УДК 517.91

О дуге, соединяющей грубый диффеоморфизм на 3-торе с растягивающимся аттрактором и гиперболический автоморфизм Аносова*

$\boxed{\text{Гринес В.З.}}$ [1], Круглов Е.В.[2], Починка О.В.[1]

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»[1],
Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского[2]

Аннотация: Хирургия Смейла [1] на трехмерном торе позволяет получить из аносовского автоморфизма коразмерности 1 так называемый DA-диффеоморфизм. При этом в классической модели DA-диффеоморфизм имеет единственное нетривиальное базисное множество, являющееся двумерным растягивающимся аттрактором, а остальные базисные множества являются тривиальными источниками. Динамика произвольного структурно устойчивого 3-диффеоморфизма с таким нетривиальным базисным множеством является обобщением динамики классического DA-диффеоморфизма: обобщенный DA-диффеоморфизм, как и классический, существует только на трехмерном торе и имеет единственное нетривиальное базисное множество, при этом тривиальным базисным множеством такого диффеоморфизма, кроме источниковой, может быть еще и седловая орбита. Однако, соответствующая хирургической операции Смейла дуга диффеоморфизмов не является даже умеренно устойчивой. Ш. Ньюхаусом, Дж. Палисом и Ф. Такенсом [2] высказана гипотеза о построении умеренно устойчивой дуги между диффеоморфизмом Аносова и DA-диффеоморфизмом. Настоящая работа посвящена построению умеренно устойчивой дуги, проходящей через простые бифуркации типа седло-узел или удвоения периода, соединяющей структурно устойчивый 3-диффеоморфизм с двумерным растягивающимся аттрактором и гиперболический автоморфизм Аносова.

Ключевые слова: диффеоморфизм Аносова, бифуркация седло-узел, удвоение периода

1. Формулировка результатов

В работе рассматриваются А-диффеоморфизмы f, заданные на замкнутом трехмерном многообразии M^3. В силу спектральной теоремы Смейла неблуждающее множество такого диффеоморфизма состоит из конечного числа базисных множеств. Если размерность базисного множества равна трем ($\dim\Lambda = 3$), то, в силу [3, 4], $\Lambda = M^3 = \mathbb{T}^3$, индуцированный диффеоморфизмом f изоморфизм $f_* : \pi_1(\mathbb{T}^3) \to \pi_1(\mathbb{T}^3)$ определяется унимодулярной гиперболической (не имеющей собственных значений,

*Исследование выполнено при поддержке гранта РНФ (проект 23-71-30008).

по модулю равных единице) матрицей $A_f \in GL(3, \mathbb{Z})$

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

и f топологически сопряжен алгебраическому автоморфизму $\widehat{A}_f : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$, определенному формулой

$$\widehat{A}_f(x, y, z) = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, a_{21}x + a_{22}y + a_{12}z, a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) \pmod 1.$$

Если размерность базисного множества равна двум ($\dim \Lambda = 2$), то, в силу [5], Λ является аттрактором (либо репеллером), т. е. обладает замкнутой окрестностью $U_\Lambda \subset M^3$ такой, что $f(U_\Lambda) \subset int\, U_\Lambda$, $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} f^k(U_\Lambda) = \Lambda$ ($f^{-1}(U_\Lambda) \subset int\, U_\Lambda$, $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} f^{-k}(U_\Lambda) = \Lambda$). В этом случае $\Lambda = \bigcup\limits_{x\in\Lambda} W^u(x)$ ($\Lambda = \bigcup\limits_{x\in\Lambda} W^s(x)$). При этом

1) если $\dim W^u(x) = 2$ ($\dim W^s(x) = 2$), то аттрактор (репеллер) Λ называется *растягивающимся (сжимающимся)* и, в силу [5], имеет локальную структуру прямого произведения канторова множества на 2-диск;

2) если $\dim W^u(x) = 1$ ($\dim W^s(x) = 1$), то, согласно [6, Теоремы 1, 2] и [7, Corollary 1.2], каждая компонента связности аттрактора (репеллера) Λ гомеоморфна 2-тору.

