемой «мертвой зоны» в случае, когда оси двух карданов системы становятся коллинеарными или близкими к таковым. Такие системы рассматриваются в работах разных авторов. Актуальным остается вопрос выбора критерия оптимальности и построения соответствующего оптимального управления. На основании связей между углами Эйлера движения кабины, угловыми скоростями координатных осей кабины и углами вращения карданов определены достаточные условия разрешимости задачи управления. Предложен алгоритм построения управления карданной системой, оптимальный по отношению к демпфированию переходных процессов движения, по методу В.И. Зубова.

Ключевые слова: демпфирование, оптимальное управление, управление вращением, гироскоп.

1. Введение

Данная работа посвящена описанию управлению тренажером, который можно использовать при тренировке летчиков, космонавтов, спортсменов и цирковых акробатов. Имеется в виду кабина самолета, допускающая реализацию произвольного вращательного движения, которое является кусочно-гладким, т. е. непрерывным и кусочно-непрерывно дифференцируемым. С этой целью рассматривается четырёхкарданная гироскопическая система [1, 2]. В качестве метода оптимизации динамики вращательного движения выбран метод оптимального демпфирования [3, 4], поскольку он позволяет в режиме реального времени минимизировать необходимые изменения скоростей вращения карданов и, следовательно, минимизировать нагрузки на карданные кольца. Исследование является продолжением работы [5].

2. Основные понятия и обозначения

Введем следующие обозначения.

ЗСК – земная система координат, ось X – продольная ось, W_X – угловая скорость поворота вокруг оси X (крен); ось Y – поперечная ось, W_Y – угловая скорость поворота вокруг оси Y (тангаж); ось Z – нормальная ось, W_Z – угловая скорость поворота вокруг оси Z (рысканье).

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-07-00531 А)

Орты (i, j, k) обозначают правую систему координат ЗСК, причем $i = X, j = Y, k = Z$.

ССК – связанная с кабиной система координат

Рассмотрим систему из четырех карданов и связанные с ними системы координат:

- ◇ внутренний (Inner) – (i_4, j_4, k_4) , i_4 совпадает с продольной осью кабины самолета;
- ◇ средний (Middle) – (i_3, j_3, k_3) ;
- ◇ внешний (Outer) – (i_2, j_2, k_2) ;
- ◇ дополнительный (Redundant) – (i_1, j_1, k_1) , , $k_1 = k$ – совпадает нормальной осью ЗСК, причем, условия вложенности задаются равенствами: $k_1 = k, j_2 = j_1, k_3 = k_2, i_4 = i_3$.

Учитывая вложенность карданов введем в рассмотрение углы Эйлера:

$$\begin{aligned} \phi &= \angle(i, i_1) = \angle(j, j_1), & \psi &= \angle(i_1, i_2) = \angle(k_1, k_2), \\ \theta &= \angle(i_2, i_3) = \angle(j_2, j_3), & \nu &= \angle(j_3, j_4) = \angle(k_3, k_4). \end{aligned}$$

Тогда матрицы преобразования координат определяются равенствами:

$$\begin{aligned} (i_1, j_1, k_1) &= (i, j, k) \cdot S_1, & S_1(\phi) &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ (i_2, j_2, k_2) &= (i_1, j_1, k_1) \cdot S_2, & S_2(\psi) &= \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}, \\ (i_3, j_3, k_3) &= (i_2, j_2, k_2) \cdot S_3, & S_3(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ (i_4, j_4, k_4) &= (i_3, j_3, k_3) \cdot S_4, & S_4(\nu) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \nu & -\sin \nu \\ 0 & \sin \nu & \cos \nu \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем связь ЗСК и ССК:

$$(i_4, j_4, k_4) = (i, j, k) \cdot S_1(\phi) \cdot S_2(\psi) \cdot S_3(\theta) \cdot S_4(\nu) = (i, j, k) \cdot H(t). \quad (1)$$

Замечание 1. Далее считаем, что координаты $(i_4(t), j_4(t), k_4(t))$ заданы непрерывными и кусочно-непрерывно дифференцируемыми функциями. Тогда нетрудно заме-

туть, что преобразование координат карданов удовлетворяет равенству

$$(i_4(t), j_4(t), k_4(t)) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -W_Z(t) & W_Y(t) \\ W_Z(t) & 0 & -W_X(t) \\ -W_Y(t) & W_X(t) & 0 \end{pmatrix} = (i, j, k) \cdot \frac{d}{dt}(H(t)),$$

где матрица перехода $H(t)$ определена равенством (1).

