УДК 531.36:62-50

# О моделировании динамики многозвенных роботов-манипуляторов с вязкоупругими шарнирами*

Андреев А.С., Сутыркина Е.А., Булдаковский П.А.

Ульяновский государственный университет

*Аннотация:* Исследуется проблема влияния наследственных свойств механической системы на устойчивость ее положений равновесия. Рассмотрено управление многозвенным манипулятором с цилиндрическими вязкоупругими шарнирами наследственного действия по классическому определению В. Вольтерра. Представлены некоторые новые модели управления многозвенным манипулятором с вязкоупругими цилиндрическими шарнирами. Уравнения динамики манипулятора выводятся на основе концепции математической модели механической системы с вязкоупругими элементами. Обоснованы законы управления, решающие задачу стабилизации положения манипулятора без измерения скорости, а также задачу отслеживания траектории. Решается задача управления трехзвенным манипулятором с вязкоупругими цилиндрическими шарнирами.

*Ключевые слова:* многозвенный робот-манипулятор, вязкоупругие шарниры, стабилизация движения.

## 1. Введение

Несмотря на многочисленные исследования, проблема управления манипулятором с вязкоупругими шарнирами по-прежнему актуальна. Это связано как с преимуществом вязкоупругих соединений по точности, плавности, надежности и другим свойствам, так и со стремлением разработать модели роботов-манипуляторов с человекоподобным двигательным механизмом. Среди работ последних лет в этом направлении можно выделить работы [1–3].

Целью данной работы является исследование задачи управления многозвенным манипулятором с цилиндрическими вязкоупругими шарнирами наследственного действия по классическому определению В. Вольтерра. В разделе 2 представлена математическая модель манипулятора с вязкоупругими шарнирами. В разделе 3 представлено решение одной из трех решенных задач, а именно задачи о стабилизации положения манипулятора без измерения скорости. В докладе также будут представлены результаты решения данной задачи о стабилизации вращательного движения и отслеживания траектории движения манипулятора. В качестве конкретного примера решается задача управления трехзвенным роботом-манипулятором с вязкоупругими шарнирами.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 22-71-00062, https://rscf.ru/project/22-71-00062/).

## 2. Математическая модель манипулятора с вязкоупругими шарнирами и постановка задачи

Манипуляторы с абсолютно жесткими звеньями моделируются как механическая система с конечным числом степеней свободы. Можно предположить, что такой математической моделью является система с $N$ материальными точками, положение которых определяется радиус-векторами

$$\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1),\ \mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2), \ldots, \mathbf{r}_N = (x_N, y_N, z_N). \tag{1}$$

Предположим, что к $j$-ой точке приложены вязкоупругие элементы с реакциями $\mathbf{f}_{jk}$ $(j = \overline{1, N};\ k = \overline{1, \mu_N})$, которые определяются по свойству наследственности механических систем согласно В. Вольтерра [4]

$$\mathbf{f}_{jk} = f_{jk}\mathbf{e}^0_{jk} = -(\rho_{jk} l_{jk}(\mathbf{r}_j(t)) + \int\limits_{-\infty}^{t} g_{jk}(\nu - t) l_{jk}(\mathbf{r}_j(\nu)) d\nu)\mathbf{e}^0_{jk}, \tag{2}$$

где $l_{jk}$ – удлинение $k$-го элемента с учетом остаточной деформации при перемещении $\mathbf{r}_j(t)$, $\rho_{jk}$ и $g_{jk}$ – соответствующие коэффициенты жесткости и релаксации, $\mathbf{e}^0_{jk}$ – единичный вектор соответствующего направления.