В настоящей работе рассмаривается класс G структурно устойчивых 3-диффеоморфизмов, неблуждающее множество которых содержит двумерный растягивающийся аттрактор Λ. Из результатов работ [8,9] следует, что остальные базисные множества любого диффеоморфизма $f \in G$ являются тривиальными, а несущее многообразие M^3 диффеоморфно трехмерному тору $\mathbb{T}^3$. В работах [10,11] доказано, что для любого диффеоморфизма $f \in G$ индуцированный изоморфизм $f_* : \pi_1(\mathbb{T}^3) \to \pi_1(\mathbb{T}^3)$ определяется унимодулярной гиперболической матрицей A_f.

Рассмотрим однопараметрическое семейство диффеоморфизмов (*дугу*) $\varphi_t : M^3 \to M^3$, $t \in [0, 1]$. Дуга φ_t называется *гладкой*, если отображение $F : M^3 \times [0, 1] \to M^3$, заданное формулой $F(x, t) = \varphi_t(x)$, является *диффеотопией* – гладким отображением, которое при каждом фиксированном t является диффеоморфизмом.

Согласно [2], гладкие дуги φ_t, φ'_t называются *умеренно сопряженными*, если существуют гомеоморфизмы $\tau : [0, 1] \to [0, 1]$, $H_t : M^3 \to M^3$ такие, что $H_t\varphi_t = \varphi'_{\tau(t)}H_t, t \in [0, 1]$. Если, при этом, семейство гомеоморфизмов H_t непрерывно зависит от t, то дуги называются *сопряженными*.

Гладкая дуга φ_t называется *(умеренно) устойчивой*, если она имеет открытую окрестность в пространстве диффеотопий такую, что любая дуга из этой окрестности (умеренно) сопряжена дуге φ_t.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Для любого диффеоморфизма $f \in G$ существует умеренно устойчивая дуга $\xi_t : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$, $t \in [0, 1]$, соединяющая $\xi_0 = f$ с гиперболическим автоморфизмом $\xi_1 = \widehat{A}_f$.*

2. Схема построения дуги

Пусть $f \in G$. Согласно [3], среди гомотопных тождественному непрерывных отображений тора $\mathbb{T}^3$ существует единственное отображение $h_f : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$, полусопрягающее диффеоморфизм f с диффеоморфизмом $\widehat{A}_f$. В силу [10, 11] $h_f(\Lambda) = \mathbb{T}^3$, и множество $B_f = \{x \in \mathbb{T}^3 : h_f^{-1}(x)$ состоит из более, чем одной точки$\}$ есть объединение периодических седловых точек P_f^i, $i \in \{1, \ldots, k_f\}$ диффеоморфизма $\widehat{A}_f$ и их двумерных неустойчивых многообразий, причем $h_f^{-1}(P_f^i) = l_f^i \cup b_f^i$.

Обозначим через F^s одномерное слоение тора $\mathbb{T}^3$, состоящее устойчивых многообразий неблуждающих точек диффеоморфизма $\widehat{A}_f$.

Обозначим через $G_0 \subset G$ множество таких диффеоморфизмов f, для которых множество T_f^i состоит из единственной источниковой точки α_f^i и дуга l_f^i является гладкой.

Пусть $f \in G$. В настоящем разделе мы опишем этапы построения умеренно устойчивой дуги $\xi_t : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$, $t \in [0,1]$, соединяющей диффеоморфизм $\xi_0 = f$ с гиперболическим автоморфизмом тора $\xi_1 = \widehat{A}_f$.

Шаг 1. Тривиализация регулярной динамики диффеоморфизма f.

Предложение 1 ([12]). *Для каждого диффеоморфизма $f \in G$ существует умеренно устойчивая дуга $\zeta_t : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$, $t \in [0,1]$, соединяющая диффеоморфизм $\zeta_0 = f$ с некоторым диффеоморфизмом $\zeta_1 = g \in G_0$.*

Шаг 2. Построение модельного диффеоморфизма $g_0 \in G_0$, топологически сопряженного диффеоморфизму g.

Лемма 1. *Существует умеренно устойчивая дуга $\eta_t : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$, $t \in [0,1]$, соединяющая диффеоморфизм $\eta_0 = \widehat{A}_f$ с некоторым диффеоморфизмом $\eta_1 = g_0 \in G_0$ и обладающая следующими свойствами:*

1) устойчивое многообразие любой неблуждающей точки диффеоморфизма η_t, $t \in [0,1]$ является подмножеством слоя слоения F^s;

2) любой диффеоморфизм η_t, $t \in [0,1]$ совпадает с диффеоморфизмом $\widehat{A}_f$ вне множества $U = \bigcup\limits_{i=1}^{k_f} U_i$, где U_i – некоторая окрестность точки P_f^i.