3. Постановка задачи

Задача построения управления четырехкарданной системой заключается в определении углов поворотов карданов $\phi(t), \psi(t), \theta(t), \nu(t)$ по заданному положению кабины, т. е. по заданной матрице $H(t)$, на интервале времени $t \in [0, T]$.

Обозначим через h_1, h_2, h_3 столбцы матрицы H и e_1, e_2, e_3 – стандартный базис в R^3 .

Лемма 1. Если найдены непрерывные и кусочно-непрерывно дифференцируемые функции $(\phi(t), \psi(t), \theta(t))$, обеспечивающие равенство

$$S_1(\phi) \cdot S_2(\psi) \cdot S_3(\theta) \cdot e_1 = h_1, \quad (2)$$

то существует единственное решение $\nu(t)$ уравнения

$$S_1(\phi) \cdot S_2(\psi) \cdot S_3(\theta) \cdot S_4(\nu) = H(t). \quad (3)$$

Причем функция $\nu(t)$ определяется из системы уравнений

$$\begin{pmatrix} h_1^T \\ h_2^T \end{pmatrix} \cdot S_1(\phi) \cdot S_2(\psi) \cdot S_3(\theta) \cdot \begin{pmatrix} e_2, e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \nu & \sin \nu \\ -\sin \nu & \cos \nu \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Таким образом, исходная задача построения управления гироскопической системой сводится к задаче о разрешимости системы (2).

Введем векторную функцию $\begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) & \gamma(t) \end{pmatrix}^T = S_1^T(\phi(t)) \cdot h_1$.

Лемма 2 (достаточное условие разрешимости). Если $|\beta(t)| < 1$, то существует непрерывное и кусочно-непрерывно дифференцируемое решение $(\psi(t), \theta(t))$ системы (2).

4. Алгоритм построения законов вращения

С учетом условий разрешимости необходимо определить функцию $\phi(t)$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство $|\beta(t)| < 1$. Очевидно, что, в силу ортонормированности матрицы $H(t)$, таких функций имеется бесчисленное множество. Поэтому можно предложить следующий алгоритм построения управлений:

- 1) выбираем необходимую программу тренировок в виде матрицы $H(t)$;
- 2) определяем решение $\phi(t)$ неравенства $|\beta(t)| < 1$;
- 3) опираясь на лемму 2, ищем решение системы (2);
- 4) определяем функцию $\nu(t)$ из системы (4).

5. Демпфирование динамики системы по отношению к изменению углов вращения карданов

В работе [6] используется среднеквадратическое сглаживание скоростей изменения углов карданов. В нашей работе мы предлагаем минимизировать максимальное изменение скорости изменения углов, чтобы уменьшить вероятность критической нагрузки на кардан.

Матрица $H(t)$ является ортогональной, и ее элементы предполагаются непрерывными и кусочно-непрерывно дифференцируемыми функциями. Будем считать также, что на рассматриваемом временном отрезке $[0, T]$ имеется конечное число разрывов первого рода. Тогда можно построить оптимальную демпфирующую функцию по отношению к изменению углов вращения карданов в точках разрыва производной элементов матрицы $H(t)$.

Обозначим

$$\delta\dot{\phi} = \dot{\phi}(\hat{t} + 0) - \dot{\phi}(\hat{t} - 0), \quad \delta\dot{\psi} = \dot{\psi}(\hat{t} + 0) - \dot{\psi}(\hat{t} - 0), \quad (5)$$

$$\delta\dot{\theta} = \dot{\theta}(\hat{t} + 0) - \dot{\theta}(\hat{t} - 0), \quad \delta\dot{\nu} = \dot{\nu}(\hat{t} + 0) - \dot{\nu}(\hat{t} - 0). \quad (6)$$

При выполнении условий леммы 2, а именно, $|\beta(t)| < 1$, существует решение системы уравнений (3).

Тогда демпфирующий функционал суть $V(\phi(t), H(t)) = \max\{|\dot{\delta}\psi|, |\dot{\delta}\theta|, |\dot{\delta}\nu|\}$,

$$V(\phi(t), H(t)) \rightarrow \min_{\phi(t): |\beta(t)| < 1}, \quad t \in [0 : T].$$

Замечание 2. В случае реализации алгоритма, описанного в п. 4, функцию $\phi(t)$ можно выбрать непрерывной, получив тем самым верхнюю оценку оптимального решения от количества разрывов и величины скачков производной матрицы $H(y)$.

Ниже приведены рисунки, иллюстрирующие моделирование работы четырехкарданной системы.