Виртуальную работу реакций $\mathbf{f}_{jk}$ $(j = \overline{1, N};\ k = \overline{1, \mu_N})$ на элементарном перемещении $\delta\mathbf{e}_{jk} = \delta e_{jk}\mathbf{e}_{jk}$ можно найти, используя равенства:

$$\delta' A = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{\mu_j}(\mathbf{f}_{jk} \cdot \delta\bar{e}_{jk}) = \mathbf{f}'\delta\mathbf{l},$$
$$\mathbf{l}' = (l_1, l_2, \ldots, l_{1\mu_1}, \ldots, l_{N\mu_N}) = (l_1, l_2, \ldots, l_p),$$
$$\mathbf{f}' = (f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{1\mu_1}, \ldots f_{N\mu_N}) = (f_1, f_2, \ldots, f_p) = -p\mathbf{l}(\mathbf{r}(t)) - \int\limits_{-\infty}^{t} \mathbf{G}(\nu - t)\mathbf{l}(\mathbf{r}(\nu)) d\nu, \tag{3}$$
$$p = \sum_{j=1}^{N}\mu_j,\ \mathbf{P} = \mathrm{diag}(\rho_{11}, \rho_{12}, \ldots, \rho_p),\ \mathbf{G} = \mathrm{diag}(g_{11}, g_{12}, \ldots, g_p).$$

Пусть на механическую систему наложены идеальные стационарные связи, так что ее положение описывается $n$ обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Из (2) и (3) находим обобщенные силы, определяющие действие вязкоупругих элементов

$$\mathbf{w}_1 = \left(\frac{\partial\mathbf{l}}{\partial\mathbf{q}}\right)\mathbf{f},\ \ \mathbf{l} = \mathbf{l}(\mathbf{q}),\ \left(\frac{\partial\mathbf{l}}{\partial\mathbf{q}}\right) = \frac{\partial(l_1, l_2, \ldots, l_p)}{\partial(q_1, q_2, \ldots, q_n)}. \tag{4}$$

Рассмотрим задачу управления $n$-звенным электромеханическим манипулятором с вязкоупругими соединениями типа (2). Пусть $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)'$ – вектор углов между звеньями манипулятора, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)'$ – вектор углов поворота выходных валов электроприводов. Тогда для каждого из $n$ соединений круговое удлинение определяется как $l_j = r_j(\varphi_j - \psi_j)$, где $r_j$ – радиус вала.

Уравнения управляемого движения манипулятора можно записать в виде уравнений Лагранжа [5]:

$$\mathbf{A}(\varphi)\ddot{\varphi} + \mathbf{C}(\varphi,\dot{\varphi})\dot{\varphi} + \mathbf{s}(\varphi-\psi) + \int\limits_{-\infty}^{t} \mathbf{G}(\nu - t)(\varphi(\nu)-\psi(\nu))d\nu + \mathbf{g}(\varphi) = 0,$$

$$\mathbf{J}\ddot{\psi} - \mathbf{s}(\varphi-\psi) - \int\limits_{-\infty}^{t} \mathbf{G}(\nu - t)(\varphi(\nu)-\psi(\nu))d\nu = \mathbf{u}, \tag{5}$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{q}) \in R^{n\times n}$ – матрица инерции жестких звеньев, $\mathbf{J} \in R^{n\times n}$ – диагональная матрица инерции приводов, $\mathbf{J} = diag(j_1, j_2, \ldots, j_n) > 0$, кориолисовы и центробежные моменты инерции описываются как $\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$, функция $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ представляет гравитационные моменты, а $\mathbf{u} \in R^n$ – входной крутящий момент, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)'$, $\mathbf{G} = diag(G_1, G_2, \ldots, G_n)$, при этом $s_k + \int\limits_{-\infty}^{0} G_k(\gamma)d\gamma > 0$ $(k = \overline{1,n})$.

В статье дано решение задачи о стабилизации положения и установившегося вращательного движения, а также получен закон управления, позволяющий отслеживать траектории движения манипулятора.

## 3. Решение задачи о стабилизации положения манипулятора без измерения скорости

Пусть $\varphi = \varphi_0$ – заданное положение манипулятора, $\psi = \psi_0$ – соответствующие положения выходных валов, определяемые по формуле:

$$\psi_0 = \left(\mathbf{s} + \int\limits_{-\infty}^{0} \mathbf{G}(\gamma)d\gamma\right)^{-1} \mathbf{g}(\varphi_0) + \varphi_0. \tag{6}$$

Доказано, что задача о стабилизации положения манипулятора решается управлением вида

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}(\varphi_0) - \mathbf{B}(\psi - \psi_0) + \int\limits_{t-h}^{t} \mathbf{H}(\nu - t)(\psi(\nu) - \psi_0)d\nu,$$

$$\mathbf{B} = \mathrm{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_n),\ \mathbf{H} = \mathrm{diag}(H_1, H_2, \ldots, H_n),\ H_j > 0\ (j = \overline{1,n}), \tag{7}$$

$$h > 0,\ b_j - \int\limits_{-h}^{0} H_j(\gamma)d\gamma > 0$$

Заметим, что вторая составляющая закона управления (7) аналогична структуре вязкоупругого крутящего момента.