Шаг 3. Приведение связок в каноническое положение.

Лемма 2. *Существует дуга без бифуркаций $\nu_t : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$, $t \in [0,1]$, соединяющая диффеоморфизм $\nu_0 = g$ с некоторым диффеоморфизмом $\nu_1 \in G_0$ таким, что*

$$(l_{\nu_1}^i \cup b_{\nu_1}^i) \cap U_i = (l_{g_0}^i \cup b_{g_0}^i) \cap U_i.$$

Лемма 3. *Существует дуга без бифуркаций $\mu_t : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$, $t \in [0,1]$, соединяющая диффеоморфизм $\mu_0 = \nu_1$ с некоторым диффеоморфизмом $\mu_1 \in G_0$ таким, что*

$$\mu_1|_U = g_0|_U.$$

Лемма 4. *Существует дуга без бифуркаций $\lambda_t : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$, $t \in [0,1]$, соединяющая диффеоморфизм $\lambda_0 = \mu_1$ с некоторым диффеоморфизмом $\lambda_1 \in G_0$ таким, что*

1) $\lambda_t|_U = g_0|_U$;

2) пересечение устойчивого многообразия любой неблуждающей точки диффеоморфизма λ_1 с множеством U является подмножеством слоя слоения F^s.

Обозначим через $\beta_t : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$, $t \in [0,1]$ гладкую дугу, совпадающую с $\lambda_1^{-1}\eta_{1-t}$ на множестве U и тождественную вне этого множества. Тогда дуга $\lambda_1\beta_t$ соединяет диффеоморфизм λ_1 с некоторым аносовским диффеоморфизмом $a = \lambda_1\beta_1$, локально совпадающим с гиперболическим автоморфизмом $\widehat{A}_f$. Из результатов работы [13] следует, что существует дуга без бифуркаций, связывающая диффеоморфизм a с автоморфизмом $\widehat{A}_f$.

Литература

1. Smale S., Differentiable dynamical systems// Bull. Amer. Math. Soc. 1967. 73, No.1. P. 741-817. Имеется перевод: *Успехи мат. наук* 25(1970), 113-185.
2. Newhouse S.H., Palis J., Takens F. Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms // Publications mathematiques le l'I.H.E.S., 57(1983), P. 5-71.
3. Franks J., "Anosov Diffeomorphisms, "Global Analysis. Proc. Simp. in Pure Math., **14** , P. 61-94 (1970).
4. Newhouse S.H., "On codimension one Anosov diffeomorphisms, "Amer. J. Math., 92, 3 (1970), P. 761-770.
5. Плыкин Р.В. О топологии базисных множеств диффеоморфизмов Смейла // Матем. сб. 1971. 84(126). 2. P. 301-312.
6. Гринес В.З, Жужома Е.В, Медведев В.С. О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях// Мат. зам. 2005. 78, No.6. P. 813-826.
7. Brown A. Nonexpanding attractors: conjugacy to algebraic models and classification in 3-manifolds// Journ. of Modern Dyn. 2010. 3, No.4. P. 517-548.
8. Гринес В.З., Жужома Е.В. Структурно устойчивые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один // Известия РАН, серия математическая // 2002. 66(2). С. 3-66.
9. Grines V.Z., Zhuzhoma E.V., "On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors,"Transactions of the American Mathematical Society, 357(2), C. 617 -667 (2005).
10. Grines V.Z., Zhuzhoma E.V. "The topological classification of orientable attractors on the n-dimensional torus "Russ. Math. Surv. 1979, 34(4), C. 163-164.
11. Гринес В.З., Жужома Е.В. Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности ориентируемых аттракторов на трехмерном торе // Дифференциальные и интегральные уравнения: Межвузовский сборник. Горький, ГГУ, 1981. С. 89-93.
12. Гринес В.З., Круглов Е.В., Починка О.В. Сценарий простого перехода от структурно устойчивого 3-диффеоморфизма с двумерным растягивающимся аттрактором к DA-диффеоморфизму // Дифференциальные уравнения и динамические системы: Сборник статей. Труды МИАН, 2020. 308. С. 152-166.
13. Gogolev A. Smooth conjugacy of Anosov diffeomorphisms on higher dimensional tori. arXiv:0804.3901v3 [math.DS] 27 Sep 2008, 51 p.