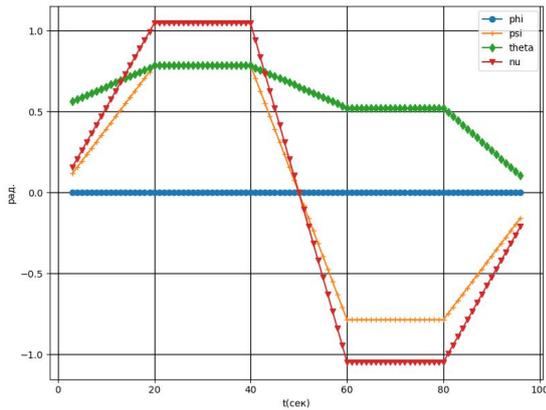


Рис. 1. Углы карданов. Фиксированный дополнительный кардан.

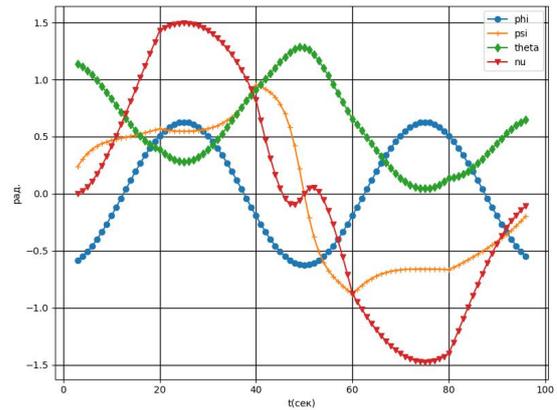


Рис. 2. Углы карданов. Активный дополнительный кардан.

На рис. 1 изображена работа карданов при фиксированном положении дополнительного кардана, $\phi(t) = 0$. На рис. 2 видно, что плавное изменение положения дополнительного кардана существенно влияет на положение остальных трех карданов. Рис. 3 и 4 демонстрируют поведение первых производных (скоростей изменения)

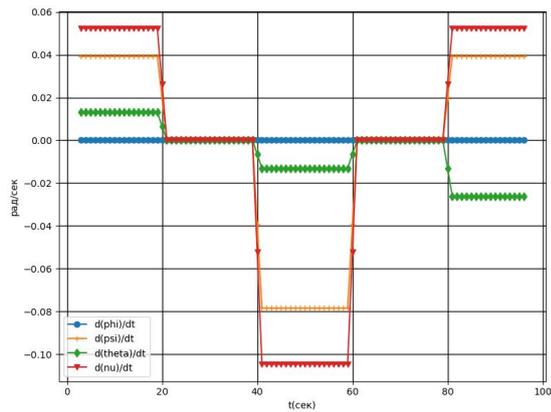


Рис. 3. Первая производная. Фиксированный дополнительный кардан.

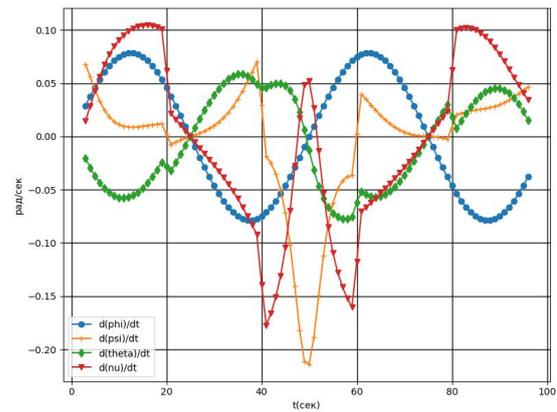


Рис. 4. Первая производная. Активный дополнительный кардан.

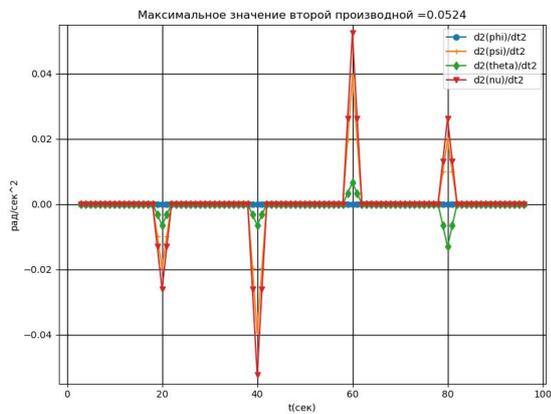


Рис. 5. Вторая производная. Фиксированный дополнительный кардан.