## 4. Заключение

В работе получены новые модели управления многозвенным роботом-манипулятором с вязкоупругими шарнирами. Моделирование манипулятора на основе физического принципа В. Вольтерра позволяет утверждать определенное сходство моделей таких роботов-манипуляторов с действием многосуставной руки человека. Проведены численные эксперименты с двухзвенным и трехзвенным манипуляторами, которые подтверждают обоснованность построенных моделей управления.

## Литература

1. Garcia-Rodriguez R., Parra-Vega V., Ramos-Velasco L. E., Dominguez-Ramirez O. A. Neuro-controller for antagonistic bi-articular muscle actuation in robotic arms based on terminal attractors, Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2020, vol. 42 (11). P. 2031-2043.

2. Machida K., Kimura S., Suzuki R., Yokoyama K., Okui M., Nakamura T. Variable Viscoelastic Joint Module with Built-in Pneumatic Power Source, 2020 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM), Boston, MA, USA, 2020. P. 1048-1055, doi: 10.1109/AIM43001.2020.9158861.

3. Yamamoto K., Murotani K., Ko T., Nakamura Y. Resolved viscoelasticity control for robust walking of a humanoid with knee-stretched posture considering singularity, Robotics and Autonomous Systems, 2022, vol. 157. 104218 p.

4. Volterra V. Theory of functionals and of integral and integro-differential equations. Dover Publications, New York, 1959.

5. Andreev A.S., Peregudova O.A. Lyapunov Functional Method in the Stability Problem of Volterra Integro-Differential Equations with Infinite Delay, Mechanics of Solids, 2021, vol. 56 (8). P. 1514-1533.

MSC 39A30

# On the dynamic modelling of the multilink robot manipulators with viscoelastic joints

A.S. Andreev, E.A. Sutyrkina, P.A. Buldakovskii
Ulyanovsk State University

*Abstract:* We study the problem of the influence of the mechanical system hereditary properties on the stability of its equilibrium positions. We consider the control of the multilink manipulator with cylindrical viscoelastic joints of hereditary action according to the classical definition of V. Volterra. Some new control models for a multilink manipulator with viscoelastic cylindrical joints are presented. The manipulator dynamics equations are derived based on the concept of the mathematical model for a mechanical system with viscoelastic elements. The control laws are substantiated that solve the position stabilization problem of the manipulator without measuring velocity measurements as well as the trajectory tracking control problem. The control problem of the three-link manipulator with viscoelastic cylindrical joints is solved.

*Keywords:* multilink robot manipulator, viscoelastic joints, motion stabilization.

## References

1. Garcia-Rodriguez R., Parra-Vega V., Ramos-Velasco L. E., Dominguez-Ramirez O. A. Neuro-controller for antagonistic bi-articular muscle actuation in robotic arms based on terminal attractors, Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2020, vol. 42 (11). P. 2031-2043.

2. Machida K., Kimura S., Suzuki R., Yokoyama K., Okui M., Nakamura T. Variable Viscoelastic Joint Module with Built-in Pneumatic Power Source, 2020 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM), Boston, MA, USA, 2020. P. 1048-1055, doi: 10.1109/AIM43001.2020.9158861.

3. Yamamoto K., Murotani K., Ko T., Nakamura Y. Resolved viscoelasticity control for robust walking of a humanoid with knee-stretched posture considering singularity, Robotics and Autonomous Systems, 2022, vol. 157. 104218 p.

4. Volterra V. Theory of functionals and of integral and integro-differential equations. Dover Publications, New York, 1959.

5. Andreev A.S., Peregudova O.A. Lyapunov Functional Method in the Stability Problem of Volterra Integro-Differential Equations with Infinite Delay, Mechanics of Solids, 2021, vol. 56 (8). P. 1514 - 1533.