MSC 34D20

On the arc connecting a rough diffeomorphism on a 3-torus with a expanding attractor and Anosov hyperbolic automorphism

$\boxed{\text{V.Z. Grines}}$[1], E.V. Kruglov[2], O.V. Pochinka[1]

National Research University Higher School of Economics[1],
National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod[2]

Abstract: Smale's surgery on a three-dimensional torus makes it possible to obtain a so-called DA-diffeomorphism from an Anosov automorphism of codimension 1. Moreover, in the classical model, the DA-diffeomorphism has a single nontrivial basis set, which is a two-dimensional expanding attractor, and the remaining basis sets are trivial sources. The dynamics of an arbitrary structurally stable 3-diffeomorphism with such a nontrivial basis set is a generalization of the dynamics of classical DA-diffeomorphism: a generalized DA-diffeomorphism, like the classical one, exists only on a three-dimensional torus and has a single nontrivial basis set, while a saddle orbit can also be a trivial basis set of such a diffeomorphism, in addition to the source one. However, the arc of diffeomorphisms corresponding to Smale's surgical operation is not even mildly stable. By S. Newhouse, J. Palis and F. Thus, a hypothesis was proposed about the construction of a mildly stable arc between the Anosov diffeomorphism and the DA-diffeomorphism. In this paper, we discuss the construction of a mildly stable arc passing through simple saddle-node or flip bifurcations, connecting a structurally stable 3-diffeomorphism with a two-dimensional expanding attractor and an Anosov hyperbolic automorphism.

Keywords: Anosov diffeomorphism, saddle-node bifurcation, flip bifurcation

References

1. Smale S. Differentiable dynamical systems// Bull. Amer. Math. Soc. 1967. 73, No.1. P. 741-817.Имеется перевод: Успехи мат. наук 25, 1970. С. 113-185.

2. Newhouse S.H., Palis J., Takens F. Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms // Publications mathematiques le l'I.H.E.S., 57(1983). P. 5-71.

3. Franks J. "Anocov Diffeomorphisms, "Global Analysis. Proc. Simp. in Pure Math., 1970. P. 61-94.

4. Newhouse S.H. On codimension one Anosov diffeomorphisms // Amer. J. Math., 92, 3 (1970). P. 761-770.

5. Plykin R. V. The topology of basis sets for Smale diffeomorphisms // Mathematics of the USSR-Sbornik, 1971. Vol. 13. Issue 2. P. 297–307.

6. Grines V.Z., Zhuzhoma E.V.,Medvedev V.S. On Morse–Smale Diffeomorphisms with Four Periodic Points on Closed Orientable Manifoldsx // Mathematical Notes, 2003. Vol.74, Issue 3. P. 352–366.

7. Brown A. Nonexpanding attractors: conjugacy to algebraic models and classification in 3-manifolds// Journ. of Modern Dyn. 2010. *3*, No.4. P. 517-548.

8. Grines V.Z., Zhuzhoma E.V. Structurally stable diffeomorphisms with basis sets of codimension one Izvestiya: Mathematics, 2002. Vol.66, Issue 2. P. 223-284.
9. Grines V.Z., Zhuzhoma E.V. “On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors,”Transactions of the American Mathematical Society, 2005, 357 (2), P. 617-667.
10. Grines V.Z., E.V.Zhuzhoma. “The topological classification of orientable attractors on the n-dimensional torus ”Russ. Math. Surv, 34 (4), 1979. P. 163-164
11. Grines V.Z., Zhuzhoma E.V. “Necessary and sufficient conditions for the topological equivalence of orientable attractors on an n - dimensional torus, ”Differential and Integral Equations. Gorkiy State University,1981. P. 89-93. [in Russian].
12. Grines V.Z., Kruglov E.V., Pochinka O.V. Scenario of a Simple Transition from a Structurally Stable 3-Diffeomorphism with a Two-Dimensional Expanding Attractor to a DA Diffeomorphism. Proc. Steklov Inst. Math. 308,2020. P. 141–154.
13. Gogolev A. Smooth conjugacy of Anosov diffeomorphisms on higher dimensional tori. arXiv:0804.3901v3 [math.DS] 27 Sep 2008, 51 p.