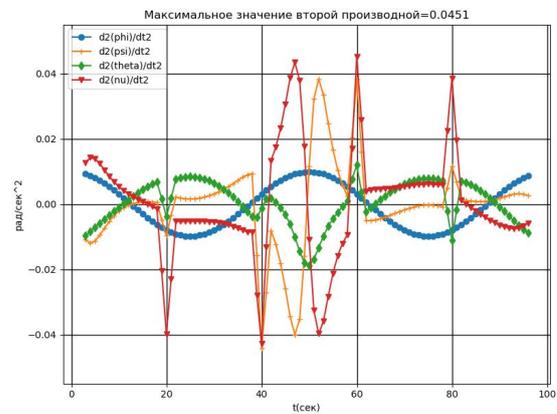


Рис. 6. Вторая производная. Активный дополнительный кардан.

углов карданов. Видно, что в случае активного дополнительного кардана изменение скоростей углов карданов происходит более плавно, что подтверждается графиками вторых производных, показанных на рис. 5 и 6. Максимальное значение второй производной при пассивном дополнительном кардане составила 0.524, а при активном – 0.451.

Литература

1. Jie M., Qinbei X. Four-axis gimbal system application based on gimbal self-adaptation adjustment // Proceedings of the Chinese Control Conference. Hangzhou, China. July 28-30, 2015. P. 8866-8871.
2. McConnel K.G. Kinematic of three-axis gimbal system // Proceedings of the Third Southeastern Conference on Theoretical and Applied Mechanics. S. Carolina, Columbia. March 31-April 01, 1966. P. 515-541
3. Veremey E. I. On practical application of Zubov's optimal damping concept // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикладная математика. Информатика. Процессы

- управления, 2020. Т.16. Вып.3. С. 293-315.
<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.307>
4. Зубов В. И. Лекции по теории управления. М., Наука, 1975. 496 с.
 5. Жабко А.П., Жабко Н.А., Яковлев П.В. Метод оптимального демпфирования В.И. Зубова в задаче управления одной гироскопической системой // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления, 2022. Т.18. Вып. 2. С. 278-284.
<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.208>
 6. Carter D.R., Duffey P., Bachorski S., Kägi M., Havlicsek H. Weighted least-squares based control for a four axis gimbal set // Technologies for Synthetic Environments: Hardware-in-the-Loop Testing XV, Apr. 2010. P. 76630I-1–76630I-12,
<https://doi.org/10.1117/12.851344>

MSC 34D20

Application of Zubov's method of optimal damping in the problem of controlling a four-gimbal gyroscopic system

A.P. Zhabko, N.A. Zhabko, P.V. Yakovlev
St. Petersburg State University

Abstract: The article considers the control problem of the aircraft cabin simulator with a four-axis gimbal gyroscopic system. The difficulty of the control problem of standard three-axis gimbal gyroscopic system is the presence of the phenomena "gimbal lock" when the two axes of the system become collinear or close to collinear. One of the applied solutions to avoid "gimbal lock" is to use of the fourth additional gimbal. Such fore-axis gimbal systems are presented in the works of various authors. However, the problem of criteria and an optimal control of four-axis gimbal gyroscopic system is still under the question. Optimal dumping algorithm for constructing a control of the gimbal system according to Zubov's method, is proposed.

Keywords: dumping, optimal control, gyroscope, rotation control.

References

1. Jie M., Qinbei X. Four-axis gimbal system application based on gimbal self-adaptation adjustment. *Proceedings of the 34th Chinese Control Conference. Hangzhou, China, July 28-30, 2015.* P. 8866-8871.
2. McConnel K.G. Kinematic of three-axis gimbal system. *Proceedings of the Third Southeastern Conference on Theoretical and Applied Mechanics. S. Carolina, Columbia. March 31-April 01, 1966.* P. 515-541
3. Veremey E. I. On practical application of Zubov's optimal damping concept. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Sciences. Control Processes, 2020. Vol.16, iss.3.* P. 293-315.
<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.307>
4. Zubov V.I. *Lektsii po teorii upravleniya.* M.: Nauka. Publ., 1975. 496 p. (In Russian)
5. Zhabko A.P., Zhabko N.A., Yakovlev P.V. Metod optimalnogo demppirovaniya V.I. Zubova v zadache upravleniya odnoy giroskopicheskoy sistemy. *Zubov's optimum damping method in the control problem of one gyroscope system. Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Sciences. Control Processes, 2022. Vol. 18, iss. 2.* P. 316-325. (In Russian)
<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.308>
6. Carter D.R., Duffey P., Bachorski S., Kägi M., Havlicsek H. Weighted least-squares based control for a four axis gimbal set *Technologies for Synthetic Environments: Hardware-in-the-Loop Testing XV, Apr. 2010, P. 76630I-1-76630I-12,*
<https://doi.org/10.1117/12.851344>